MATHEMATISCHE ANNALEN

131. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE
MÜNSTER (WESTF.)

RICHARD COURANT
NEW YORK

HEINZ HOPF
ZÜRICH

KURT REIDEMEISTER
GÖTTINGEN

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
ZÜRICH

131. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1956

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg
Printed in Germany

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt des 131. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

SOMMER, F., u. J. MEHRING
Math. Annalen, Bd. 131, S. 1—16 (1956)

Kernfunktion und Hüllenbildung in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen

Von

FRIEDRICH SOMMER in Münster (Westf.) und JOHANNES MEHRING in Düsseldorf

Im folgenden sollen einige Zusammenhänge aufgezeigt werden, die zwischen der Theorie der Orthogonalfunktionen einerseits und der Theorie der Holomorphiehüllen andererseits in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen bestehen. Zunächst möge die Problemstellung an Hand der bekannten Haupteigenschaften der quadratintegrierbaren Funktionen erläutert werden[1]).

$\mathfrak{G}$ sei ein beschränktes Gebiet im euklidischen Raume R^{2p} der p komplexen Veränderlichen $z = (z_1, z_2, \ldots, z_p)$, $z_k = x_k + i y_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Die in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktionen $f(z)$, deren Lebesguesches Integral

$$(f, \bar{f})_{\mathfrak{G}} = \int\limits_{\mathfrak{G}} f(z)\, \overline{f(z)}\, d\omega$$

($d\omega = dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \ldots dx_p\, dy_p$) endlich ist, bilden die (offenbar nicht leere) *Familie* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G})$ *der in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen*. Alle Funktionen f aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G})$, deren Integrale der Bedingung

$$(f, \bar{f})_{\mathfrak{G}} \leqq 1 \tag{0.1}$$

genügen, bilden in $\mathfrak{G}$ eine *normale Familie* $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ holomorpher Funktionen, die im Innern von $\mathfrak{G}$, d. h. in jedem kompakt in $\mathfrak{G}$ liegenden Teilgebiet, gleichartig beschränkt sind. Hieraus folgt, daß in $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \max_{f \in \mathfrak{F}} |f(z)|^2 \tag{0.2}$$

existiert. Es gibt sogar zu jedem Punkt z aus $\mathfrak{G}$ eine bis auf den Faktor $e^{i\vartheta}$ eindeutig bestimmte Funktion aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$, für die das Maximum angenommen wird. $K_{\mathfrak{G}}(z)$ ist in $\mathfrak{G}$ eine reell-wertige, positive, reell-analytische Funktion, die als *Kern des Gebietes* $\mathfrak{G}$ bezeichnet wird. Auf Grund der Definition des Kernes gilt für zwei Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, von denen $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}_2$ liegt,

$$K_{\mathfrak{G}_1}(z) \geqq K_{\mathfrak{G}_2}(z) \tag{0.3}$$

für jeden Punkt z aus $\mathfrak{G}_1$.

Der Kern gibt Anlaß zu einer gegenüber eineindeutigen Abbildungen *invarianten Hermiteschen Metrik* (Bergmansche Metrik) mit dem Linienelement

$$ds^2 = \sum_{k,l=1}^{p} T_{k\bar{l}}\, dz_k\, d\bar{z}_l\,, \quad T_{k\bar{l}} = \frac{\partial^2 \log K_{\mathfrak{G}}(z)}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l}\,, \quad k, l = 1, 2, \ldots, p\,. \tag{0.4}$$

Die Hermitesche Matrix $(T_{k\bar{l}})$ ist in allen Punkten z aus $\mathfrak{G}$ positiv definit.

[1]) Zu den folgenden Ergebnissen siehe: S. BERGMAN: The Kernel Function and Conformal Mapping. New York 1950.

Man gelangt noch auf einem zweiten Wege zum Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$. Eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Funktionen $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ bildet ein *Orthonormalsystem in* $\mathfrak{G}$, wenn die $p_k(z)$ den Relationen

$$(0.5) \qquad \int_{\mathfrak{G}} p_k(z)\,\overline{p_l(z)}\,d\,\omega = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}$$

genügen. Ein Orthonormalsystem kann durch Hinzunahme von höchstens abzählbar vielen weiteren Funktionen aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ stets zu einem *vollständigen System* ergänzt werden. Dabei heißt ein System $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... vollständig, wenn jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G})$ in eine Reihe

$$(0.6) \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k(z) \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

entwickelt werden kann, die im Innern von $\mathfrak{G}$, d. h. in jedem kompakt in $\mathfrak{G}$ liegenden Teilgebiet, gleichmäßig konvergiert. Es läßt sich zeigen, daß zu jedem gegebenen vollständigen Orthonormalsystem für eine Funktion $f(z)$ die Fourierkoeffizienten c_k eindeutig bestimmt sind. Umgekehrt liefert jede Reihe (0.6) eine in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbare Funktion.

Aus allem folgt, daß die Menge $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G})$ einen *Hilbertschen Raum* bildet und jedes vollständige Orthonormalsystem $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... eine *Basis dieses Raumes* darstellt. Die Basis kann auf mannigfache Weise gebildet werden, doch stets liefert die Summe

$$(0.7) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\,\overline{p_k(z)} = K_{\mathfrak{G}}(z)$$

den Kern des Gebietes $\mathfrak{G}$. Aber nicht nur diese, sondern auch noch die Summe

$$(0.8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\,\overline{p_k(\zeta)} = K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl des vollständigen Orthonormalsystems. Man nennt $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ die *Kernfunktion des Gebietes* $\mathfrak{G}$. Die Reihe (0.8) konvergiert gleichmäßig im Innern des Produktgebietes $\mathfrak{G}_{z\bar{\zeta}} = \mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\zeta}}$ und liefert dort eine holomorphe Funktion der Veränderlichen $(z, \bar{\zeta}) = (z_1, \ldots, z_p, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_p)$.

Hierbei wurde die folgende Terminologie benutzt: Soll zum Ausdruck gebracht werden, daß z in $\mathfrak{G}$ läuft, so ist $\mathfrak{G}$ ein Gebiet im z-Raum, und wir schreiben dann $\mathfrak{G}_z$ statt $\mathfrak{G}$. Läßt man eine Veränderliche $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ in $\mathfrak{G}$ laufen, so erhält man ein Gebiet $\mathfrak{G}_\zeta$ im ζ-Raum. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist dasjenige Gebiet im z-Raum, für das $\bar{z}$ in $\mathfrak{G}$ liegt. Läuft z in $\overline{\mathfrak{G}}$, so schreiben wir $\overline{\mathfrak{G}}_z$ statt $\overline{\mathfrak{G}}$; läuft dagegen $\bar{z}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$, so erhalten wir $\overline{\mathfrak{G}}_{\bar{z}}$. Ist schließlich $\mathfrak{G}_z^{(1)}$ ein Gebiet im z-Raum, $z = (z_1, \ldots, z_p)$, und $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ ein Gebiet im w-Raum, $w = (w_1, \ldots, w_q)$, so sei $\mathfrak{G}_{zw}^{(1,2)} = \mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{G}_w^{(2)}$ das Produktgebiet, welches aus allen Punkten des (z, w)-Raumes besteht — $(z, w) = (z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q)$ —, für die z in $\mathfrak{G}_z^{(1)}$ und w in $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ liegt.

Gemäß der Definition von $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ durch die Beziehung (0.8) ist

$$(0.9) \qquad \overline{K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})} = K_{\mathfrak{G}}(\zeta, \bar{z})$$

und

(0.10) $$K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{z}) = K_{\mathfrak{G}}(z).$$

Dabei ist $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ im Punkte $(z, \bar{\zeta})$ des Gebietes $\mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\zeta}}$ und $K_{\mathfrak{G}}(\zeta, \bar{z})$ im Bildpunkt $(\zeta, \bar{z})$ im Gebiet $\mathfrak{G}_{\zeta} \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar{z}}$ zu nehmen. Die linke Seite von (0.10) liefert den Wert der Kernfunktion auf der Diagonalfläche $\bar{\zeta} = \bar{z}$ des Gebietes $\mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\zeta}}$.

Mit Hilfe der Kernfunktion gewinnt man eine *Integraldarstellung* für jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{Q}$:

(0.11) $$f(z) = \int\limits_{\mathfrak{G}_{\zeta}} K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta)\, d\omega_{\zeta},$$

$$(d\omega_{\zeta} = d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2 \ldots d\xi_p\, d\eta_p, \quad d\zeta_k = d\xi_k + i\, d\eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p),$$

woraus sich die Fourierkoeffizienten c_k in der Entwicklung (0.6) zu

(0.12) $$c_k = \int\limits_{\mathfrak{G}_{\zeta}} \overline{p_k(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\omega_{\zeta}$$

ergeben.

Bei mehreren Veränderlichen ist nicht jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ Holomorphiegebiet, vielmehr gibt es ein größtes, $\mathfrak{G}$ umfassendes Gebiet $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, die *Holomorphiehülle von* $\mathfrak{G}$, in der alle in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktionen gleichfalls noch holomorph sind[2]). $\mathfrak{H}$ ist selbst ein Holomorphiegebiet. Ist $\mathfrak{G}$ beschränkt, so ist auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ beschränkt. Dagegen braucht $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ *global nicht schlicht* zu sein, wenn $\mathfrak{G}$ schlicht ist. Wohl aber ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ *lokal schlicht*, wenn $\mathfrak{G}$ schlicht ist.

Alle in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen $f(z)$ lassen sich in die Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ holomorph fortsetzen. Hier tritt nun zunächst die Frage auf: sind die Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{Q}$ auch noch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ quadratintegrierbar? Wir werden im § 1 an Beispielen Reinhardtscher Gebiete $\mathfrak{G}$ im R^4 zeigen, daß es Fälle gibt, bei denen jede in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbare Funktion $f(z)$ auch noch in der Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ quadratintegrierbar ist, während bei anderen Gebieten dies nicht zutrifft. Ferner werden wir sehen, daß Kern und Kernfunktion von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ im allgemeinen in keinem unmittelbaren Zusammenhang stehen, gleichgültig, ob die Menge $\mathfrak{Q}$ der in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen mit der entsprechenden Menge in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ übereinstimmt oder nicht. Darüber hinaus werden wir aber bei den Reinhardtschen Gebieten in ganz elementarer Weise Aussagen über die Fortsetzung des Kernes, der Kernfunktion und der damit zusammenhängenden Relationen gewinnen, die wir dann anschließend für beliebige Gebiete beweisen werden.

Da alle Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{Q}$ auch noch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ holomorph sind, wird man vermuten, daß dies auch für die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ im Produktgebiet $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z) \times \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\zeta}})$ gilt und daß dann auch der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ reellanalytisch ist. In § 2 werden wir dies mit Hilfe eines bekannten Satzes von Hartogs bestätigen. § 3 ist dem Studium der Frage gewidmet, welche Konsequenzen die Möglichkeit der Fortsetzung des Kernes eines Gebietes $\mathfrak{G}$ für die Fortsetzung der in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen und der Kernfunktion von $\mathfrak{G}$ hat. Hier wird sich die überraschende Tatsache ergeben, daß

[2]) Siehe H. Behnke u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. 3, 3 (1934).

die Fortsetzbarkeit des Kernes nicht nur die Fortsetzbarkeit aller quadratintegrierbaren Funktionen nach sich zieht, sondern auch die Gültigkeit aller Beziehungen (0.1) *bis* (0.12) *einschließlich der dabei auftretenden Ungleichungen.* Wenngleich der Kern eines Gebietes $\mathfrak{G}$ stets in der Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ noch reell-analytisch ist, so wird sich doch zeigen, daß er nicht beliebig über $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ hinaus fortsetzbar ist. Vielmehr wird sich in § 4 ergeben, daß er niemals über die Außenhülle $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ hinaus fortgesetzt werden kann. Dies läßt sich dadurch beweisen, daß man das Randverhalten des Kernes von analytischen Polyedern studiert, wobei sich ergibt, daß bei Annäherung an den Rand der Kern stets über alle Grenzen wächst. Da man $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von Außen durch solche Polyeder approximieren kann, so schließt man leicht mit Hilfe der bereits gewonnenen Beziehungen auf die angegebene Aussage[3]).

§ 1. Die Kernfunktion bei Reinhardtschen Gebieten

Für Reinhardtsche Gebiete lassen sich die Eigenschaften des Kernes bei analytischer Fortsetzung elementar gewinnen. Sie liefern ein gutes Beispielmaterial und sollen daher hier kurz behandelt werden.

Bei allen schlichten, beschränkten Reinhardtschen Gebieten $\mathfrak{G}$ im R^4 mit dem Nullpunkt als Zentrum[4]) bilden die Monome $z_1^m z_2^n$, $m, n \gtrless 0$, *soweit sie in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbar sind*, ein Orthogonalsystem. Ist $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ und $\mathfrak{G}_p$ die Projektion von $\mathfrak{G}$ in den (r_1, r_2)-Quadranten, so ist das Quadratintegral des Monomes $z_1^m z_2^n$ durch

$$a_{mn}^2 = \int\limits_{\mathfrak{G}} |z_1|^{2m} |z_2|^{2n} \, d\omega = 4\pi^2 \int\limits_{\mathfrak{G}_p} r_1^{2m+1} r_2^{2n-1} \, dr_1 dr_2 , \qquad a_{mn} > 0, \tag{1.1}$$

gegeben, und die Funktionen

$$\varphi_{mn}(z_1, z_2) = \frac{z_1^m z_2^n}{a_{mn}}, \tag{1.2}$$

für die die a_{mn} endlich sind, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{G}$[5]). Gemäß (0.6) und (1.2) sind genau diejenigen Funktionen $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar, für deren Laurententwicklung in $\mathfrak{G}$:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n} b_{mn} z_1^m z_2^n \tag{1.3}$$

die Ungleichung

$$\sum_{m,n} |a_{mn} b_{mn}|^2 < \infty \tag{1.4}$$

besteht.

---

[3]) Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit findet sich in der Dissertation: J. Mehring: Kernfunktion und Regularitätsgebiete im Raum von zwei komplexen Veränderlichen. Dissertationen der Math.-Naturw. Fakultät der Universität Münster in Referaten. Heft 4 (1954). Siehe auch: H. J. Bremermann: Holomorphic Continuation of the Kernel Function and the Bergman metric in Several Complex Variables. Lectures on Functions of a Complex Variable. The University of Michigan Press (1955).

[4]) Man versteht hierunter solche Gebiete $\mathfrak{G}$ im R^4, die mit einem Punkt (z_1, z_2) auch alle Punkte $(z_1 e^{i\varphi_1}, z_2 e^{i\varphi_2})$ enthalten. Sie lassen sich daher durch ihre Projektionen $\mathfrak{G}_p$ im Quadranten $|z_1| \geq 0$, $|z_2| \geq 0$ der $(|z_1|, |z_2|)$-Ebene darstellen.

[5]) Siehe S. Bergman, a. a. O.

Mit $\mathfrak{G}$ ist auch die Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ ein schlichtes Reinhardtsches Gebiet[6]). Bezeichnet man die Koeffizienten (1.1) bezüglich $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ mit a^*_{mn}, so gilt trivialerweise

$$a_{mn} \leqq a^*_{mn} \tag{1.5}$$

für alle m, n, für die a^*_{mn} endlich ist. Darüber hinaus folgt

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ ein Reinhardtsches Gebiet im R^4 mit dem Nullpunkt als Zentrum und $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ seine Holomorphiehülle, so sind sämtliche in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen $f(z_1, z_2)$ genau dann auch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ quadratintegrierbar, wenn eine feste positive Zahl k existiert, so daß*

$$a^*_{mn} \leqq k\, a_{mn} \tag{1.6}$$

für alle m, n ist, für die a_{mn} endlich ist. Dabei sind a_{mn} und a^*_{mn} durch die Integrale

$$a^2_{mn} = \int\limits_{\mathfrak{G}} |z_1|^{2m}\, |z_2|^{2n}\, d\omega, \qquad a^{*2}_{mn} = \int\limits_{\mathfrak{H}(\mathfrak{G})} |z_1|^{2m}\, |z_2|^{2n}\, d\omega$$

gegeben.

Zum Beweise sei $f(z_1, z_2)$ eine Funktion aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G})$ und

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n} b_{mn} z_1^m z_2^n$$

ihre Laurententwicklung um den Nullpunkt. Dann folgt aus (1.4) und der Existenz der Zahl k gemäß (1.6) die Relation

$$\sum_{m,n} |a^*_{mn}\, b_{mn}|^2 < \infty \tag{1.7}$$

und damit in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ die Quadratintegrierbarkeit jeder in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktion.

Gibt es dagegen keine Zahl k, für die die Beziehung (1.6) gilt, so ist entweder bereits eines der a^*_{mn} nicht endlich, oder aber man kann leicht Zahlen b_{mn} finden, so daß zwar (1.4), aber nicht (1.7) gilt. Und dies besagt die Existenz einer in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktion, die nicht in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ quadratintegrierbar ist.

An Hand einfacher Beispiele läßt sich zeigen, daß *beide Fälle möglich* sind. $\mathfrak{G}$ sei ein Reinhardtsches Gebiet, das den Dizylinder $\mathfrak{D}$: $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, als Holomorphiehülle hat: $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$. Dann ist

$$a^{*2}_{mn} = \int\limits_{\mathfrak{H}} |z_1|^{2m}\, |z_2|^{2n}\, d\omega = \frac{\pi^2}{(m+1)(n+1)}, \qquad m \geqq 0,\ n \geqq 0. \tag{1.8}$$

Ist nun $\mathfrak{G}$ ein Gebiet, das auf jeder der beiden Achsen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ mindestens einen Punkt enthält und eine Punktmenge: $0 < \alpha < |z_1| < 1$, $0 < \alpha < |z_2| < 1$, umfaßt, so hat man

$$\begin{aligned} a^2_{mn} &> \frac{\pi^2}{(m+1)(n+1)} [1 - \alpha^{2m+2}]\,[1 - \alpha^{2n+2}] \\ &\geqq \frac{\pi^2}{(m+1)(n+1)} (1 - \alpha^2)^2, \qquad\qquad m, n \geqq 0, \end{aligned}$$

[6]) Siehe S. Bochner u. W. T. Martin: Several Complex Variables. Princeton University Press (1948), V, § 4.

und damit ein Beispiel für den ersten Fall. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ ein Gebiet, das die Punkte $0 < \alpha < |z_1| < |z_2| < 1$ nicht enthält, im übrigen aber $\mathfrak{D}$ als Hülle besitzt, so hat man

$$\begin{aligned} a_{mn}^2 &\leqq \frac{\pi^2}{(m+1)(n+1)} - 4\pi^2 \int_\alpha^1 \int_\alpha^{r_2} r_1^{2m+1} r_2^{2n+1}\, dr_1\, dr_2 \\ &= \frac{\pi^2}{(m+1)(n+1)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{n+1}{m+n+2} + \alpha^{2m+2} - \alpha^{2m+2n+4} + \frac{n+1}{m+n+2}\,\alpha^{2m+2n+4}\right]. \end{aligned}$$

Der rechts stehende Faktor wird nun z. B. für $n = m^2$, $m \to \infty$, beliebig klein, und man hat so ein Beispiel für den zweiten Fall.

Die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ ist bei Reinhardtschen Gebieten durch die Reihe

$$K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta) = \sum_{m,n} \frac{z_1^m z_2^n \bar\zeta_1^m \bar\zeta_2^n}{a_{mn}^2} \tag{1.9}$$

gegeben. Ist jetzt $\mathfrak{G}$ ein solches Gebiet, das den Dizylinder $\mathfrak{D}$ als Hülle hat: $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, so ist $m, n \geqq 0$. Außerdem gibt es in beliebiger Nähe der Bestimmungsfläche: $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ von $\mathfrak{D}$ Punkte $z = (z_1, z_2)$ in $\mathfrak{G}$, so daß $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ in $(z, \bar z)$ konvergiert. Daher konvergiert die Reihe (1.9) gleichmäßig in jedem Polyzylinder: $|z_1| < \Theta$, $|z_2| < \Theta$, $|\bar\zeta_1| < \Theta$, $|\bar\zeta_2| < \Theta$, $\Theta < 1$, und liefert dort die analytische Fortsetzung von $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$. Wir sehen hier:

Die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ läßt sich aus dem Gebiet $\mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar\zeta}$ in das Produktgebiet $\mathfrak{H}_z(\mathfrak{G}) \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar\zeta}(\mathfrak{G})$ der Hüllen holomorph fortsetzen, und die Darstellung (1.9) *gilt auch noch in diesem Produktgebiet.*

Eine unmittelbare Folge dieses Ergebnisses ist die Aussage, daß *der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ in die Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ reell-analytisch fortsetzbar ist und daß die in $\mathfrak{G}$ geltende Beziehung*

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \sum_{m,n} \left|\frac{z_1^m z_2^n}{a_{mn}}\right|^2 \tag{1.10}$$

für die Fortsetzung in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ fortbesteht.

Wegen (1.5) hat man zwischen dem Kern von $\mathfrak{G}$ und dem von $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{G}$ die Beziehung

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \sum_{m,n} \left|\frac{z_1^m z_2^n}{a_{mn}}\right|^2 \geqq \sum_{m,n} \left|\frac{z_1^m z_2^n}{a_{mn}^*}\right|^2 = K_{\mathfrak{H}(\mathfrak{G})}(z), \tag{1.11}$$

und wir bemerken, daß auch *diese Relation überall in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ gilt.*

Man kann unschwer die vorstehenden Resultate auf beliebige beschränkte Reinhardtsche Gebiete und ihre Hüllen ausdehnen, indem man in den Gebieten kreissymmetrische Teilgebiete: $|z_1| < a_1$ oder $b_1 < |z_1| < c_1$; $|z_2| < a_2$ oder $b_2 < |z_2| < c_2$, betrachtet und in ihnen die dort auftretenden Laurentreihen untersucht.

Im Dizylinder lautet gemäß (1.8) und (1.11) der Kern:

$$K_{\mathfrak{D}}(z) = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{(1-|z_1|^2)^2(1-|z_2|^2)^2}\,. \tag{1.12}$$

Bei Annäherung an den Rand geht $K_{\mathfrak{D}}(z)$ über alle Grenzen. Der Dizylinder ist also das genaue Existenzgebiet des Kernes. Gleiches gilt wegen der Relation (1.11) für den Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ eines Gebietes $\mathfrak{G}$, das $\mathfrak{D}$ als Hülle hat. Aber nicht immer ist das größte, $\mathfrak{G}$ umfassende Gebiet $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, in dem der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ noch reell-analytisch ist, gleich der Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, vielmehr kann es die Hülle echt enthalten. Entfernt man z. B. aus dem Dizylinder $\mathfrak{D}$ die Achsen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, so erhält man ein Reinhardtsches Gebiet $\mathfrak{G}$, in dem sämtliche Monome $z_1^m z_2^n$, $m, n \gtrless 0$, holomorph, aber nur diejenigen quadratintegrierbar sind, für die $m, n \geqq 0$ ist. Deren Integrale über $\mathfrak{G}$ sind gleich den Integralen über $\mathfrak{D}$. Daher stimmen die quadratintegrierbaren Funktionen in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ und folglich auch die Orthonormalsysteme überein, und es ist insbesondere $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta}) = K_{\mathfrak{D}}(z, \zeta)$ und $K_{\mathfrak{G}}(z) = K_{\mathfrak{D}}(z)$. $\mathfrak{G}$ ist Holomorphiegebiet, also $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Dagegen ist das Existenzgebiet des Kernes $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}$. $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ ist in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ echt enthalten. Wir haben somit nur die Relation

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{G}). \tag{1.13}$$

$\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ unterscheiden sich hier nur um 2-dimensionale Flächenstücke. Ob sich $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ um ein 4-dimensionales Stück unterscheiden kann, ist nicht bekannt.

Als *Außenhülle* $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ eines Gebietes $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller Holomorphiegebiete, in denen $\mathfrak{G}$ kompakt enthalten ist. $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ ist selbst Holomorphiegebiet, und es gilt trivialerweise $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$[7]. Wir werden zeigen, daß stets die Relation $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ gilt. In dem vorstehend genannten Beispiel eines Dizylinders, aus dem die Achsen entfernt wurden, ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D} = \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ kann sich indessen von $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ um ein volles 4-dimensionales Stück unterscheiden. Dies zeigt das Reinhardtsche Gebiet $\mathfrak{G}$: $0 \leqq |z_1| < |z_2| < 1$. In ihm lautet die Kernfunktion, wie man leicht aus (1.9) und (1.1) nachrechnet:

$$K_{\mathfrak{G}}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^2} \frac{z_2 \bar{\zeta}_2}{(z_2 \bar{\zeta}_2 - z_1 \bar{\zeta}_1)^2 (1 - z_2 \bar{\zeta}_2)^2}$$

und der Kern demnach

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{|z_2|^2}{(|z_2|^2 - |z_1|^2)^2 (1 - |z_2|^2)^2}.$$

$\mathfrak{G}$ ist also Existenzgebiet des Kernes: $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Dagegen ist die Außenhülle der Dizylinder: $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}$. So haben wir die Relationen

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G}), \tag{1.14}$$

und durch Beispiele ist belegt, daß weder zwischen $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ noch zwischen $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ das Gleichheitszeichen zu stehen braucht. Wir werden im folgenden die Beziehung (1.14) für beliebige beschränkte, schlichte Gebiete beweisen und aus dem Verhalten des Kernes auf die Fortsetzungseigenschaften aller in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen schließen.

---

[7]) Ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$, so bezeichnet man $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ auch als *Nebenhülle* von $\mathfrak{G}$ [siehe: H. Behnke u. P. Thullen, a. a. O.].

§ 2. Kernfunktion und Holomorphiehülle

Wir zeigen zunächst, daß der Kern eines Gebietes $\mathfrak{G}$ stets in die Holomorphiehülle $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ reell-analytisch und die Kernfunktion nach $\mathfrak{H}_z \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar{\zeta}}$ holomorph fortgesetzt werden können.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{G}$ sei ein beschränktes, schlichtes Gebiet im z-Raume, $z = (z_1, \ldots, z_p)$. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ sei die Holomorphiehülle von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{H}}$ die Holomorphiehülle von $\overline{\mathfrak{G}}$:*

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{G}}). \tag{2.1}$$

Die Funktion $f(z)$ sei in $\mathfrak{G}$ holomorph. Dann ist $\overline{f(\bar{z})} = f^*(z)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ holomorph, also auch in $\mathfrak{H}$. $\overline{f^*(\bar{z})} = f(z)$ ist folglich in $\overline{\mathfrak{H}}$ holomorph, und es ist daher

$$\overline{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{G}}).$$

Andererseits habe $g(z)$ die Holomorphiehülle $\mathfrak{H}$ als Existenzgebiet. Dann hat $\overline{g(\bar{z})} = g^*(z)$ als Existenzgebiet $\overline{\mathfrak{H}}$. Da $g(z)$ in $\mathfrak{G}$ holomorph ist, ist $g^*(z)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ holomorph, also auch in $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{G}})$, und es folgt

$$\overline{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{G}}).$$

So ergibt sich (2.1).

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{G}_z^{(1)}$ sei ein beschränktes, schlichtes Gebiet im Raume der Veränderlichen $z = (z_1, \ldots, z_p)$ und $\mathfrak{G}_w^{(2)}$ ein solches Gebiet im Raume der Veränderlichen $w = (w_1, \ldots, w_q)$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{G}_w^{(2)}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)}). \tag{2.2}$$

Die Funktion $f(z,w)$ sei in $\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{G}_w^{(2)}$ holomorph. Dann ist sie bei festgehaltener Veränderlichen z als Funktion von w in $\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$ holomorph und daher nach einem bekannten Satz von Hartogs[8]) als Funktion von z *und* w in $\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$ holomorph. Nach dem gleichen Schluß mit festgehaltener Veränderlichen w aus $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$ ist sie auch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$ als Funktion von z und w holomorph. Also gilt

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{G}_w^{(2)}) \supset \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)}).$$

Sind $f(z)$ und $g(w)$ zwei Funktionen, die $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)})$ bzw. $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$ als ihre Existenzgebiete haben, so hat $F(z, w) = f(z) \cdot g(w)$ das Existenzgebiet $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$, woraus

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)} \times \mathfrak{G}_w^{(2)}) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_z^{(1)}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{G}_w^{(2)})$$

und damit (2.2) folgt.

Eine unmittelbare Folge dieser Hilfssätze ist

Satz 2. *$\mathfrak{G}$ sei ein schlichtes, beschränktes Gebiet und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ seine Holomorphiehülle. Dann ist die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ im Produktgebiet $\mathfrak{H}_{z\bar{\zeta}} = \mathfrak{H}_z \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar{\zeta}}$ als Funktion der Veränderlichen z und $\bar{\zeta}$ holomorph. Der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ ist in $\mathfrak{H}$ reell-wertig und reell-analytisch.*

Ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ die Kernhülle von $\mathfrak{G}$, d. h. das größte, $\mathfrak{G}$ umfassende Gebiet, in dem $K_{\mathfrak{G}}(z)$ noch reell-analytisch ist, so gilt also

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{G}). \tag{2.3}$$

---

[8]) S. Bochner u. W. T. Martin, a. a. O., S. 139.

Zum Beweis ist zu bemerken, daß $\overline{\mathfrak{H}}_{\bar\zeta}$ nach Hilfssatz 1 die Holomorphiehülle von $\overline{\mathfrak{G}}_{\bar\zeta}$ im $\bar\zeta$-Raume und $\mathfrak{H}_{z\bar\zeta} = \mathfrak{H}_z \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar\zeta}$ nach Hilfssatz 2 die Holomorphiehülle von $\mathfrak{G}_{z\bar\zeta} = \mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar\zeta}$ im $(z, \bar\zeta)$-Raume ist. $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ ist in $\mathfrak{G}_{z\bar\zeta}$ und damit auch in $\mathfrak{H}_{z\bar\zeta}$ holomorph.

Die Beziehung $\overline{K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)} = K_{\mathfrak{G}}(\zeta, \bar z)$, die für die einander entsprechenden Punkte der Gebiete $\mathfrak{G}_{z\bar\zeta} = \mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar\zeta}$ und $\mathfrak{G}_{\zeta\bar z} = \mathfrak{G}_\zeta \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar z}$ besteht, bleibt wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung auch in den Hüllen $\mathfrak{H}_{z\bar\zeta} = \mathfrak{H}_z \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar\zeta}$ und $\mathfrak{H}_{\zeta\bar z} = \mathfrak{H}_\zeta \times \overline{\mathfrak{H}}_{\bar z}$ erhalten. Für den Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$, der sich wegen der Fortsetzbarkeit von $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ in $\mathfrak{H}_{z\bar\zeta}$ nach $\mathfrak{H}_z$ reell-analytisch fortsetzt, gilt also dort überall die Gleichung $\overline{K_{\mathfrak{G}}(z)} = K_{\mathfrak{G}}(z)$. Er ist somit in $\mathfrak{H}$ reellwertig und reell-analytisch.

Wir werden im folgenden sehen, daß der Kern sogar bei jeder möglichen Fortsetzung, also insbesondere in $\mathfrak{H}$, positiv bleibt.

§ 3. Der Kern und seine analytische Fortsetzung

Wir sahen, daß sich der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ stets in die Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ und — wie wir am Beispiel der Reinhardtschen Gebiete erkannten — gegebenenfalls sogar darüber hinaus fortsetzen läßt. Wir wollen nun aus der Fortsetzung des Kernes auf die gleichzeitige Fortsetzbarkeit aller in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen und der Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ schließen, wobei alle in $\mathfrak{G}$ geltenden Beziehungen (0.2) bis (0.4) und (0.6) bis (0.12) erhalten bleiben. Es gilt der grundlegende

Satz 3. *$\mathfrak{G}$ sei ein schlichtes, beschränktes Gebiet über dem z-Raume, $z = (z_1, \ldots, z_p)$, welches enthalten sei in einem lokal schlichten Gebiet $\mathfrak{G}_0$. Der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ sei nach $\mathfrak{G}_0$ eindeutig reell-analytisch fortsetzbar. Dann ist jede in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbare Funktion in $\mathfrak{G}_0$ und die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$ in $\mathfrak{G}_{0z} \times \overline{\mathfrak{G}}_{0\bar\zeta}$ beliebig holomorph fortsetzbar, und die in $\mathfrak{G}$ geltenden Beziehungen* (0.2) *bis* (0.4) *und* (0.6) *bis* (0.12) *sind auch in $\mathfrak{G}_0$ gültig.*

Wir führen den Beweis für $p = 2$, bemerken jedoch, daß er für $p > 2$ in der gleichen Weise geführt werden kann.

Zu jedem Punkt von $\mathfrak{G}_0$ führt eine Kurve $\mathfrak{C}$, die in einem Punkt von $\mathfrak{G}$ beginnt und längs der der Kern $K_{\mathfrak{G}}(z)$ nach Voraussetzung reell-analytisch fortgesetzt werden kann. $K_{\mathfrak{G}}(z)$ läßt sich daher um jeden Punkt von $\mathfrak{G}_0$ in eine Potenzreihe entwickeln, die in komplexer Form geschrieben werden kann:

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \sum_{k,l,m,n} K_{kl\bar m\bar n}(z_1 - z_1^*)^k (z_2 - z_2^*)^l (\bar z_1 - \bar z_1^*)^m (\bar z_2 - \bar z_2^*)^n, \tag{3.1}$$

wobei

$$K_{kl\bar m\bar n} = \frac{1}{k!\,l!\,m!\,n!} \left.\frac{\partial^{k+l+m+n} K_{\mathfrak{G}}(z)}{\partial z_1^k \partial z_2^l \partial \bar z_1^m \partial \bar z_2^n}\right|_{z = z^*}, \qquad k, l, m, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

und $z^* = (z_1^*, z_2^*)$ der Grundpunkt des Entwicklungspunktes auf $\mathfrak{C}$ ist.

Ersetzt man in (3.1) $\bar z_1$ und $\bar z_2$ durch $\bar\zeta_1$ und $\bar\zeta_2$, so erhält man eine Potenzreihe in $z_1, z_2, \bar\zeta_1$ und $\bar\zeta_2$, die in einem Polyzylinder $|z_1 - z_1^*| \leq R$, $|z_2 - z_2^*)| \leq R$, $|\bar\zeta_1 - \bar z_1^*| \leq R$, $|\bar\zeta_2 - \bar z_2^*| \leq R$ absolut gleichmäßig konvergiert. Im $(z_1, z_2, \bar\zeta_1, \bar\zeta_2)$-Raum liefern daher die so gewonnenen Reihen in der Umgebung der Diagonalfläche $\bar\zeta_1 = \bar z_1$, $\zeta_2 = \bar z_2$ des Gebietes $\mathfrak{G}_{0z} \times \overline{\mathfrak{G}}_{0\bar\zeta}$ eine holomorphe Funktion der

Variablen $z_1, z_2, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2$, die in der Umgebung der Diagonalfläche im Gebiet $\mathfrak{G}_z \times \overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\zeta}}$ mit der Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ übereinstimmt; denn diese hat dort die Entwicklungen:

$$(3.3) \qquad K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l,m,n} K_{kl\bar{m}\bar{n}} (z_1 - z_1^*)^k (z_2 - z_2^*)^l (\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1^*)^m (\bar{\zeta}_2 - \overline{z_2^*})^n$$

mit

$$(3.4) \qquad K_{kl\bar{m}\bar{n}} = \frac{1}{k!\,l!\,m!\,n!} \frac{\partial^{k+l+m+n} K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})}{\partial z_1^k \partial z_2^l \partial \bar{\zeta}_1^m \partial \bar{\zeta}_2^n} \Bigg|_{(z,\bar{\zeta}) = (z^*, \overline{z^*})}$$

$$= \frac{1}{k!\,l!\,m!\,n!} \frac{\partial^{k+l+m+n} K_{\mathfrak{G}}(z)}{\partial z_1^k \partial z_2^l \partial \bar{z}_1^m \partial \bar{z}_2^n} \Bigg|_{z = z^*}, \qquad k, l, m, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ist nun z^* ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{G}_0$, so verbinde man ihn durch eine Kurve $\mathfrak{C}$ mit einem Punkt z_0 aus $\mathfrak{G}$ und überdecke das Bild von $\mathfrak{C}$ auf der Diagonalfläche $\bar{\zeta}_1 = \bar{z}_1$, $\bar{\zeta}_2 = \bar{z}_2$ im $(z, \bar{\zeta})$-Raum durch endlich viele Polyzylinder $\mathfrak{P}_\nu$:

$$|z_1 - z_1^{(\nu)}| < R_\nu, \quad |z_2 - z_2^{(\nu)}| < R_\nu, \quad |\bar{\zeta}_1 - \overline{z_1^{(\nu)}}| < R_\nu, \quad |\bar{\zeta}_2 - \overline{z_2^{(\nu)}}| < R_\nu,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, r,$$

so daß $(z^{(0)}, \overline{z^{(0)}}) = (z_0, \bar{z}_0)$ und $(z^{(r)}, \overline{z^{(r)}}) = (z^*, \bar{z}^*)$ ist und jeder Punkt $(z^{(\nu)}, \overline{z^{(\nu)}})$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, im Polyzylinder $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ liegt. Man fasse nun zunächst den Punkt $(z^{(0)}, \overline{z^{(0)}})$ und den Polyzylinder $\mathfrak{P}_0$ ins Auge. In einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von $(z^{(0)}, \overline{z^{(0)}})$ wird die Kernfunktion $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$ mittels irgendeines vollständigen Orthonormalsystems $p_1(z), p_2(z), \ldots$ aus $\mathfrak{G}$ dargestellt durch die gleichmäßig konvergente Reihe

$$(3.5) \qquad K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z) \overline{p_i(\zeta)}.$$

Daher lauten die Entwicklungskoeffizienten (3.4) für den Punkt $(z^{(0)}, \overline{z^{(0)}})$, die mit $K^{(0)}_{kl\bar{m}\bar{n}}$ bezeichnet werden mögen,

$$(3.6) \qquad K^{(0)}_{kl\bar{m}\bar{n}} = \sum_{i=1} p^{(0)}_{i,kl} \cdot \overline{p^{(0)}_{i,mn}}$$

mit

$$(3.7) \qquad p^{(0)}_{i,kl} = \frac{\partial^{k+l} p_i(z)}{k!\,l!\,\partial z_1^k \partial z_2^l} \Bigg|_{z = z^{(0)}}.$$

Für jedes R mit $0 < R < R_0$ ist wegen der Konvergenz von (3.3) in $\mathfrak{P}_0$ die Reihe

$$\sum_{k,l,m,n} |K^{(0)}_{kl\bar{m}\bar{n}}| R^{k+l+m+n} = \sum_{j=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{k+l+m+n=j} |K^{(0)}_{kl\bar{m}\bar{n}}| \Bigr) R^j$$

konvergent. Insbesondere gibt es eine positive Zahl A, so daß für alle j:

$$(3.8) \qquad \sum_{k+l+m+n=j} |K^{(0)}_{kl\bar{m}\bar{n}}| < \frac{A}{R^j}$$

ist. Da nun für $m = k$, $n = l$:

$$(3.9) \qquad K^{(0)}_{kl\bar{k}\bar{l}} = \sum_{i=1}^{\infty} |p^{(0)}_{i,kl}|^2$$

ist, so ist $K^{(0)}_{kl\bar{k}\bar{l}}$ nicht negativ, und es gilt daher:

$$\sum_{k+l=j} |K^{(0)}_{kl\bar{k}\bar{l}}| = \sum_{k+l=j} K^{(0)}_{kl\bar{k}\bar{l}} = \sum_{k+l=j} \sum_{i=1}^{\infty} |p^{(0)}_{i,kl}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k+l=j} |p^{(0)}_{i,kl}|^2.$$

Folglich hat man wegen (3.8):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right|^2 < \frac{A}{R^{2j}}, \tag{3.10}$$

also erst recht:

$$\sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right|^2 < \frac{A}{R^{2j}}$$

für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots$. Wendet man hierauf die Schwarzsche Ungleichung an, so erhält man:

$$\sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right| < \sqrt{j+1}\, \frac{\sqrt{A}}{R^j}. \tag{3.11}$$

Hieraus ergibt sich nun die Holomorphie aller Funktionen $p_i(z)$ im Dizylinder $\mathfrak{D}_0$: $|z_1 - z_1^{(0)}| < R_0$, $|z_2 - z_2^{(0)}| < R_0$. Man hat in $z^{(0)}$ die Entwicklung

$$p_i(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} p_{i,kl}^{(0)} (z_1 - z_1^{(0)})^k (z_2 - z_2^{(0)})^l. \tag{3.12}$$

Für $|z_1 - z_1^{(0)}| < \vartheta R$, $|z_2 - z_2^{(0)}| < \vartheta R$, $0 < \vartheta < 1$, ist dann

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=0}^{\infty} \left|p_{i,kl}^{(0)} (z_1 - z_1^{(0)})^k (z_2 - z_2^{(0)})^l\right| &< \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right| \vartheta^j R^j\Big) \\ &< \sum_{j=0} \sqrt{j+1}\, \sqrt{A}\, \vartheta^j,\end{aligned}$$

woraus die *absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe* (3.12) *im Innern von* $\mathfrak{D}_0$ *folgt, wo demnach* $p_i(z)$ *holomorph ist.*

Man kann weiter schließen, daß im *Innern von* $\mathfrak{D}_0$ *auch* $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i(z)|^2$ *gleichmäßig konvergiert*, folglich dort reell-analytisch ist und daher *mit* $K_{\mathfrak{S}}(z)$ *übereinstimmt:*

Für $|z_1 - z_1^{(0)}| < \vartheta R$, $|z_2 - z_2^{(0)}| < \vartheta R$, $0 < \vartheta < 1$, ist nämlich

$$\begin{aligned}|p_i(z)| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k+l=j} p_{i,kl}^{(0)} (z_1 - z_1^{(0)})^k (z_2 - z_2^{(0)})^l\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right| R^j \vartheta^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{(j+1) \sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right|^2}\, R^j \vartheta^j,\end{aligned} \tag{3.13}$$

wobei wiederum die Schwarzsche Ungleichung herangezogen wurde. Sodann folgt aus (3.10), daß

$$\sum_{k+l=j} \left|p_{i,kl}^{(0)}\right|^2 = \frac{A_i}{R^{2j}}, \tag{3.14}$$

mit $0 \leq A_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} A_i < A$ ist. Daher können wir aus (3.13) und (3.14) folgern:

$$|p_i(z)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{j+1}\, \sqrt{A_i}\, \vartheta^j < \sqrt{A_i}\, \frac{1}{(1-\vartheta)^{3/2}},$$

also

$$|p_i(z)|^2 < A_i \frac{1}{(1-\vartheta)^3},$$

woraus sich wegen $\sum_{i=1}^{\infty} A_i < A$ die Behauptung ergibt.

Ist V der Lebesguesche Inhalt des Gebietes $\mathfrak{G}$, so kann man die Konstante $\frac{1}{\sqrt{V}}$ als Funktion $p_1(z)$ wählen. Hieraus folgt, daß $K_{\mathfrak{G}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} |p_i(z)|^2$ *überall in* $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ *positiv* ist.

Da *irgendeine in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbare nicht identisch verschwindende Funktion* $f(z)$ nach einer vorgenommenen Normierung als Funktion $p_1(z)$ eines vollständigen Orthonormalsystems gewählt werden kann, so ist jede solche Funktion *nach* $\mathfrak{D}_0$ *holomorph fortsetzbar. Und die in* $\mathfrak{G}$ *gültige Darstellung* nach irgendeinem Orthonormalsystem $\{p_i(z)\}$:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i(z), \quad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty, \tag{3.15}$$

besteht nach der Schwarzschen Ungleichung wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i(z)|^2$ im Innern von $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ *auch in* $\mathfrak{D}_0$ *fort, und die Reihe konvergiert gleichmäßig im Innern von* $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$.

Ebenso folgt: *Die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(z)\,\overline{p_i(\zeta)}$ *konvergiert gleichmäßig im Innern von* $(\mathfrak{G}_z \cup \mathfrak{D}_{0z}) \times (\mathfrak{G}_{\bar\zeta} \cup \overline{\mathfrak{D}}_{0\bar\zeta})$ *und liefert dort die analytische Fortsetzung von* $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)$:

$$K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z)\,\overline{p_i(\zeta)}. \tag{3.16}$$

Dieses Ergebnis kann dazu benutzt werden, die *Integraldarstellung einer in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbaren Funktion* $f(z)$ *in* $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ zu gewinnen:

$$f(z) = \int_{\mathfrak{G}_\zeta} K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)\, f(\zeta)\, d\omega_\zeta. \tag{3.17}$$

Es ist nämlich wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i(z)|^2$ in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ die Kernfunktion $\overline{K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)}$ in $\mathfrak{G}_\zeta$ als Funktion von ζ quadratintegrierbar, und es gilt, wenn $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ die Darstellung (3.15) hat, in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$:

$$\int_{\mathfrak{G}_\zeta} K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)\, f(\zeta)\, d\omega_\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z) \int_{\mathfrak{G}_\zeta} \overline{p_i(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\omega_\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, p_i(z).$$

Diese Reihe stellt aber auch in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ die Funktion $f(z)$ dar.

Die Formel (3.17) ist insofern von besonderer Bedeutung, als sie die *explizite Fortsetzung einer in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbaren Funktion* $f(z)$ *nach* $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ liefert, wenn die Fortsetzung der Kernfunktion nach $(\mathfrak{G}_z \cup \mathfrak{D}_{0z}) \times (\mathfrak{G}_{\bar\zeta} \cup \overline{\mathfrak{D}}_{0\bar\zeta})$ gegeben ist.

Es wurde bereits bemerkt, daß in $\mathfrak{G}_\zeta$ die Kernfunktion $\overline{K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)}$ quadratintegrierbar ist. Das Integral läßt sich leicht berechnen:

$$\int_{\mathfrak{G}_\zeta} |K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)|^2 d\omega_\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} |p_i(z)|^2 = K_{\mathfrak{G}}(z)\,. \tag{3.18}$$

Hieraus und aus der Integraldarstellung (3.17) folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung auch in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ die Beziehung:

$$|f(z)|^2 \leqq K_{\mathfrak{G}}(z) \cdot \int_{\mathfrak{G}_\zeta} |f(\zeta)|^2 d\omega_\zeta\,.$$

Für alle Funktionen $f(z)$, die in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar sind und für die $\int_{\mathfrak{G}_\zeta} |f(\zeta)|^2 d\omega_\zeta \leqq 1$ ist, gilt daher auch in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$:

$$K_{\mathfrak{G}}(z) \geqq |f(z)|^2.$$

Nun hat bei festem z in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ die Funktion $g(\zeta) = \dfrac{\overline{K_{\mathfrak{G}}(z, \bar\zeta)}}{\sqrt{K_{\mathfrak{G}}(z)}}$ gemäß (3.18) das Integral $\int_{\mathfrak{G}_\zeta} |g(\zeta)|^2 d\omega_\zeta = 1$, und es ist $|g(z)|^2 = K_{\mathfrak{G}}(z)$. Folglich gilt:

In $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ ist

$$K_{\mathfrak{G}}(z) = \max_{f(z) \in \mathfrak{F}} |f(z)|^2\,,$$

wobei $f(z)$ die Familie $\mathfrak{F}$ aller in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen mit $\int_{\mathfrak{G}} |f(z)|^2 d\omega \leqq 1$ durchläuft.

Aus dieser Charakterisierung des Kernes folgt: *Ist $\mathfrak{G}'$ ein Gebiet, welches $\mathfrak{G}$ enthält, und ist $K_{\mathfrak{G}'}(z)$ der Kern von $\mathfrak{G}'$, so ist im Durchschnitt $\mathfrak{G}' \cap (\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0)$:*

$$K_{\mathfrak{G}}(z) \geqq K_{\mathfrak{G}'}(z)\,. \tag{3.19}$$

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich völlig analog auf p Variable $z_1, z_2, \ldots, z_p$ übertragen. Statt des Dizylinders $\mathfrak{D}_0$ tritt ein Polyzylinder $\mathfrak{D}_0$: $|z_\mu - z_\mu^{(0)}| < R_0$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, auf und statt des 8-dimensionalen Polyzylinders $\mathfrak{P}_0$ ein 4 p-dimensionaler Polyzylinder $\mathfrak{P}_0$: $|z_\mu - z_\mu^{(0)}| < R_0$, $|\bar\zeta_\mu - \overline{z_\mu^{(0)}}| < R_0$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$.

Betrachten wir zum Schluß noch die *Fortsetzung der Bergmanschen Metrik* nach $\mathfrak{D}_0$, diese jedoch im Raume von p Veränderlichen.

Wie in $\mathfrak{G}$ zeigt man auch in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$, daß die durch (0.4) gegebene Hermitesche Form positiv definit ist: Sei $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0p})$ ein Punkt aus $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$. Dann sahen wir oben, daß die Funktion

$$g(z) = \frac{\overline{K_{\mathfrak{G}}(z_0, \bar z)}}{\sqrt{K_{\mathfrak{G}}(z_0)}}$$

normiert ist. Wir können sie als Funktion $p_1(z)$ eines vollständigen Orthonormalsystems wählen und wissen, daß dann

$$K_{\mathfrak{G}}(z_0) = p_1(z_0)\,\overline{p_1(z_0)} \tag{3.20}$$

ist. Für die übrigen Funktionen $p_2(z), p_3(z), \ldots$ des Orthonormalsystems gilt jetzt notwendig

$$p_\nu(z_0) = 0,\ \nu = 2, 3, \ldots\,. \tag{3.21}$$

Außerdem ist irgendeine in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbare Funktion $f(z) \not\equiv 0$ genau dann orthogonal zu $p_1(z)$, wenn $f(z_0) = 0$ ist. Ist sie nämlich orthogonal zu $p_1(z)$, so können wir sie normieren und als Funktion $p_2(z)$ wählen. Dann ist wegen $p_2(z_0) = 0$ auch $f(z_0) = 0$. Ist umgekehrt $f(z_0) = 0$, so sei $\int\limits_{\mathfrak{G}} f(z)\,\overline{p_1(z)}\,d\omega = a$. Dann ist $g(z) = f(z) - a\,p_1(z)$ orthogonal zu $p_1(z)$ und daher wegen $g(z_0) = 0$ und $p_1(z_0) \neq 0$ notwendig $a = 0$, d. h. $f(z)$ ist orthogonal zu $p_1(z)$.

Unter Berücksichtigung von (3.20) und (3.21) ergibt sich im Punkte z_0 nach (0.4) aus $K_{\mathfrak{G}}(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(z)\,\overline{p_i(z)}$:

$$\begin{aligned} T_{k\bar{l}} &= \frac{1}{K_{\mathfrak{G}}^2}\left[K_{\mathfrak{G}}\,\frac{\partial^2 K_{\mathfrak{G}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} - \frac{\partial K_{\mathfrak{G}}}{\partial z_k}\,\frac{\partial K_{\mathfrak{G}}}{\partial \bar{z}_l}\right] \\ &= \frac{1}{K_{\mathfrak{G}}^2}\left[p_1\,\overline{p_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial p_j}{\partial z_k}\,\frac{\partial \overline{p_j}}{\partial \bar{z}_l} - p_1\,\overline{p_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial z_k}\,\frac{\partial \overline{p_1}}{\partial \bar{z}_l}\right] \\ &= \frac{1}{K_{\mathfrak{G}}}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\partial p_j}{\partial z_k}\,\frac{\partial \overline{p_j}}{\partial \bar{z}_l} \end{aligned}$$

und daraus:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{K_{\mathfrak{G}}}\sum_{k,l=1}^{p}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\partial p_j}{\partial z_k}\,\frac{\partial \overline{p_j}}{\partial \bar{z}_l}\,dz_k\,d\bar{z}_l \\ &= \frac{1}{K_{\mathfrak{G}}}\sum_{j=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial p_j}{\partial z_k}\,dz_k\right|^2. \end{aligned}$$

Diese Form ist sicherlich positiv semi-definit. Sie ist sogar positiv-definit, weil sonst je p Vektoren $\left(\frac{\partial p_j}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial p_j}{\partial z_p}\right)$, $j = 2, 3, \ldots$, im Punkte z_0 stets linear abhängig sein müßten. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall, weil man als Funktionen $p_2, p_3, \ldots, p_{p+1}$ Polynome $a_{11}(z_1 - z_{01})$, $a_{21}(z_1 - z_{01}) + a_{22}(z_2 - z_{02})$, $\ldots$, $a_{p1}(z_1 - z_{01}) + a_{p2}(z_2 - z_{02}) + \cdots + a_{pp}(z_p - z_{0p})$, $a_{11} \cdot a_{22} \times \cdots \times a_{pp} \neq 0$, wählen kann. Wir haben also das Resultat:

Die durch (0.4) *gegebene Bergmansche Metrik läßt sich nach* $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ *fortsetzen und ist dort überall durch eine positiv-definite Hermitesche Matrix* $(T_{k\bar{l}})$ *bestimmt.*

Mit dieser Feststellung haben wir alle Aussagen von Satz 3 für das Gebiet $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0$ bewiesen. Wir können nun das gesamte Beweisverfahren für $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{D}_1$ wiederholen, sodann für $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$, usw., bis wir zum Polyzylinder $\mathfrak{D}_r$ gelangt sind, womit dann der Beweis der Aussage des Satzes 3 vollständig erbracht ist.

§ 4. Kernfunktion und Außenhülle

Wir sahen in § 2, daß die Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ eines schlichten beschränkten Gebietes $\mathfrak{G}$ stets in der Kernhülle $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ enthalten ist. Wir wollen nun zeigen, daß darüber hinaus die Kernhülle $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ in der Außenhülle $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ enthalten ist, d. h. im Durchschnitt aller Holomorphiegebiete, die $\mathfrak{G}$ kompakt enthalten. Der Kürze wegen führen wir den Beweis wiederum nur für zwei Veränderliche z_1 und z_2.

Die Außenhülle $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ läßt sich darstellen als Durchschnitt einer Folge von Holomorphiegebieten $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$, wobei $\mathfrak{H}_{n+1}$ kompakt in $\mathfrak{H}_n$ enthalten ist: $\mathfrak{H}_{n+1} \subset \mathfrak{H}_n$[9]). Jedes $\mathfrak{H}_n$ läßt sich von innen durch analytische Polyeder approximieren. Daher gibt es zu jedem $\mathfrak{H}_n$ ein solches Polyeder $\mathfrak{P}_n$, daß

$$\mathfrak{H}_{n+1} \subset \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{H}_n$$

gilt. Folglich kann $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von außen sogar durch analytische Polyeder $\mathfrak{P}_n$ approximiert werden: $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, mit $\mathfrak{P}_{n+1} \subset \mathfrak{P}_n$, deren Durchschnitt $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ ist. Jedes dieser Polyeder $\mathfrak{P}_n$ ist durch endlich viele Ungleichungen

$$(4.1) \qquad |f_{n\nu}(z_1, z_2)| < 1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_n,$$

gegeben, wobei die $f_{n\nu}(z_1, z_2)$ holomorphe Funktionen in $\mathfrak{H}_n$ sind. Der Rand der $\mathfrak{P}_n$ besteht aus endlich vielen Hyperflächenstücken $\mathfrak{F}_{n\nu}: |f_{n\nu}(z_1, z_2)| = 1$. Sei nun (z_{01}, z_{02}) ein gewöhnlicher Punkt auf genau einem solchen Flächenstück. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei in ihm

$$(4.2) \qquad \frac{\partial f_{n\nu}(z_1, z_2)}{\partial z_1} \neq 0\,.$$

Dann wird durch die Abbildung

$$(4.3) \qquad \begin{aligned} w_1 &= f_{n\nu}(z_1, z_2) \\ w_2 &= z_2 \end{aligned}$$

das Polyeder $\mathfrak{P}_n$ auf ein Gebiet $\mathfrak{B}$ in einem Dizylinder $\mathfrak{D}$:

$$|w_1| < 1, \quad |w_2| < r,$$

abgebildet. $\mathfrak{B}$ ist evtl. nicht schlicht, aber es hat über einem Punkt von $\mathfrak{D}$ höchstens eine endliche Zahl m von Punkten, wobei m eine feste positive Zahl ist. Aus den Relationen (0.2) und (0.3) sowie dem Transformationsgesetz des Kernes bei analytischen Abbildungen[10]) eines Gebietes $\mathfrak{G}$ auf ein Gebiet $\mathfrak{G}^*$:

$$(4.4) \qquad K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2) = \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2 K_{\mathfrak{G}^*}(w_1, w_2)$$

ergibt sich nun unmittelbar für die Kerne von $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{D}$ die Abschätzung

$$K_{\mathfrak{P}_n}(z_1, z_2) = \left| \frac{\partial f_{n\nu}(z_1, z_2)}{\partial z_1} \right|^2 K_{\mathfrak{B}}(w_1, w_2) \geqq \frac{1}{m} \left| \frac{\partial f_{n\nu}(z_1, z_2)}{\partial z_1} \right|^2 K_{\mathfrak{D}}(w_1, w_2)\,.$$

Insbesondere gibt es wegen (4.2) eine Umgebung von (z_{01}, z_{02}) und dazu eine Konstante $m_0 > 0$, so daß in dieser Umgebung

$$(4.5) \qquad K_{\mathfrak{P}_n}(z_1, z_2) \geqq m_0 K_{\mathfrak{D}}(w_1, w_2)$$

ist. Nun liegt das Bild von (z_{01}, z_{02}) auf der Mantelfläche $|w_1| = 1$, $|w_2| < r$ des Dizylinders $\mathfrak{D}$. In $\mathfrak{D}$ lautet die Kernfunktion gemäß (1.12), (4.3) und (4.4):

$$(4.6) \qquad K_{\mathfrak{D}}(w_1, w_2) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1 - |w_1|^2)^2 (r^2 - |w_2|^2)^2}\,.$$

Aus (4.5) und (4.6) folgt also, daß bei Annäherung an einen gewöhnlichen Punkt des Randes von $\mathfrak{P}_n$ der Kern $K_{\mathfrak{P}_n}(z_1, z_2)$ über alle Grenzen wächst.

Als Anwendung dieser Ergebnisse erhalten wir

---

[9]) H. Behnke und P. Thullen, a. a. O.

[10]) Siehe S. Bergman, a. a. O.

Satz 4. *Zwischen der Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, der Kernhülle $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ und der Außenhülle $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ eines Gebietes $\mathfrak{G}$ besteht die Relation*

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G}).$$

Die erste dieser beiden Beziehungen ist durch (2.3) gegeben, die zweite ergibt sich wie folgt: Sei (z_{01}, z_{02}) ein Randpunkt der Außenhülle, in den $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ reell-analytisch fortsetzbar wäre. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von (z_{01}, z_{02}), in der $K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2)$ beschränkt ist. Andererseits läßt sich $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von außen durch analytische Polyeder approximieren. Es gibt also sicher auch ein solches Polyeder $\mathfrak{P}$, das in $\mathfrak{U}$ gewöhnliche Randpunkte hat. Da $\mathfrak{P}$ das Gebiet $\mathfrak{G}$ enthält, so gilt gemäß Formel (3.19), die bei beliebiger Fortsetzung des Kernes $K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2)$ bestehen bleibt, in $\mathfrak{U}$:

$$K_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2) \geqq K_{\mathfrak{P}}(z_1, z_2).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Tatsache, daß $K_{\mathfrak{P}}(z_1, z_2)$ bei Annäherung an den Rand von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{U}$ über alle Grenzen wächst. Damit ist unser Satz bewiesen.

Als triviale Folgerung ergibt sich, daß in Gebieten ohne Nebenhülle, d. h. in Gebieten, in denen $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ ist, auch die Kernhülle mit der Holomorphiehülle übereinstimmt.

(Eingegangen am 15. September 1955)

NAUMANN, H.
Math. Annalen, Bd. 131. S. 17—27 (1956)

Eine affine Rechtwinkelgeometrie*)

Von

HERBERT NAUMANN in Marburg a. d. Lahn

Unter den ebenen affinen Desarguesschen Rechtwinkelgeometrien lassen sich zwei bemerkenswerte Klassen aufweisen, die nach Hinzunahme des Satzes von PAPPUS-PASCAL miteinander zusammenfallen und auch nur diejenigen affinen Rechtwinkelgeometrien gemeinsam haben, in denen der Satz von PAPPUS-PASCAL gilt. In jeder der beiden Klassen gibt es Modelle, in denen der PAPPUS-PASCALsche Satz nicht gültig ist. Eine der Klassen ist von K. SCHÜTTE[1]) untersucht worden, die zugehörigen räumlichen und mehrdimensionalen Verallgemeinerungen dieses Typs auch schon von R. BAER und H. LENZ [vgl. [1])]. K. REIDEMEISTER und Verf. haben sodann in [2]) einen bis zu einem gewissen Punkt gemeinsamen Aufbau beider Klassen durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wird nun diejenige Klasse von Rechtwinkelgeometrien, die sich durch die Gültigkeit eines von K. REIDEMEISTER aufgestellten Schließungssatzes für Inzidenz und Orthogonalität charakterisieren läßt, eingehender untersucht.

Für Diskussionen und Anregungen bin ich Herrn Prof. REIDEMEISTER sehr zu Dank verpflichtet.

1. Unter einer *affinen Rechtwinkelebene* verstehen wir eine affine Ebene, in der außer den *trivialen affinen Inzidenzaxiomen* die *trivialen Orthogonalitätsaxiome*[1]) erfüllt sind:

O1. Ist $g \perp h$, so $h \perp g$.

O2. Ist $g \perp h$ und $h \parallel k$, so $g \perp k$.

O3. Durch jeden Punkt einer Geraden g gibt es genau eine Gerade h mit $g \perp h$.

Aus den Axiomen folgt, daß es zu einem gegebenen Punkt P und einer Geraden g genau ein *Lot* h von P auf g gibt; mit anderen Worten: es gibt genau ein h mit $h \mathrel{\dot{|}} P$ und $h \perp g$.

Ist $g \perp g$, so nennen wir g *isotrop*.

Wie üblich bezeichnen wir eine eineindeutige Transformation der Punkte auf sich, die die kollineare Lage von Punkten erhält, als eine *Kollineation*.

Wir zeigen zunächst die Äquivalenz eines Axioms über die Existenz gewisser Kollineationen mit dem REIDEMEISTERschen Rechtwinkel-Schließungssatz.

---

*) Für Unterstützung dieser Arbeit sage ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen aufrichtigen Dank.

[1]) K. SCHÜTTE, Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Math. Ann. **129**, 424—430 (1955).

[2]) H. NAUMANN u. K. REIDEMEISTER, Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie. (Erscheint in den Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd. **21**.)

Axiom K: Sind g und g' irgend zwei gegebene orthogonale Geraden und sind A, B zwei verschiedene Punkte auf g und A', B' zwei verschiedene Punkte auf g', so gibt es eine Kollineation, die jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade und A in A', B in B' transformiert.

Wenn das Axiom K erfüllt ist, dann gibt es auch nur eine Kollineation mit dieser Eigenschaft. Denn sei zunächst C ein Punkt, der nicht mit g inzidiert. Dann ist das Bild von C eindeutig bestimmt als Schnittpunkt des Lotes von A' auf die Gerade AC mit dem Lot von B' auf die Gerade BC. Dann sind aber auch die Bilder der mit g inzidierenden Punkte eindeutig festgelegt.

Schließungssatz **A**: Sind $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ und $P'_i (i = 0, 1, 2, 3)$ die Ecken zweier nicht ausgearteter Vierecke und bestehen fünf der Relationen $P_i P_k \perp P'_i P'_k (i < k = 0, 1, 2, 3)$, so gilt auch die sechste.

Satz 1: *Der Schließungssatz* **A** *ist mit dem Axiom K äquivalent.*

Beweis. Sei zunächst das Axiom K erfüllt, und es mögen die Punkte P_i, $P'_i (i = 0, 1, 2, 3)$ die Voraussetzungen des Schließungssatzes **A** in der Weise erfüllen, daß $P_0 P_k \perp P'_0 P'_k$ und $P_1 P_k \perp P'_1 P'_k$ ist. Dann gibt es nach dem Axiom K (genau) eine Kollineation, die P_0 in P'_0 und P_1 in P'_1 und im übrigen jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade überführt. Bei dieser Kollineation geht die Gerade $P_0 P_2$ in das Lot von P'_0 auf $P_0 P_2$, d. h. in die Gerade $P'_0 P'_2$ und entsprechend die Gerade $P_1 P_2$ in $P'_1 P'_2$ über. Damit ist aber gezeigt, daß P'_2 bei der genannten Kollineation das Bild von P_2 ist. Ebenso zeigt man, daß P'_3 das Bild von P_3 ist. Folglich $P_2 P_3 \perp P'_2 P'_3$, das ist die Behauptung des Schließungssatzes **A**. — Sei nun umgekehrt der Schließungssatz **A** in der ganzen Ebene gültig, und seien g und g' zwei orthogonale Geraden und A, B zwei verschiedene Punkte auf g und A', B' zwei verschiedene Punkte auf g'. Wir ordnen jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, den Schnittpunkt P' des Lotes von A' auf AP mit dem Lot von B' auf BP zu. Sind P und Q irgend zwei Punkte, die nicht auf g liegen, und P' und Q' die den Punkten P bzw. Q zugeordneten Punkte, so ist $PQ \perp P'Q'$, was für den Fall, daß PQA oder PQB auf einer Geraden liegen, unmittelbar aus der Definition und im anderen Falle, d. h. wenn A, B, P, Q ein nicht ausgeartetes Viereck bilden, aus dem Schließungssatz **A** folgt. Schließlich ordnen wir jedem Punkt C auf g unter Zuhilfenahme eines beliebigen nicht auf g gelegenen Punktes P und dessen Bildes P' den Schnittpunkt C' des Lotes von P' auf PC mit der Geraden g' zu, und diese Konstruktion ist wegen der Gültigkeit des Schließungssatzes **A** unabhängig von der speziellen Wahl des Hilfspunktes P. Damit ist die im Axiom K geforderte Existenz einer Kollineation gezeigt, die A in A', B in B' und jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade transformiert.

Satz 2: *Aus dem Schließungssatz* **A** *folgt der affine Satz von* DESARGUES[3]).

Wendet man den Schließungssatz **A** zweimal hintereinander an, und zwar zuerst auf zwei Vierecke P_i und P'_i, dann auf das Viereck P'_i und ein weiteres Viereck $P''_i (i = 0, 1, 2, 3)$, wobei man speziell $P''_0 = P_0$ zu wählen hat, so bilden die Punkte P_i, P''_i die Figur des affinen Satzes von DESARGUES. Aus dieser Betrachtung folgt unmittelbar die Behauptung.

---

[3]) Vgl. auch Anm. 2.

2. Da mit dem Schließungssatz **A** oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit dem Axiom K der affine Desarguessche Satz zur Verfügung steht, so sind wir in der Lage, ein Koordinatensystem einzuführen, in dem die Punkte durch Paare (x, y) von Elementen eines Schiefkörpers dargestellt werden und die Punkte einer Geraden einer linearen Gleichung $a x + b y + c = 0$ genügen, wobei a, b, c ebenfalls dem Schiefkörper angehören und a und b nicht zugleich verschwinden sollen.

Falls *alle Geraden* der affinen Ebene *isotrop* sind, dann ist die Orthogonalität mit der Parallelität identisch und der Schließungssatz **A** zum Satz von DESARGUES äquivalent.

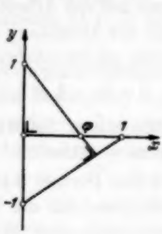

Fig. 1

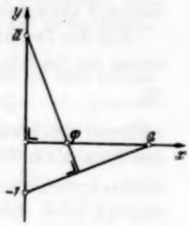

Fig. 2

Wenn wir von diesem trivialen Fall absehen, so gibt es in der Ebene stets ein Paar von orthogonalen, nicht parallelen Geraden, und wir können diese als x- und y-Achse dem Koordinatensystem zugrunde legen.

Wir definieren nun in der folgenden Weise eine eineindeutige Abbildung der Elemente des Schiefkörpers auf sich[3]):

Das Lot vom Punkte $(0, 1)$ auf die Gerade $(1, 0)$, $(0, -1)$ trifft die x-Achse in einem bestimmten, vom Koordinatenursprung verschiedenen Punkt $(\varphi, 0)$. Jedem Punkt $(a, 0)$ der x-Achse ordnen wir sodann den Schnittpunkt $(0, \bar{a})$ des Lotes von $(\varphi, 0)$ auf die Gerade $(0, -1)$, $(a, 0)$ zu (vgl. Fig. 1 u. 2).

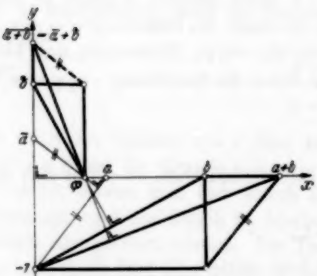

Fig. 3

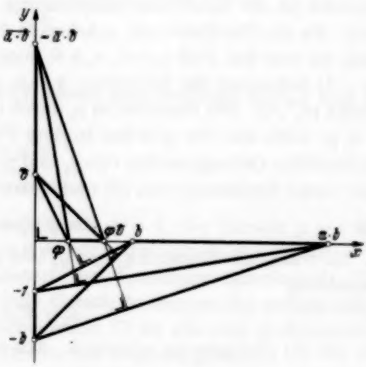

Fig. 4

Mit dieser Abbildung der Punkte $(a, 0)$ der x-Achse auf die Punkte $(0, \bar{a})$ der y-Achse ist nun eine Abbildung $a \to \bar{a}$ der Elemente des Schiefkörpers auf sich erzielt, und diese Abbildung ist ersichtlich eineindeutig.

Satz 3: *Die Abbildung $a \to \bar{a}$ ist bei Gültigkeit des Schließungssatzes* **A** *ein Automorphismus des Koordinatenschiefkörpers.*

Die Formel

(1) $$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

folgt, wie Fig. 3 zeigt, durch einmalige Anwendung des Spezialfalls von **A** für *Trapeze*. Die Formel

(2) $$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

folgt, wie aus Fig. 4 zu ersehen ist, durch einmalige Anwendung des Spezialfalls von **A**, bei dem ein Paar von Gegenseiten des Vierecks P_i als *orthogonal* vorausgesetzt ist. Für die Einzelheiten des hier nur skizzierten Beweises des Satzes 3 verweisen wir auf die Arbeit [2]).

Aus der Definition der Abbildung $a \to \bar{a}$ ergeben sich unmittelbar die beiden ersten der im folgenden oft benutzten Beziehungen

(3) $$\bar{0} = 0, \quad \bar{1} = 1, \quad \overline{-1} = -1, \quad \bar{\varphi} = \varphi,$$

während die restlichen dieser Beziehungen sich beweisen lassen, wenn man den Satz **A** für Trapeze voraussetzt. Denn die dritte Beziehung folgt aus den beiden ersten mittels der Formel (1). $\overline{-1} = -1$ heißt aber, daß die Gerade $(0,-1)$, $(-1,0)$ orthogonal zu der Geraden $(0,-1)$, $(\varphi, 0)$ ist. Nach den trivialen Orthogonalitätsaxiomen ist dann die Gerade $(0,-1)$, $(\varphi, 0)$ orthogonal zu $(0, a)$, $(a, 0)$ für beliebiges a, woraus für $a = \varphi$ die letzte der Beziehungen (3) folgt.

3. Gegeben seien zwei Geraden in der Normalform

$$g_1\colon\ y = a_1 x + c_1,$$
$$g_2\colon\ y = a_2 x + c_2.$$

Gesucht ist die Koeffizientenbedingung, unter der diese Geraden orthogonal sind. Da die Parallelen zur x-Achse zu den Parallelen zur y-Achse orthogonal sind, ist nur der Fall $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ von Interesse. Die Parallele zu g_2 durch $(0,-1)$ bekommt die Gleichung $y = a_2 x - 1$, trifft also die x-Achse in dem Punkt $(a_2^{-1}, 0)$. Die Parallele zu g_1 durch $(\varphi, 0)$ erhält die Gleichung $y = a_1 x - - a_1 \varphi$, trifft also die y-Achse in dem Punkt $(0, -a_1\varphi)$. Notwendig und hinreichend für Orthogonalität von g_1 und g_2 ist daher die Beziehung $-a_1\varphi = \overline{a_2^{-1}}$, oder unter Benutzung von (2) umgeformt:

(4) $$a_1 \varphi\, \overline{a_2} = -1\,.$$

Läßt man die Geraden g_1 und g_2 ihre Rollen vertauschen, so ergibt sich die Beziehung

(5) $$a_2 \varphi\, \overline{a_1} = -1\,,$$

die mit (4) gleichwertig sein muß. Aus (5) folgt mittels (2) und (3)

$$\overline{a_2 \varphi\, \overline{a_1}} = \overline{a_2} \cdot \varphi\, \overline{\overline{a_1}} = -1\,,$$

woraus durch Vergleich mit $a_1\varphi \cdot \overline{a_2} = -1$ die Formel $\varphi\, \overline{\overline{a_1}} = a_1 \varphi$ abgeleitet werden kann. Da a_1 alle beliebigen von Null verschiedenen Werte annehmen konnte und die letztere Formel auch für $a_1 = 0$ richtig bleibt, haben wir also erhalten:

(6) $$\varphi\, \overline{\overline{a}} = a\, \varphi.$$

4. Der nun folgende Satz zeigt, daß die unter Voraussetzung des Satzes A gewonnenen algebraischen Beziehungen auch hinreichend für die Gültigkeit des Satzes A sind.

Satz 4: *Gegeben sei ein Schiefkörper* $\mathfrak{K}$, *in dem ein Automorphismus* $\bar{a}$ *erklärt ist, der für ein geeignetes festes* $\varphi \in \mathfrak{K}\,(\varphi \neq 0)$ *der Beziehung* $\varphi\,\bar{\bar{a}} = a\,\varphi$ *genügt, und es sei* $\bar{\varphi} = \varphi$. *Definiert man nun in der affinen Ebene über* $\mathfrak{K}$ *als Koordinatenbereich die Orthogonalität durch die Festsetzung, daß die Geraden* $x = const$ *orthogonal zu den Geraden* $y = const$ *und die Geraden* $y = a_1 x + c_1$, $y = a_2 x + c_2\,(a_1, a_2 \neq 0)$ *genau unter der Bedingung* $a_1\,\varphi\,\overline{a_2} = -1$ *orthogonal sein sollen, so sind die trivialen Orthogonalitätsaxiome O 1—3 und der Schließungssatz* **A** *erfüllt.*

Beweis. Die Gültigkeit der trivialen Orthogonalitätsaxiome ist fast selbstverständlich. Es ist nur zu zeigen, daß die Bedingung $a_1\,\varphi\,\overline{a_2} = -1$ symmetrisch in a_1 und a_2 ist, d. h. daß mit $a_1\,\varphi\,\overline{a_2} = -1$ auch $a_2\,\varphi\,\overline{a_1} = -1$ gilt. Aus $a_1\,\varphi\,\overline{a_2} = -1$ folgt $\varphi\,\overline{a_2} = -a_1^{-1}$, und durch Anwendung des Automorphismus $\bar{a}$ ergibt sich hieraus $\overline{\varphi\,\overline{a_2}} = \varphi\,\overline{\overline{a_2}} = a_2\,\varphi = -\overline{a_1^{-1}}$, also $a_2\,\varphi\,\overline{a_1} = -1$, was zu zeigen war. — Wegen Satz 1 genügt es nun, anstelle des Schließungssatzes A das Kollineationsaxiom K zu beweisen. Wie man unmittelbar einsieht, kann man wegen der Gültigkeit des Satzes von Desargues jede der im Axiom K geforderten Kollienationen aus irgendeiner Kollineation, die jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade transformiert, und einer nachfolgenden Streckung oder Translation zusammensetzen. Es genügt daher die Existenz einer Kollineation aufzuweisen, die jede Gerade in eine zu ihr orthogonale transformiert. Betrachten wir zu diesem Zwecke die nachfolgende Punkttransformation

$$x' = -\varphi\,\bar{y} \qquad (7)$$
$$y' = \bar{x}\,.$$

Sie ist eineindeutig, denn die Formeln (7) lassen sich eindeutig nach x und y auflösen:

$$x = \varphi\,\overline{y'}\,\varphi^{-1}, \qquad (8)$$
$$y = -\overline{x'}\,\varphi^{-1}.$$

Sie führt die Gerade $x = c$ über in die Gerade $y' = \bar{c}$, die Gerade $y = c$ in $x' = -\varphi\,\bar{c}$ und die Gerade $y = a\,x + c$ mit $a \neq 0$ in die Gerade $y' = (-\bar{a}^{-1}\,\varphi^{-1})\,x' - \bar{a}^{-1}\bar{c}$, wovon man sich durch Einsetzen der Transformationsformeln (7) überzeugt, und ersichtlich ist hierbei jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade übergeführt worden. Die Transformation (7) ist also eine Kollineation der benötigten Art, und damit ist der Beweis des Satzes 4 geführt.

5. In diesem und dem folgenden Paragraphen soll nun die Gruppe der die Orthogonalität erhaltenden Kollineationen untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die von einem Zahlenpaar (a, b) abhängige Punktabbildung

$$x' = a\,x - \varphi\,b\,y, \qquad (9)$$
$$y' = b\,x + \bar{a}\,y.$$

Die Zusammensetzung zweier Abbildungen der Gestalt (9) ergibt wieder eine Abbildung der gleichen Art: Sei

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 x' - \varphi\, \bar{b}_1 y' \\ y'' &= b_1 x' + \bar{a}_1 y' \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x' &= a_2 x - \varphi\, \bar{b}_2 y, \\ y' &= b_2 x + \bar{a}_2 y. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 a_2 x - a_1 \varphi\, \bar{b}_2 y - \varphi\, \bar{b}_1 b_2 x - \varphi\, \bar{b}_1 \bar{a}_2 y \\ &= (a_1 a_2 - \varphi\, \bar{b}_1 b_2)\, x - \varphi\, (\bar{b}_1 \bar{a}_2 + \bar{\bar{a}}_1 \bar{b}_2)\, y, \\ y'' &= b_1 a_2 x - b_1 \varphi\, \bar{b}_2 y + \bar{a}_1 b_2 x + \bar{a}_1 \bar{a}_2 y \\ &= (b_1 a_2 + \bar{a}_1 b_2)\, x + (\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \varphi\, \overline{\bar{b}_1 b_2})\, y; \end{aligned}$$

es ist also

$$\begin{aligned} x'' &= a_3 x - \varphi\, \bar{b}_3 y \\ y'' &= b_3 x + \bar{a}_3 y \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a_3 &= a_1 a_2 - \varphi\, \bar{b}_1 b_2, \\ b_3 &= b_1 a_2 + \bar{a}_1 b_2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Abbildung (9) kurz durch (a, b) und schreibt man die Zusammensetzung zweier solcher Abbildungen als Multiplikation, so lassen sich die zuletzt erhaltenen Formeln auch folgendermaßen schreiben:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - \varphi\, \bar{b}_1 b_2,\; b_1 a_2 + \bar{a}_1 b_2)\,. \tag{10}$$

Die Abbildung (9) läßt sich nun unter Verwendung der durch die Formel (10) definierten Multiplikation in der folgenden Weise darstellen:

$$(x', y') = (a, b) \cdot (x, y)\,. \tag{11}$$

Die obenstehende Umrechnung liefert sodann

$$(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (x, y)) = ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (x, y),$$

d. h. die in (10) definierte Multiplikation ist assoziativ, sie bildet eine Halbgruppe mit (1, 0) als Rechts- und Linkseinheitselement.

Durch die Einführung der Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\; b_1 + b_2) \tag{12}$$

wird aus dieser Halbgruppe ein Schiefring; denn durch (12) ist eine additive Abelsche Gruppe definiert und die beiden distributiven Gesetze folgen daraus, daß der Ausdruck für das Produkt von (a_1, b_1) mit (a_2, b_2) bis auf einen Automorphismus linear in a_1 und b_1 und linear in a_2 und b_2 ist. Setzt man nun

$$(1, 0) = 1, \quad (0, 1) = \varepsilon,$$

so kann man die Elemente (a, b) des Schiefrings in der handlicheren Weise

$$a + \varepsilon\, b$$

schreiben, wo a und b Elemente des Schiefkörpers der gegebenen Rechtwinkelgeometrie sind und ε ein im ursprünglichen Schiefkörper nicht enthaltenes Element ist. Die Multiplikationsvorschrift (10) läßt sich sodann, wie man durch Einsetzen sieht, durch die beiden Beziehungen

$$a\, \varepsilon = \varepsilon\, \bar{a}, \quad \varepsilon^2 = -\varphi \tag{13}$$

ersetzen, die ihrerseits als Spezialisierungen aus (10) folgen.

Der Schiefring $a + \varepsilon b$ enthält im allgemeinen Nullteiler. Ist nämlich $1 + b\,a^{-1}\varphi\,\overline{b\,a^{-1}} = 0$ $(a, b \neq 0)$, so ist

$$(a + \varepsilon b) \cdot (b^{-1} - \varepsilon\,\bar{a}^{-1}) = (a\,b^{-1} + \varphi\,\bar{b}\,\bar{a}^{-1}) + \varepsilon(b\,b^{-1} - \bar{a}\,\bar{a}^{-1}) = 0.$$

Ist dagegen $1 + b\,a^{-1}\varphi\,\overline{b\,a^{-1}} \neq 0$ $(a \neq 0)$ oder $a = 0$, $b \neq 0$, so besitzt $a + \varepsilon b$ ein Inverses:

$$a = 0, b \neq 0: \quad (\varepsilon b)^{-1} = -\varepsilon\,\bar{b}^{-1}\varphi^{-1}$$

$$a \neq 0, b = 0: \quad a^{-1} = a^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{r} a \neq 0, b \neq 0 \\ 1 + b\,a^{-1}\varphi\,\overline{b\,a^{-1}} \neq 0 \end{array}\right\}: \quad (a + \varepsilon b)^{-1} = b^{-1}(b\,a^{-1})^{*}b\,a^{-1} - \varepsilon\,\bar{a}^{-1}(b\,a^{-1})^{*}b\,a^{-1};$$

hierbei ist zur Abkürzung die Funktion

$$a^{*} = (1 + a\,\varphi\,\bar{a})^{-1} \tag{14}$$

eingeführt.

Die Punktabbildung

$$x' + \varepsilon y' = (a + \varepsilon b) \cdot (x + \varepsilon y) \tag{15}$$

ist also für $1 + b\,a^{-1}\varphi\,\overline{b\,a^{-1}} \neq 0 (a \neq 0)$ und für $a = 0$, $b \neq 0$ eineindeutig, und sie ist in diesen Fällen sogar eine Kollineation, die die Orthogonalität erhält. Denn die Gerade durch $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ $(P_1 \neq P_2)$ lautet in Parameterdarstellung

$$x = (x_2 - x_1)\,t + x_1$$

$$y = (y_2 - y_1)\,t + y_1,$$

oder in „komplexer" Schreibweise

$$x + \varepsilon y = (x_2 - x_1 + \varepsilon(y_2 - y_1))\,t + x_1 + \varepsilon y_1, \tag{16}$$

und nach linksseitiger Multiplikation mit $a + \varepsilon b$ wird hieraus gemäß (15)

$$\begin{aligned} x' + \varepsilon y' &= (a + \varepsilon b) \cdot (x_2 - x_1 + \varepsilon(y_2 - y_1)) \cdot t + (a + \varepsilon b)\,(x_1 + \varepsilon y_1) \\ &= (x_2' - x_1' + \varepsilon(y_2' - y_1'))\,t + x_1' + \varepsilon y_1', \end{aligned}$$

womit bereits gezeigt ist, daß (15) (in den oben genannten Fällen) eine affine Kollineation ist. Die Kollineation (7) ($x^{\cdot} = -\varphi\,\bar{y}$, $y^{\cdot} = \bar{x}$), die, wie in 4. gezeigt wurde, jede Gerade in eine zu ihr orthogonale Gerade transformiert, lautet in „komplexer" Schreibweise

$$x^{\cdot} + \varepsilon y^{\cdot} = (x + \varepsilon y)\,\varepsilon. \tag{17}$$

Die Kollineationen (15) und (17) sind aber ersichtlich miteinander vertauschbar, es gibt also zu jeder Geraden g eine zu ihr orthogonale Gerade $g^{\cdot}$, so daß deren Bildgeraden nach Ausführung der Kollineation (15) wieder zwei orthogonale Geraden g' und $g^{\cdot\prime} = g'^{\cdot}$ sind, und da (15) die Parallelität erhält, so bleibt auch die Orthogonalität allgemein erhalten.

Die Kollineationen (15) kann man mit einer Translation verbinden und kommt so zu den die Orthogonalität erhaltenden Kollineationen

$$(18)\qquad x' + \varepsilon y' = (a + \varepsilon b)(x + \varepsilon y) + d + \varepsilon e \begin{cases} (a = 0,\ b \neq 0 \text{ oder} \\ 1 + b a^{-1} \varphi\, \overline{b a^{-1}} \neq 0,\ a \neq 0). \end{cases}$$

Die Kollineationen (18) bilden mit den aufgeführten Einschränkungen für a, b eine Gruppe.

Ein Punktepaar A, B nennen wir eine *nicht isotrope Strecke*, wenn $A \neq B$ ist und die Gerade AB nicht isotrop ist. — Es gilt nun folgender

Satz 5: *Jede affine Rechtwinkelebene, in der außer den trivialen Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen der Rechtwinkelschließungssatz* **A** *gilt, besitzt eine bezüglich der nicht isotropen gerichteten Strecken einfach transitive Untergruppe der Gruppe der die Orthogonalität erhaltenden Kollineationen.*

Beweis. Seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei verschiedene Punkte auf einer nicht isotropen Geraden, d. h. es sei $x_2 = x_1$, $y_2 \neq y_1$ oder $x_2 - x_1 \neq 0$, $1 + (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1} \varphi\, \overline{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}} \neq 0$. Dann gibt es unter den Kollineationen der Gruppe (18) genau eine, die $(0, 0)$ in (x_1, y_1) und $(1, 0)$ in (x_2, y_2) überführt, nämlich

$$x' + \varepsilon y' = (x_2 - x_1 + \varepsilon (y_2 - y_1))(x + \varepsilon y) + x_1 + \varepsilon y_1.$$

Die hierzu inverse Kollineation bildet also die gerichtete Strecke (x_1, y_1), (x_2, y_2) auf die Einheitsstrecke $(0, 0)$, $(1, 0)$ ab, und da man diese wiederum durch eine eindeutig bestimmte Kollineation aus (18) auf jede beliebige nicht isotrope gerichtete Strecke abbilden kann, so ist der Satz bewiesen.

6. Wir geben nun eine analytische *Darstellung der allgemeinen Kollineation*, die die Orthogonalität erhält.

Da die Gruppe der Kollineationen (18) einfach transitiv bezüglich der nicht isotropen gerichteten Strecken ist, so läßt sich jede Kollineation, die die Orthogonalität erhält, in eindeutiger Weise zusammensetzen aus einer die Orthogonalität erhaltenden Kollineation, die die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ einzeln in sich überführt, und einer nachfolgenden Kollineation der Gestalt (18).

Wenn die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ fest bleiben, so muß, da die Orthogonalität erhalten bleiben soll, außer der x-Achse auch die y-Achse wieder in sich übergehen, und bekanntlich ist jede affine Kollineation, die die x- und y-Achse sowie den Einheitspunkt $(1, 0)$ auf der x-Achse in sich überführt, von der Form

$$(19)\qquad x' = \mathfrak{A}(x), \quad y' = c\,\mathfrak{A}(y) \quad (c \neq 0),$$

wo $\mathfrak{A}(x)$ einen Automorphismus des Schiefkörpers bedeutet. Damit (19) die Orthogonalität erhält, werden an den Automorphismus $\mathfrak{A}(x)$ einige Bedingungen zu stellen sein. Auf Grund des Orthogonalitätsaxioms O2 genügt die Betrachtung der Geraden durch den Ursprung. Die Gerade $x + \varepsilon y = (a + \varepsilon) t$ [d. h. die Gerade durch den Ursprung und durch $x_0 + \varepsilon y_0 = a + \varepsilon$] und die dazu orthogonale Gerade $x + \varepsilon y = (-\varphi + \varepsilon \bar{a}) t$ [d. h. die Gerade durch den Ursprung und durch $x_0' + \varepsilon y_0' = (a + \varepsilon)\varepsilon$] gehen durch (19) über in $x' + \varepsilon y' = (\mathfrak{A}(a) + \varepsilon c) t$ und $x' + \varepsilon y' = (-\mathfrak{A}(\varphi) + \varepsilon c\,\mathfrak{A}(\bar{a})) t$. Die beiden transformierten Geraden sind nun genau dann orthogonal, wenn die letzte Gerade

den Punkt $(\mathfrak{A}(a) + \varepsilon c)\,\varepsilon = -\varphi\,\bar{c} + \varepsilon\,\overline{\mathfrak{A}(a)}$ enthält, wenn es also ein Element t des Schiefkörpers gibt, daß

$$(20)\qquad \begin{aligned} \varphi\,\bar{c} &= \mathfrak{A}(\varphi)\cdot t,\\ \overline{\mathfrak{A}(a)} &= c\,\mathfrak{A}(\bar{a})\cdot t \end{aligned}$$

ist. Die Kollineation (19) erhält folglich dann und nur dann die Orthogonalität in der ganzen Ebene, wenn die Gleichungen (20) für alle a lösbar sind. Im Falle $a = 1$ ergibt sich $t = c^{-1}$, also $\mathfrak{A}(\varphi) = \varphi\,\bar{c}\,c$, woraus weiter $t = c^{-1}$ für alle a, also $\overline{\mathfrak{A}(a)} = c\,\mathfrak{A}(\bar{a})\,c^{-1}$ für alle a folgt. Umgekehrt sind mit $\mathfrak{A}(\varphi) = \varphi\,\bar{c}\,c$, $\overline{\mathfrak{A}(a)} = c\,\mathfrak{A}(\bar{a})\,c^{-1}$, $t = c^{-1}$ die Gleichungen (20) erfüllt.

Jede Kollineation, die die Orthogonalität erhält, ist somit in der Form darstellbar:

$$(21)\qquad x' + \varepsilon\,y' = (a + \varepsilon\,b)\,(\mathfrak{A}(x) + \varepsilon\,c\,\mathfrak{A}(y)) + d + \varepsilon\,e\,,$$

oder in Koordinatenschreibweise:

$$(22)\qquad \begin{aligned} x' &= a\,\mathfrak{A}(x) - \varphi\,\bar{b}\,c\,\mathfrak{A}(y) + d\\ y' &= b\,\mathfrak{A}(x) + \bar{a}\,c\,\mathfrak{A}(y) + e \end{aligned}$$

mit den Bedingungen

1. $1 + b\,a^{-1}\,\varphi\,\overline{b\,a^{-1}} \neq 0,\ a \neq 0$ oder $a = 0,\ b \neq 0$
2. $c \neq 0$
3. $\mathfrak{A}(\varphi) = \varphi\,\bar{c}\,c$
4. $\overline{\mathfrak{A}(x)} = c\,\mathfrak{A}(\bar{x})\,c^{-1}$.

7. Unter einer *Geradenspiegelung* verstehen wir eine involutorische Kollineation, die die Orthogonalität erhält und eine Gerade punktweise festhält.

Welche Spiegelungen gibt es an der x-Achse? — Wenn eine Kollineation der Gestalt (21) die x-Achse punktweise festhält, so muß $x = (a + \varepsilon\,b)\cdot\mathfrak{A}(x) + d + \varepsilon\,e$ für alle x des Schiefkörpers sein, folglich $d = e = 0$, $b = 0$, $a = 1$, $\mathfrak{A}(x) = x$. Eine Kollineation $x' + \varepsilon\,y' = x + \varepsilon\,c\,y$ ist aber genau dann involutorisch, wenn $c^2 = 1$, $c \neq 1$, d. h. wenn $c = -1$ und die Charakteristik $\neq 2$ ist. Da die obigen Bedingungen 1—4 alle erfüllt sind, so ist daher

$$(23)\qquad x' + \varepsilon\,y' = x - \varepsilon\,y$$

die einzige Spiegelung an der x-Achse.

Da sich nach Satz 5 jede nicht isotrope Gerade unter Erhaltung der Orthogonalität in die x-Achse transformieren läßt, so folgt für Charakteristik $\neq 2$

Satz 6: *An jeder nicht isotropen Geraden gibt es genau eine Spiegelung.*

Diese Geradenspiegelungen lassen sich in „komplexer" Schreibweise leicht darstellen. Sei $x + \varepsilon\,y = (a + \varepsilon\,b)\,t + d + \varepsilon\,e$ eine nicht isotrope Gerade, d. h. es existiere das Element $(a + \varepsilon\,b)^{-1} = p + \varepsilon\,q$ und damit auch $(a - \varepsilon\,b)^{-1} = p - \varepsilon\,q$. Dann lautet die Spiegelung an dieser Geraden:

$$(24)\qquad x' + \varepsilon\,y' = (a + \varepsilon\,b)\,(a - \varepsilon\,b)^{-1}\,((x - d) - \varepsilon\,(y - e)) + d + \varepsilon\,e.$$

Man zeigt nämlich leicht [unter Benutzung der Tatsache, daß (23) einen Automorphismus des Schiefrings $x + \varepsilon\,y$ darstellt], daß (24) involutorisch ist und daß jeder Punkt der Geraden $x + \varepsilon\,y = (a + \varepsilon\,b)\,t + d + \varepsilon\,e$ fest bleibt.

8. In diesem Abschnitt sollen nun *angeordnete* Rechtwinkelebenen betrachtet werden. Eine Rechtwinkelebene nennen wir (im engeren Sinne) *angeordnet*, wenn in ihr die Anordnungsaxiome der affinen Ebene[4]) (die linearen Anordnungsaxiome und das Pasch-Axiom) und zusätzlich das folgende Rechtwinkel-Anordnungsaxiom erfüllt sind:

Rechtwinkel-Anordnungsaxiom: Paare orthogonaler Geraden durch einen gemeinsamen Punkt trennen sich (vgl. Fig. 5).

Den Begriff der Trennungsrelation und seinen Zusammenhang mit der Anordnungsrelation dürfen wir hier als bekannt ansehen.

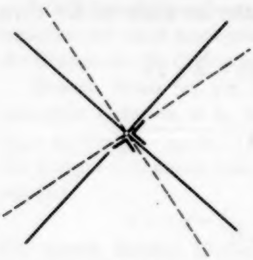

Fig. 5

Algebraisch entspricht einer angeordneten Desarguesschen Ebene ein angeordneter Schiefkörper als Koordinatenbereich. Wir werden zeigen, daß unter Voraussetzung von **A** dem obigen Rechtwinkel-Anordnungsaxiom algebraisch folgende Beziehungen entsprechen:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \varphi > 0\\ &\text{b)}\quad \text{Ist } a < b, \text{ so } \bar a < \bar b\,. \end{aligned}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst die Koordinatenachsen $x = 0$, $y = 0$ und ein weiteres Paar orthogonaler Geraden durch den Koordinatenursprung, nämlich $y = ax$, $y = -\bar a^{-1}\varphi^{-1}x$. Das Rechtwinkel-Anordnungsaxiom besagt in diesem Falle, daß die Geraden $y = ax$, $y = -\bar a^{-1}\varphi^{-1}x$ *in verschiedenen Quadranten* liegen, die Koeffizienten a, $-\bar a^{-1}\varphi^{-1}$ also verschiedenes Vorzeichen besitzen. Für $a = \varphi$ ergibt sich hieraus $\varphi > 0$, und wenn man dies berücksichtigt, so folgt weiter, daß bei positivem a stets auch $\bar a$ positiv ist. Daraus folgt unmittelbar (25b), indem man a durch $b-a$ ersetzt.

Setzt man umgekehrt die Beziehungen (25) voraus, so liegen zwei orthogonale Geraden $y = ax$, $y = -\bar a^{-1}\varphi^{-1}x$ stets in verschiedenen Quadranten. Hat man weiter zwei verschiedene Paare von orthogonalen Geraden durch den Ursprung, die die Achsen $x = 0$, $y = 0$ nicht enthalten, so müssen daher zwei (nicht orthogonale) Geraden im I. und III. Quadranten liegen. Diese lassen sich in der Form $y = ax$, $y = bx$ mit $0 < a < b$ schreiben. Dann ist nach (25) $-\bar a^{-1}\varphi^{-1} < -\bar b^{-1}\varphi^{-1} < 0$, d. h. die Geraden $y = -\bar a^{-1}\varphi^{-1}x$, $y = ax$ trennen die Geraden $y = -\bar b^{-1}\varphi^{-1}x$, $y = bx$. Da die Translationen Orthogonalität und Anordnung erhalten, so gilt dann das Rechtwinkel-Anordnungsaxiom allgemein.

Satz 7: *Gehört φ zum Zentrum des Schiefkörpers einer (im engeren Sinne) angeordneten affinen Rechtwinkelebene, in der der Schließungssatz* **A** *gilt, so ist der Automorphismus $\bar a$ die Identität.*

Beweis. Wenn φ zum Zentrum gehört, so geht (6) über in $\bar{\bar a} = a$. Angenommen, es gäbe eine Zahl a, für die $a \neq \bar a$ ist, etwa $a < \bar a$, so wäre nach (25b) $\bar a < \bar{\bar a} = a$, also $a < a$.

[4]) Vgl. etwa D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930.

Hieraus ergibt sich:

Satz 8: *In einer (im engeren Sinne) angeordneten affinen Rechtwinkelebene, in der der Schließungssatz* **A** *und der Satz von* PAPPUS-PASCAL *gelten, gilt der Satz vom Höhenschnittpunkt im Dreieck.*

Bekanntlich ist nämlich in einer Desarguesschen Ebene, in der die Orthogonalität zweier Geraden $y = a_1 x + c_1$, $y = a_2 x + c_2$ durch eine Beziehung $a_1 a_2 = -k$ $(k = \varphi^{-1})$ vermittelt wird, der Höhenschnittpunktsatz mit dem affinen Satz von PAPPUS-PASCAL äquivalent.

Es sei noch auf die (selbstverständliche) Tatsache hingewiesen, daß eine (i. e. S.) angeordnete Rechtwinkelebene keine isotropen Geraden besitzt.

Ein einfaches *Modell* einer (i. e. S.) angeordneten nicht-Pascalschen Rechtwinkelebene, in der der Schließungssatz **A** gilt und in deren analytischer Darstellung der Automorphismus $\bar{a}$ nicht die Identität ist, läßt sich definieren über dem angeordneten Schiefkörper $K(s, t)$ mit zwei Parametern s und t mit der Multiplikationsvorschrift $ts = 2st$ über dem Körper der rationalen oder der reellen Zahlen[5]). Zu diesem Zwecke setze man

$$\begin{aligned} &\varphi = s^2, \\ (30) \qquad &\bar{a} = s^{-1} a s \text{ für alle } a \text{ aus } K(s, t). \end{aligned}$$

Für diesen Automorphismus und jenes φ sind die Beziehungen (1c), (6), (29a), (29b) erfüllt:

$$\bar{\varphi} = s^{-1} s^2 s = \varphi,$$

$$\varphi \bar{\bar{a}} = \varphi s^{-2} a s^2 = a \varphi,$$

$$\varphi = s^2 > 0,$$

aus $a < b$ folgt $s^{-1} a s < s^{-1} b s$, $\bar{a} < b$.

9. Wir zeigen abschließend:

Satz 9: *In einer affinen Rechtwinkelebene in der* **A** *gilt und die sich in einen affinen Rechtwinkel-Raum einbetten läßt, gilt der Satz von* PAPPUS-PASCAL.

Unter einem affinen Rechtwinkel-Raum verstehen wir einen affinen Raum, in dem außer den trivialen Inzidenzaxiomen des affinen Raumes die Orthogonalitätsaxiome O1, O2, O3′ erfüllt sind. Hierbei ist O3′ das folgende Axiom[1]):

O3′. Durch jeden Punkt P einer Geraden g gibt es eine Ebene E mit den Eigenschaften:

a) Jede Gerade, die in E liegt und g schneidet, ist orthogonal zu g.

b) Jede Gerade, die durch P geht und orthogonal zu g ist, liegt in E.

Nach Satz 2 der zitierten Arbeit von K. SCHÜTTE[1]) gilt in einem affinen Rechtwinkel-Raum der SCHÜTTEsche Rechtwinkelsatz, und aus diesem und dem Satz **A** zusammen folgt durch eine einfache geometrische Überlegung [vgl. [2])] der Satz von PAPPUS-PASCAL.

(Eingegangen am 17. August 1955)

[5]) D. HILBERT, a. a. O.

Duff, G. F. D.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 28—37 (1956)

Eigenvalues and Maximal Domains for a Quasi-linear Elliptic Equation

By

George F. D. Duff in Toronto[1])

The second order quasi-linear partial differential equation to be studied here has the form

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + f(P).$$

A linearization is possible for this special type and consequently the Dirichlet and Neumann problems can be discussed in detail. The results are very different but depend in each case on the lowest eigenvalue of a related linear problem. It is also shown that in certain cases the equation has no solutions regular in the given domain. Thus there are regions maximal in the sense that every smaller domain but no larger one has regular solutions.

The general quasi-linear equation of the form

$$\Delta u = F(P, u, \nabla u)$$

has been solved under various conditions usually involving the dependence of F upon u and its first derivatives. The present example shows that an additive position function on the right can make an essential difference, and it also exhibits a range of possibilities which must be taken into account in any general theory of such equations.

1. Transformation of the differential equation. Let D be a bounded region of an N-dimensional Riemannian space V_N, and let the boundary B of D be of class C^4 in a given system of coordinates x^i. We suppose that the metric tensor a_{ik} of V is positive definite and analytic in the x^i. Points of D shall be denoted by capital letters $P, Q, \ldots$, while points of the boundary surface B will be indicated by small letters $p, q, \ldots$. For any function of position $u(P)$, we define the gradient and Laplace operators, respectively, by

$$(1.1) \qquad (\nabla u)_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\,; \quad \Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a}\, a^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right).$$

The square length of the gradient vector ∇u is

$$(1.2) \qquad (\nabla u)^2 = a^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

[1]) This paper was written at the Summer Research Institute of the Canadian Congress of Mathematics, Kingston, Ontario. The author wishes to thank the National Research Council of Canada for financial support during this period.

According to the conventions of Riemannian geometry, which we shall adopt, the associate tensor a^{ik} satisfies

$$a^{ik} a_{kj} = \delta^i_j,$$

and a is defined as the determinant $|a_{ij}|$.

The equation to be studied will be written

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda\, \varrho(P), \tag{1.3}$$

where $\varrho(P)$ is a positive analytic function of position and λ a real parameter which is written separately from $\varrho(P)$ for convenience. In § 3 we shall also consider a slightly more general equation.

The main formal property of (1.3) is that it can be made linear homogeneous by the transformation $\varphi = e^{-u}$. Indeed,

$$\Delta e^{-u} = -\nabla \cdot e^{-u} \nabla u = e^{-u} [(\nabla u)^2 - \Delta u], \tag{1.4}$$

and consequently we get for φ the equation

$$\Delta \varphi + \lambda\, \varrho\, \varphi = 0. \tag{1.5}$$

We note that

$$\varphi = e^{-u} > 0, \tag{1.6}$$

so that only positive solutions of (1.5) will yield regular solutions of (1.3). If values $u(p) = f(p)$ for u are assigned on B, then positive values $\varphi(p) = f_1(p) = \exp[-f(p)] > 0$ are assigned for φ.

2. A Dirichlet problem. If to the homogeneous linear equation (1.5) we adjoin the boundary condition $\varphi(p) = 0$, then solutions exist only if λ is one of a discrete set of eigenvalues which are positive (2, vol. II, ch. VI). Let λ_1 be the first, or least, eigenvalue of this problem. Now consider the non-homogeneous Dirichlet problem for (1.3), and let $f(p)$ be a C^1 function of position on B. We may then state the properties of (1.3) relative to the Dirichlet problem as follows.

Theorem I. *If $\lambda < \lambda_1$, there exists a unique solution $u(P)$ of*

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda\, \varrho, \tag{2.1}$$

with $u(p) = f(p)$ on B. If $\lambda \leqq 0$ ($\lambda \geqq 0$) the minimum (maximum) value of $u(P)$ is attained on B. If $\lambda \geqq \lambda_1$ there exists no solution regular on $D + B$.

For the proof we consider separately certain ranges of values for λ.

a) $\lambda < 0$. Taking φ as in (1.6) we have with $\mu = -\lambda > 0$

$$\Delta \varphi = \mu\, \varrho\, \varphi, \tag{2.2}$$

and $\varphi(p)$ has assigned positive values. The existence of a unique solution $\varphi_\mu(P)$ is well-kown in this case, and we need only verify that $\varphi_\mu(P)$ is positive. By the maximum principle (2, vol. II, ch. V), $\varphi_\mu(P)$ has no positive maximum or negative minimum in the interior of D. Hence the maximum is attained on B, and in addition $\varphi_\mu(P)$ can not assume negative values in D. To show that $\varphi_u(P)$ cannot vanish in D we will show that it is a strictly decreasing

function of μ. For this purpose let $G_\mu(P,Q)$ be the Green's function of (2.2) on D. Then we find

$$\varphi_{\mu+\delta\mu}(P) - \varphi_\mu(P) = -\delta\mu \int_D G_\mu(P,Q)\,\varrho(Q)\,\varphi_{\mu+\delta\mu}(Q)\,dV_Q.$$

Since $G_\mu(P,Q) \geqq 0$ (1, p. 541) and does not vanish identically for Q in a sufficiently small neighbourhood of B, we see that the integral on the right is strictly positive. (Note that $\varphi_\mu(P)$ does not vanish in a certain neighbourhood of B). Since a strictly decreasing positive function cannot vanish within its interval of definition, this proves that $\varphi_\mu(P) > 0$. Hence

$$u_\lambda(P) = -\log \varphi_{-\lambda}(P)$$

is defined and regular in D, takes its minimum value on B, and has the required boundary values.

b) $\lambda = 0$. Here φ is a harmonic function, and a solution $\varphi_0(P)$ of Dirichlet's problem is known to exist. The maximum and minimum values of $\varphi_0(P)$, hence also of u, are attained on B.

c) $0 < \lambda < \lambda_1$. Here λ is positive and

$$\Delta\varphi = -\lambda\varrho\varphi$$

with $\varphi(p) = f_1(p)$ on B. If $\varphi_0(P)$ is the harmonic function with these boundary values, and $G(P,Q)$ is the harmonic Green's function of D, then a solution satisfies the integral equation

$$\varphi(P) = \lambda \int_D G(P,Q)\,\varrho(Q)\,\varphi(Q)\,dV_Q + \varphi_0(P). \tag{2.3}$$

If we denote this integral operator by G, we have

$$\varphi(P) = \varphi_0 + \lambda G\varphi,$$

and we observe that G carries positive functions into positive functions. Now the kernel of G^n is continuous for $n > \frac{1}{2}N + 1$. Iterating (2.3) n times, we find

$$\varphi = \psi_0 + \lambda^n G^n \varphi, \tag{2.4}$$

where

$$\psi_0 = \varphi_0 + \lambda G\varphi_0 + \cdots + \lambda^{n-1}G^{n-1}\varphi_0 \geqq \varphi_0.$$

The lowest eigenvalue of (2.4) is also λ_1, and so the Neumann series for (2.4), namely

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{n\cdot k} G^{n k}\psi_0 \geqq \varphi_0 \tag{2.5}$$

converges for $0 < \lambda < \lambda_1$ and defines a solution of (2.4). Since a solution of (2.4) is unique, and since

$$\begin{aligned}\varphi_0 + \lambda G\varphi &= \varphi_0 + \lambda G\varphi_0 + \lambda^{n+1}G^{n+1}\varphi\\ &= \psi_0 + \lambda^n G^n(\varphi_0 + \lambda G\varphi)\end{aligned}$$

we see that $\varphi_0 + \lambda G\varphi$ satisfies (2.4) and so equals φ. Hence φ satisfies (2.3) and consequently is a solution of the linear problem. But from (2.5) we see

that $\varphi(P)$ is positive and so leads to a solution $u(P)$ of (2.1). In the series (2.5) all terms but the first vanish on B and it follows that the minimum of φ is attained on B, since the minimum of φ_0 is on the boundary. Hence the maximum value of $u(P)$ is attained on B.

d) $\lambda = \lambda_1$. For this case there exists an eigenfunction $\varphi_1(P)$, of $\Delta\varphi + \lambda\varrho\varphi = 0$, which vanishes on B. According to a theorem of COURANT (2, vol. I, ch. VI, § 6), φ_1 is of one sign in $B + D$ — say $\varphi_1 \geq 0$. Therefore the normal derivative satisfies

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \leq 0 \tag{2.6}$$

on B. If the equality sign were to hold in (2.6) we could apply the CAUCHY-KOWALEWSKI theorem (2, vol. II, ch. I) to show that φ would vanish in a neighbourhood of B, and, being analytic, would vanish identically. Therefore equality for all points of B does not hold in (2.6).

From Green's formula we find that if $\varphi(P)$ is any solution of (1.5) then

$$\int_B \varphi \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS = 0. \tag{2.7}$$

Thus $\varphi(p)$ must vanish at some point of B since if not the integral in (2.7) would be different from zero. Now let $u(P)$ be a solution of (2.1) in D with everywhere finite boundary values $u(p)$. Then $\varphi(P) = e^{-u}$ satisfies (1.5) and has positive boundary values. This contradicts (2.7) and we must conclude that no such solution exists. The eigenfunction $\varphi_1(P)$ itself corresponds to a solution $u(P)$ which tends to $+\infty$ as the boundary is approached.

e) $\lambda > \lambda_1$. According to a theorem in (2, vol. I, ch. VI, § 6), any solution of (1.5) with $\lambda > \lambda_1$ must change sign in D. This follows at once from the equation

$$(\lambda - \lambda_1)\int_D \varrho\,\varphi\,\varphi_1 dV = \int_B \varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS,$$

which is a consequence of Green's formula. This no regular solution in D of (2.1) can exist. This completes the proof of the theorem.

Thus if λ is the least eigenvalue of a domain D, then D is a maximal domain in the sense that (2.1) has solutions regular in every (sufficiently smooth) subdomain, while there are no solutions regular in the interior of any larger domain containing D. This follows from the strictly monotone variation of λ_1 with the domain D.

For domains of Euclidean space it is easily seen that $\lambda_1 \to 0$ as the domain tends to infinity in all directions. In the one dimensional case we have as an illustration of this phenomenon the ordinary differential equation

$$u'' = (u')^2 + \lambda.$$

The general solution may be written

$$e^{-u} = A\sin(\lambda^{1/2}x - c).$$

and if $\lambda > 0$, the maximal interval is $\pi\lambda^{-1/2}$.

3. Extended form of the transformation. We now consider a more general equation, and impose conditions which ensure the existence of a solution of Dirichlet's problem. The nature of the transformation of the dependent variable used here brings out the singular character of the previous equation (2.1).

The equation now treated is

$$\Delta u = K(u)\,(\nabla u)^2 + \lambda\,\sigma(P, u), \tag{3.1}$$

where $K(u)$ is a function of u alone, upon which further conditions will later be imposed. The function $\sigma(P, u)$ will be bounded in absolute value in the theorem which follows. If we perform the transformation $u = y(v)$ to a new dependent variable v, and if $y(v)$ satisfies the ordinary differential equation

$$y'' = K(y)\,(y')^2, \tag{3.2}$$

then we find for v the equation

$$\Delta v = \frac{\lambda\sigma(P, y(v))}{y'(v)}. \tag{3.3}$$

The condition (3.2) ensures that the terms containing $(\nabla v)^2$ cancel out. We note that if $\lambda = 0$ then $v(P)$ is a harmonic function, as in § 2, but that if $\lambda \neq 0$ the right-hand side depends on v even if $\sigma(P,v)$ is independent of v.

The integration of (3.2) can be reduced to quadratures since the independent variable v does not appear explicitly. Setting

$$p = y' = \frac{dy}{dv}, \quad p\,\frac{dp}{dy} = y'',$$

we find on cancelling a factor p that

$$\frac{dp}{dy} = p\,K(y),$$

whence

$$y' = p = p_0\, e^{\int_{y_0}^{y} K(s)\,ds}, \tag{3.4}$$

and

$$v = v_0 + p_0^{-1} \int_{y_0}^{y} e^{-\int_{y_0}^{y'} K(s)\,ds}\, dy'. \tag{3.5}$$

We shall take $v_0 = y_0 = 0$; $p_0 = 1$: however the substitution used earlier corresponds to the choice $v_0 = 1$, $y_0 = 0$, $p_0 = -1$. It is seen that in (3.4) y' is of one sign and tends to zero or infinity only if the integral of $K(y)$ diverges to $\pm$ infinity. Thus, if

$$\left| \int_0^y K(s)\,ds \right| < M, \qquad -\infty < y < \infty, \tag{3.6}$$

for some constant M, and all values of y, the transformation from u to v is strictly monotone, C^2, and one to one from $-\infty$ to $+\infty$. Also y' is bounded away from zero and hence the righthand side of (3.3) is bounded for all values of v.

Assuming then that $\sigma(P, u)$ is bounded and that (3.6) holds, we have

Theorem II. *There exists a solution* $u(P)$ *in* D *of* (3.1) *with* C^1 *boundary values* $u(p) = f(p)$.

The proof reduces to showing that (3.3), which we shall write in the form

$$\Delta v = \lambda F(P, v), \tag{3.7}$$

has a solution with given boundary values $v(p) = f_1(p)$. The function $F(P,v)$ in (3.7) is uniformly bounded as noted above.

Let $v_1(P)$ be the harmonic function with boundary values $f_1(p)$, and again let $G(P,Q)$ be the harmonic Green's function of D. Then the required solution satisfies the integral equation

$$v(P) = -\lambda \int_D G(P,Q)\, F(Q, v(Q))\, d V_Q + v_1(P), \tag{3.8}$$

and indeed any solution of (3.8) satisfies the equation (3.7) and the boundary condition.

To solve (3.8) we shall use the Schauder-Leray theorem (5), noting that in the norm

$$\|v\| = \max_{P \in D} |v(P)|,$$

the integral operator G with kernel $G(P,Q)$ is completely continuous. We select λ as the parameter of deformation, and let λ run from zero to a given λ_0. The integral on the right of (3.8) is uniformly continuous in its dependence on $v(Q)$ and also on λ, and since $F(P,u)$ is bounded the operator $GF(P,v)$ is completely continuous. Let M, F and V be bounds for the norms or absolute values of G, $F(P,v)$ and $v_1(P)$. Then

$$|v(P)| < |\lambda|\, MF + V$$

and so we choose as bounded region Ω of the Schauder-Leray theorem the domain

$$\Omega : |v(P)| \leq 2\, |\lambda_0|\, M\, F + V.$$

Thus for $0 \leq |\lambda| \leq (\lambda_0)$ there is no solution of (3.8) on the boundary Ω'. Now for $\lambda = 0$ we note that the right-hand side is independent of $v(P)$ and so $v(P) = v_1(P)$ is the only solution of (3.8). Hence for all λ the index of (3.8) is unity an[illegible] one solution exists for $\lambda = \lambda_0$. Transforming back to $u = y(v)$ we have a solution of the original problem.

If the right-hand side of (3.7) is a non-decreasing function of v, that is, if

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial v} = \lambda\, [\sigma_y - K(y)\, \sigma] \geq 0,$$

then the solution so found is unique. This is easily established with the help of Green's formula, so we shall omit all details.

Finally, we note that (3.6) is satisfied if $K(y)$ is in $L(-\infty, \infty)$, and also if $K(y)$ oscillates like, say, $\sin y$. However there may exist solutions of (3.1) for all λ even if (3.6) is not satisfied, as the following example shows. Let $K(y) = y^{-1}$, $\sigma(P, y) = 1$. Then $y = e^v$, $F(v) = e^{-v}$ and with $z = -v$ we have

$$\Delta z = -\lambda\, e^z.$$

For $\lambda \leq 0$ this equation is known to have solutions with assigned boundary values. For $\lambda > 0$ it follows from the theorem in (3) that there exists a solution z with a given maximum value and boundary values proportional to given values. Thus positive solutions $u(P)$ in the large exist for all λ in this case.

4. The Neumann problem. Returning to the equation

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda \varrho(P), \qquad \varrho(P) > 0, \tag{1.3}$$

we assign values of the normal derivative on B:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(p). \tag{4.1}$$

We shall assume that these values are positive:

$$f(p) > 0, \tag{4.2}$$

and also that $f(p)$ is of class C^1 on B. Setting $\varphi = e^{-u}$ as before, we have

$$\Delta \varphi + \lambda \varrho \varphi = 0, \tag{1.5}$$

and the boundary condition takes the form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + f(p)\varphi = 0, \tag{4.3}$$

which is homogeneous and linear in φ.

The existence theorem for the Neumann boundary condition states that λ in (1.3) is determined by (4.1), as the lowest eigenvalue μ_1 of the homogeneous linear problem of (1.5) with boundary condition (4.3).

Theorem III. *There exists a solution of* (1.3) *satisfying* (4.1) *if and only if* $\lambda = \mu_1$.

To prove this we must show that (1.5) and (4.3) have a positive solution for $\lambda = \mu_1$ only. Clearly the values of λ for which any solution exists are precisely the eigenvalues of the linear problem. Now the theorem of Courant shows that the "lowest" eigenfunction $\varphi_1(P)$ is of one sign in D: say $\varphi_1 \geq 0$.

Now let $R(P,Q)$ be the harmonic Robin function for the boundary condition (4.3). From (1, p. 545) we see that $R(P,Q)$ is symmetric and nonnegative. The theory of the Robin problem now shows that $\varphi_1(P)$ satisfies the integral equation

$$\varphi(P) = \lambda \int_D R(P,Q)\,\varrho(Q)\,\varphi(Q)\,dV_Q. \tag{4.4}$$

for $\lambda = \mu_1$. From Green's formula we can easily deduce that μ_1 is positive since ϱ and f are positive. Now suppose that $\varphi(P)$ vanishes for P in a set S of D. The integrand of (4.4) being non-negative, it follows that $R(P,Q)$ must vanish for $P \in S$, $Q \in D - S$. Let P lie in the boundary of S, and let $Q \to P$. Then $R(P,Q) \to +\infty$ which contradicts the statement just made if S is nonempty. Hence S is empty and $\varphi_1(P)$ is strictly positive in D. This shows that the problem has a solution for $\lambda = \mu_1$.

That no other solution exists could be shown from Theorem I using the separation and order properties of eigenvalues. It follows also from the orthogonality with respect to ϱ over D that any other eigenfunction has nodes in D and so is disqualified.

We remark that Theorems I and III are easily extended to the equation

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda\,\varrho(P) - q(P),$$

where $q(P)$ is regular analytic and may without loss of generality be supposed positive.

5. The Stekloff problem. A variation of the preceding theorem, in which the parameter λ appears in the boundary condition, will now be discussed. Linear eigenvalue problems of this kind were investigated by STEKLOFF [6]. Let $q(P)$ and $\varrho(p)$ be analytic functions defined on D and B respectively, and let $f(p)$ be a C^1 datum function on B. We assume that $q(P) \geqq 0$ and that $\varrho(p) > 0$.

Theorem IV. *There exists a unique λ for which the equation*

$$\Delta u = (\nabla u)^2 - q(P) \tag{5.1}$$

has a solution $u(P)$ with

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(p) - \lambda\,\varrho(p), \tag{5.2}$$

on B.

Setting $\varphi = e^{-u}$ as before we find

$$\Delta\varphi = q(P)\,\varphi, \tag{5.3}$$

with

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + (f - \lambda\,\varrho)\,\varphi = 0\,, \tag{5.4}$$

and a positive eigensolution is required. We adapt COURANT's proof that the first eigenfunction $\varphi_1(P)$ is node-free as follows. If an eigenfunction $\varphi(P)$ divides D into two or more domains by its nodes, then each domain meets B. For if not, $\varphi(P)$ vanishes on the entire boundary B_i of one of the subdomains D_i. Since the DIRICHLET problem for (5.3) has a unique solution, we would have $\varphi(P) \equiv 0$ in D_i and hence in D, by analyticity. Denote the first eigenfunction by $\varphi_1(P)$, and suppose that $\varphi_1(P)$ has nodes dividing D into $D_1, D_2, \ldots$. Let

$$w_1 = \begin{matrix} k\varphi_1 & \text{in } D, \\ 0 & \text{in } D - D_1, \end{matrix}$$

where k is chosen so that

$$\int_{B_1} \varrho\, w_1^2\, d\,S = 1.$$

Now

$$\begin{aligned} D[w_1] &\equiv \int_{D_1} [(\nabla w_1)^2 + q\,w_1^2]\,dV + \int_{B_1} f\,w_1^2\,d\,S \\ &= -\int_{D_1} w_1[\Delta w_1 - q\,w_1]\,d\,V + \int_{B_1} w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial n} + f\,w_1\right) d\,S \\ &= \nu_1 \int_{B_1} \varrho\, w_1^2\, d\,S = \nu_1, \end{aligned}$$

where ν_1 is the lowest eigenvalue and this leads to a contradiction of the minimum property of $\varphi_1(P)$ by the same reasoning that Courant uses.

We may therefore suppose $\varphi_1(P) \geqq 0$. Now let λ_0 be chosen so that $g(p) = f(p) - \lambda_0\,\varrho(p) > 0$ and take $R(P,Q)$ to be the Robin function for (5.3) with the boundary condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + g(p)\,\varphi = 0\,. \tag{5.5}$$

Then $R(P,Q) \geqq 0$ and standard theory shows that $\varphi_1(P)$ satisfies

$$\varphi_1(p) = (\nu_1 - \lambda_0) \int_B R(p,q)\,\varrho(q)\,\varphi(q)\,d\,S_q\,. \tag{5.6}$$

Since (5.3) and (5.5) together imply $\varphi \equiv 0$, we see that the eigenvalue ν_1 exceeds λ_0 and so the right side of (5.6) is non-negative. The reasoning used in connection with (4.4) applies here and we conclude that $\varphi_1(p) > 0$ on B. To show that $\varphi_1(P)$ is actually positive in D we use the reasoning of case (a) of the proof of Theorem I, details of which will be omitted. Hence $\varphi_1(P)$ leads to a solution $u(P)$ of (5.1) and (5.2) with λ being the lowest eigenvalue ν_1 of the Stekloff problem (5.3) and (5.4).

To show that no other eigenvalue is admissible for (5.1) and (5.2) we use the orthogonality property

$$\int_B \varrho\,\varphi_m\,\varphi_n\,d\,S = 0$$

of the Stekloff eigenfunctions. Every one of these, except for $\lambda = \nu_1$, must have negative values on B, and the conclusion follows.

We note that the actual solution in each of these two theorems is unique if the lowest eigenvalue is simple.

The problem of this section has been studied by J. and J. Nitsche [4] in the two-dimensional case; they showed in addition that the solution is then unique.

6. The isothermic equation. The differential equation of isothermic surfaces is (7, p. 141)

$$\Delta u = K(u)\,(\nabla u)^2, \tag{6.1}$$

which is a particular case of the equation treated in § 3. We add here two remarks on the Neumann problem

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(p) \tag{6.2}$$

for this equation. First, since the transformation (3.5) is monotone and reduces (6.1) to the Laplace equation, the maximum and minimum values of the solution are attained on the boundary. The outward normal derivative is respectively non-negative and non-positive at these extreme points. Hence *the normal derivative* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *vanishes at some point of* B. If $q(P) \equiv 0$ in (5.1), we can find an estimate for the eigenvalue in (5.2) from this remark.

Second, if $K(u)$ is positive, the integral

$$\int_{B} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int_{D} K(u)\, (\nabla u)^2\, dV > 0,$$

unless $u = \text{const}$. Thus the average value of $g(p)$ in (6.2) is necessarily positive. Similarly if $K(u)$ is negative, the average value of $g(p)$ must also be negative. These remarks indicate that even in the regular case considered in § 3, the NEUMANN problem will involve conditions on the datum function.

References

[1] S. BERGMANN and M. SCHIFFER: Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type. Duke Math. J. **15**, 535—566 (1948). — [2] R. COURANT and D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik. Berlin, Vol. I, 1931; Vol. II, 1937. — [3] G. F. D. DUFF: A modified Dirichlet problem for a quasilinear elliptic equation, to appear. — [4] J. and J. NITSCHE: Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\, \varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$. Math. Ann. **126**, 69—74 (1953). — [5] J. LERAY and J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Ecole Norm. (3) **51**, 45—78 (1934). — [6] W. STEKLOFF: Sur la théorie des fonctions fondamentales. C. r. Acad. Sci. (Paris) **128**, 984—987 (1899). — [7] C. E. WEATHERBURN: Riemannian geometry and tensor calculus. Cambridge 1938.

(Eingegangen am 5. August 1955)

GRAUERT, H.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 38—75 (1956)

Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik*)

Von

HANS GRAUERT in Münster (Westf.)

Einleitung

Schon die ersten Untersuchungen in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen zeigten, daß im Gegensatz zur klassischen Theorie nicht jedes Teilgebiet des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n als analytisches Gebilde einer holomorphen Funktion auftritt[1]). Die analytischen Gebilde $\mathfrak{G}$ zeichnen sich den übrigen Gebieten des C^n gegenüber dadurch aus, daß in ihnen mindestens eine holomorphe Funktion existiert, die nicht über den Rand von $\mathfrak{G}$ hinaus fortsetzbar ist. Es ist darum nicht verwunderlich, wenn die Charakterisierung der Existenzgebiete von holomorphen Funktionen (Holomorphiegebiete) in den letzten beiden Jahrzehnten eine der Hauptaufgaben der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen gewesen ist. Zunächst zeigten 1932 P. THULLEN und H. CARTAN[2]), daß ein endliches Gebiet des C^n genau dann Holomorphiegebiet ist, wenn es holomorph konvex ist. Wir verdanken dann K. OKA die wesentliche Einsicht, daß die Existenzgebiete von holomorphen Funktionen auch durch *lokale Randeigenschaften* charakterisiert werden können[3]). Ein Beispiel einer solchen lokalen Randeigenschaft ist die Pseudokonvexität des Randes nach LEVI-KRZOSKA (vgl. Def. vor Satz 18).

P. LELONG benutzt zur Erforschung der Holomorphiegebiete plurisubharmonische Funktionen (vgl. Def. nach Satz 4). Er konnte nachweisen, daß ein Gebiet $\mathfrak{G}$ des C^n stets dann die Okaschen Randeigenschaften hat, wenn in ihm eine plurisubharmonische Funktion existiert, die bei Annäherung an den Rand von $\mathfrak{G}$ gegen $+\infty$ strebt[4]). Ferner bewies P. LELONG, daß eine

*) Die Resultate wurden in einer C. R.-Note angekündigt. Vgl. H. GRAUERT, Métrique kaehlérienne et domaines d'holomorphie. C. R. Acad. Sci. Paris **238**, 2048—2050 (1954).

[1]) Vgl. H. BEHNKE und P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3, Neuauflage: Chelsea Publ. Comp. New York 1948. Siehe hier besonders p. 70 und die dort angegebene Literatur.

[2]) H. BEHNKE und P. THULLEN, loc. cit.[1]), p. 73; ferner H. CARTAN und P. THULLEN, Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932).

[3]) K. OKA: Sur la théorie des fonctions de plusieurs variables. VI: Domaines pseudoconvexes. Tôhoku Math. J. II., Ser. **49**, 19—52 (1942).

[4]) P. LELONG: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. d'Analyse Math. **2**, 170—208 (1952); ferner: P. LELONG: Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Colloque Brüssel 1953, pp. 21—40.

in $\mathfrak{G}$ nach oben halbstetige Funktion R dann und nur dann plurisubharmonisch ist, wenn die Form $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ in jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ positiv semidefinit ist[5]). Die Ableitungen $\frac{\partial^2 R}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}$ sind dabei im Sinne der Theorie der „distribution" nach LAURENT SCHWARZ gebildet. Zweimalig stetig differenzierbare plurisubharmonische Funktionen R sind also Potentialfunktionen (positiv semidefiniter) Kählerscher Metriken[6]) $ds^2 = \sum \frac{\partial^2 R}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ (vgl. § 2).

Durch diese Forschungsergebnisse wird die Vermutung nahegelegt, daß es auch eine Eigenschaft der Kählerschen Metrik gibt, mit der sich die Holomorphiegebiete charakterisieren lassen. Eine Bestätigung der Vermutung dürfte — von einem geometrischen Standpunkt aus betrachtet — einiges Interesse verdienen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß in der *Vollständigkeit* der Kählerschen Metrik eine solche Eigenschaft gefunden ist. Dabei heißt eine in einem zusammenhängenden topologischen Raum $\mathfrak{X}$ definierte Metrik *vollständig, wenn es einen Punkt* $0 \in \mathfrak{X}$ *gibt, derart, daß die Entfernung von* 0 *und der Punkte* x_n *jeder beliebigen, sich in* $\mathfrak{X}$ *nicht häufenden Punktfolge mit wachsendem* n *gegen unendlich strebt.*

Wir legen unseren Untersuchungen komplexe Mannigfaltigkeiten[7]) zugrunde. Die Definition dieses Begriffes wird in § 1 gegeben. Im § 1 werden ferner einige bekannte Aussagen der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten zusammengestellt. Darüber hinaus wird gezeigt, daß in den von K. STEIN[8]) in die Literatur eingeführten *holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{V}$ *jede analytische Menge als simultanes Nullstellengebilde von höchstens* $n + 1$ *in* $\mathfrak{V}$ *holomorphen Funktionen auftritt* (Satz 2). Der § 2 ist dann der Kählerschen Metrik und deren wichtigsten Eigenschaften gewidmet. Im § 3 wird für holomorph-konvexe[9]) komplexe Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ folgender Satz bewiesen:

$\mathfrak{M}$ *trägt eine vollständige Kählersche Metrik, sofern in* $\mathfrak{M}$ *überhaupt eine Kählersche Metrik existiert.*

---

[5]) Vgl. P. LELONG, loc. cit.[4]) Brüssel, p. 26.

[6]) Vgl. die grundlegende Arbeit von E. KÄHLER: Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Hamb. Sem. Abh. **9**, 173—180 (1933).

[7]) Soweit bekannt ist, verwendet C. CARATHEODORY in seinem Züricher Kongreßvortrag 1932 den Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit zum ersten Male. Umfangreiche Untersuchungen der komplexen Mannigfaltigkeiten sind dann von B. ECKMANN, CH. EHRESMANN, H. HOPF, S. CHERN, W. WU, J. P. SERRE, K. KODAIRA, D. C. SPENCER u. a. durchgeführt worden.

[8]) Vgl. K. STEIN: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. **123**, 201—222 (1951) und die Arbeiten von H. CARTAN: Seminaire 1951—52, Exposé IX; Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque Brüssel (1953); ferner: J. P. SERRE, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque Brüssel 1953. In der französischen Literatur heißen holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten: variétés de Stein.

[9]) Zur Definition der Holomorphiekonvexität von komplexen Mannigfaltigkeiten vgl. H. CARTAN, loc. cit.[8]) Brüssel, p. 49.

Beispiele von komplexen Mannigfaltigkeiten, in denen eine vollständige Kählersche Metrik definiert werden kann, sind die holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten (Satz 7).

Im folgenden prüfen wir, *ob umgekehrt eine komplexe Mannigfaltigkeit mit vollständiger Kählerscher Metrik holomorph konvex ist.* Es zeigt sich leicht, daß das nicht immer richtig ist. So existiert selbst noch in jeder komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$, die aus einer n-dimensionalen holomorphvollständigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$ durch Herausnahme einer analytischen Menge[10]) $A \neq \mathfrak{V}^n$ entstanden ist, eine vollständige Kählersche Metrik (Satz A). $\mathfrak{M}^n$ ist, wenn A einen irreduziblen Bestandteil der (komplexen) Dimension $k \leqq n-2$ enthält, nicht mehr holomorph-konvex[11]).

Jedoch sind Gebiete über dem C^n, deren Ränder glatt sind, holomorph-konvex, wenn in ihnen eine vollständige Kählersche Metrik gegeben ist. In dieser Gebietsklasse werden also die Holomorphiegebiete durch die Existenz einer vollständigen Kählerschen Metrik charakterisiert. Es gilt hier allgemein:

Ein Gebiet $\mathfrak{G}$ über dem C^n (mit glattem Rande) ist dann und nur dann holomorph-konvexes Holomorphiegebiet[12]), *wenn in $\mathfrak{G}$ eine vollständige Kählersche Metrik definiert werden kann (vgl. Satz C).*

Um zu diesem Resultat zu gelangen, wird zuerst eine Untersuchung an Reinhardtschen Körpern[13]) durchgeführt (§ 4). Dabei ergibt sich, daß ein Reinhardtscher Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik aus einem Holomorphiegebiet durch Herausnahme von Achsen $\{z_{i_1} = z_{i_2} = \cdots = z_{i_s} = 0\}$, $i_\nu = 1, \ldots, n$, entstanden ist (Satz B). Zur Behandlung allgemeinerer Fälle zeigen wir dann, daß alle Gebiete des C^n mit vollständiger Kählerscher Metrik einem Kontinuitätssatz genügen müssen (§ 5, Satz 13). Dieser Kontinuitätssatz steht in enger Beziehung zu einer charakteristischen Eigenschaft der Kählerschen Metrik:

Ein Hermitesche Metrik Λ in einem Gebiet $\mathfrak{G} \subset C^n$ ist dann und nur dann Kählersch, wenn in bezug auf Λ alle in $\mathfrak{G}$ analytischen Mengen Minimalflächengebilde sind (Satz 14)[14]).

---

[10]) Vgl. zum Begriff der analytischen Menge: R. Remmert und K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

[11]) Nach einem bekannten Fortsetzungssatz läßt sich jede außerhalb einer höchstens $(n-2)$-dimensionalen analytischen Menge $A \subset \mathfrak{V}^n$ holomorphe Funktion in die Punkte von A holomorph fortsetzen. $\mathfrak{V}^n - A$ ist deshalb sicher nicht holomorphkonvex. Vgl. dazu: H. Behnke und P. Thullen, loc. cit.[1]), p. 73, Satz 37.

[12]) Es ist keineswegs leicht einzusehen, ob jedes Holomorphiegebiet über dem C^n holomorphkonvex ist. Während das Problem schon 1932 von H. Behnke und P. Thullen für schlichte und endlichblättrige Gebiete gelöst wurde, konnte erst K. Oka 1953 zeigen, daß jedes unverzweigte Holomorphiegebiet über dem C^n holomorphkonvex ist. Vgl. K. Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX.-Domaines finis sans point critique intérieur. Japanese J. Math. 1953.

[13]) Vgl. Behnke-Thullen, loc. cit.[1]), p. 33.

[14]) Schon 1905 zeigte K. Kommerell, daß alle analytischen Flächen im C^2 in bezug auf die euklidische Metrik Minimalflächen sind. Vgl. K. Kommerell, Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Ann. **60**, 548—596 (1905), insbesondere pp. 586ff.

Satz 13 wird nun auf Hartogssche Körper[15]) angewendet (§ 6). Es zeigt sich, daß diese unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen Holomorphiegebiete sind, wenn in ihnen eine vollständige Kählersche Metrik existiert (Satz 17).

Im allgemeinen Fall von Gebieten $\mathfrak{G}$ über dem C^n kommt man durch lokale Approximation mit Hartogsschen Körpern zum Ziele. Es gelingt auf diese Weise, aus der Existenz einer vollständigen Kählerschen Metrik in $\mathfrak{G}$ auf die Pseudokonvexität des Randes von $\mathfrak{G}$ (im Sinne von LEVI-KRZOSKA) zu schließen. Nach Satz 18 ist dann in $\mathfrak{G}$ die reellwertige Funktion $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ plurisubharmonisch, wobei $d_{\mathfrak{G}}$ den (euklidischen) Abstand der Punkte von $\mathfrak{G}$ vom Rande bezeichnet. Aus neueren Untersuchungen von K. OKA[16]) folgt nun, daß $\mathfrak{G}$ Holomorphiegebiet ist, und damit der vorhin zitierte Satz C.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle den Herren Professoren Dr. H. BEHNKE und Dr. B. ECKMANN für das stete Wohlwollen, mit dem sie meine Arbeit gefördert haben, meinen Dank auszusprechen. Herrn Dozenten Dr. F. SOMMER sei für viele wertvolle Hinweise gedankt.

§ 1. Komplexe Mannigfaltigkeiten

Wir stellen in diesem Paragraphen grundlegende Begriffe zusammen. Es ist zweckmäßig, unseren Betrachtungen *komplexe Mannigfaltigkeiten* zugrunde zu legen. Zu dem Zweck führen wir zunächst den Begriff der *komplex-analytischen Struktur* auf $2n$-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{Q}^n$ ein.

Es sei $\{\mathfrak{U}_j\}$ ($j \varepsilon I$, I eine Indexmenge) ein überdeckendes System von offenen Mengen in $\mathfrak{Q}^n$, die durch topologische Abbildungen $\Psi_j : \mathfrak{U}_j \to \mathfrak{G}_j$ auf Gebiete $\mathfrak{G}_j$ des komplexen Zahlenraumes mit den Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ bezogen sind. Ein Paar $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ heiße ein *lokales Koordinatensystem* in $\mathfrak{Q}$. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j$ zweier Umgebungen $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_j (i, j \varepsilon I)$ nicht leer, so sei die Abbildung $\Psi_i \Psi_j^{-1} : \Psi_j(\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j) \to \Psi_i(\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j)$ ferner holomorph. Wir sagen, zwei lokale Koordinatensysteme *hängen holomorph zusammen*.

Wir können nun zeigen, daß sich eine solche Menge von lokalen Koordinatensystemen zu einer maximalen Menge ergänzen läßt. Durch die $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ wird auf $\mathfrak{Q}^n$ der Begriff der holomorphen Funktion und damit der Begriff der holomorphen Abbildung in den C^n definiert. Ist daher $\mathfrak{U}$ eine beliebige offene Menge von $\mathfrak{Q}^n$ und Ψ eine topologische holomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf ein Gebiet $\mathfrak{G}$ des C^n, so ist $(\mathfrak{U}, \Psi)$ ein lokales Koordinatensystem, das mit allen $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $(j \varepsilon I)$ durch holomorphe Abbildungen $\Psi \Psi_j^{-1}$ zusammenhängt. Indem wir dann alle so konstruierten Koordinatensysteme zu der Menge $\{(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)\}$ hinzunehmen, erhalten wir Maximalität.

---

[15]) Vgl. BEHNKE-THULLEN, loc. cit.[1]), p. 35.

[16]) K. OKA, loc. cit.[12]). Vgl. ferner H. BREMERMANN: Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **128**, 63—91 (1954). F. NORGUET: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes des plusieurs variables complexes. Bull. Soc. Math. France **82**, 137—159 (1954).

Def. 1. *Eine komplex-analytische Struktur auf $\mathfrak{Q}^n$ ist ein maximales System von holomorph zusammenhängenden lokalen Koordinatensystemen $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, wobei die $\mathfrak{U}_j$ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q}^n$ überdecken.*

Def. 2. *Eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ ist eine $2n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit einer komplex-analytischen Struktur.*

Ist $\{(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)\}$, $j \in I$, eine komplex-analytische Struktur in $\mathfrak{Q}^n$ und bezeichnet $\bar{\Psi}_j$ das konjugiert Komplexe der Abbildung Ψ_j, so hängen offenbar auch alle Koordinatensysteme $(\mathfrak{U}_j, \bar{\Psi}_j)$ holomorph zusammen. Wir erhalten auf diese Weise eine neue komplex-analytische Struktur in $\mathfrak{Q}^n$, die wir die zu $\{(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)\}$ *konjugiert komplexe Struktur* nennen wollen. Die mit dieser Struktur versehene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q}^n$ heiße die zu $\mathfrak{M}^n$ *konjugiert komplexe Mannigfaltigkeit* $^*\mathfrak{M}^n$.

Die Begriffe der holomorphen Abbildung von komplexen Mannigfaltigkeiten ineinander, der analytischen Menge, deren Dimension usw. lassen sich nun in bekannter Weise definieren[17]). Angemerkt sei hier nur, daß eine irreduzible analytische Menge in $\mathfrak{M}^n$, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, in natürlicher Weise eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit ist.

Wir wollen fortan immer voraussetzen, daß bei jeder hier betrachteten komplexen Mannigfaltigkeit das System der offenen Mengen eine abzählbare Basis[18]) besitzt. Für diese Mannigfaltigkeiten definieren wir den Begriff der *Holomorphiekonvexität*. Ist B eine beliebige Menge in $\mathfrak{M}^n$, so bilden die Punkte $x \in \mathfrak{M}^n$, in denen für alle in $\mathfrak{M}^n$ holomorphen Funktionen $f(x)$ die Ungleichung $|f(x)| \leq \max |f(B)|$ gilt, eine abgeschlossene Menge $\hat{B}$, die die *holomorph-konvexe Hülle* von B genannt werde.

Def. 3. *Eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ heißt holomorphkonvex, wenn die holomorph-konvexe Hülle $\hat{B}$ jeder relativkompakten Menge $B \subset \mathfrak{M}^n$ kompakt ist.*

Sind nun $f_1 \ldots f_k$ endlich viele in $\mathfrak{M}^n$ holomorphe Funktionen, so bilden die Punkte $x \in \mathfrak{M}^n$ mit $|f_\nu(x)| < 1$, $\nu = 1 \ldots k$, einen evtl. leeren Bereich. Jede relativkompakte zusammenhängende Komponente dieses Bereiches nennen wir ein *analytisches Polyeder* $\mathfrak{P}$. Die Funktionen $f_1 \ldots f_k$ heißen die *definierenden Funktionen* von $\mathfrak{P}$. Man zeigt in bekannter Weise leicht unter Verwendung einer abzählbaren Basis für die offenen Mengen von $\mathfrak{M}^n$:

Satz 1. *Eine holomorph-konvexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ ist durch eine Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, ausschöpfbar, bei der die $\mathfrak{P}_\nu$ relativkompakt in den $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ enthalten sind (in Zeichen $\mathfrak{P}_\nu \Subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$).*

In den §§ 4, 6 und 7 der vorliegenden Arbeit werden *komplexe Mannigfaltigkeiten (= Gebiete) über dem Raum C^n* von n komplexen Veränderlichen betrachtet. Dabei heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ über dem C^n liegend, wenn in ihr n holomorphe Funktionen $p_1 \ldots p_n$ gegeben sind, die eine Umgebung eines jeden Punktes $x \in \mathfrak{M}^n$ eineindeutig in den C^n abbilden. Wir nennen $p_1 \ldots p_n$ die $\mathfrak{M}^n$ *dem C^n überlagernden Funktionen*, die durch $p_1 \ldots p_n$ definierte Abbildung die *Projektion Φ von $\mathfrak{M}^n$ auf die Grundpunkte*.

---

[17]) Vgl. R. REMMERT und K. STEIN, loc. cit.[10]).

[18]) Dieser Begriff bedeutet, daß ein abzählbares System S von offenen Mengen in $\mathfrak{M}^n$ existiert, derart, daß jede offene Menge von $\mathfrak{M}^n$ Vereinigung von gewissen Mengen aus S ist.

Für die Klasse der holomorph-konvexen Mannigfaltigkeiten über dem C^n gelten Sätze, die an Eigenschaften der offenen Riemannschen Flächen erinnern. Unter anderem ist dort die erste Aussage von COUSIN richtig[19]). Ferner läßt sich jede analytische Menge als Nullstellengebilde einer Menge auf ganz $\mathfrak{M}^n$ definierter holomorpher Funktionen darstellen. Bei abstrakten komplexen Mannigfaltigkeiten, das sind komplexe Mannigfaltigkeiten, die nicht über dem C^n liegen, ist vieles ganz anders. Wendet man im Nullpunkt des Raumes C^2 der Veränderlichen z_1, z_2 den von H. HOPF angegebenen σ-Prozeß[20]) an, so erhält man eine holomorph-konvexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^2$, in der eine analytische Menge A konstruiert werden kann, die nicht gleichzeitiges Nullstellengebilde von in $\mathfrak{M}^2$ holomorphen Funktionen ist. Nach H. HOPF kann nämlich $\mathfrak{M}^2$ als Fläche $w = \frac{z_1}{z_2}$ im kartesischen Produkt des C^2 mit der Riemannschen Zahlenkugel der Veränderlichen w aufgefaßt werden. Diese Fläche ist in natürlicher Weise durch die holomorphe Abbildung $\alpha(w, z_1, z_2) = (z_1, z_2)$ auf den C^2 bezogen. Das Nullstellengebilde der in $\mathfrak{M}^2$ holomorphen Funktionen $z_1\alpha$ enthält außer der durch α auf den Nullpunkt des C^2 abgebildeten eindimensionalen analytischen Menge A_1 noch eine irreduzible analytische Menge A_2, die durch α eineindeutig auf die Ebene $z_1 = 0$ im C^2 bezogen wird. Jede in $\mathfrak{M}^2$ holomorphe Funktion f, die auf A_2 verschwindet, hat auch auf A_1 keine von Null verschiedenen Werte, da $f\alpha^{-1}$ im C^2 holomorph ist und dort im Nullpunkt verschwindet. $A = A_2$ ist also eine analytische Menge mit der verlangten Eigenschaft.

Damit auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ ähnliche Sätze wie auf Mannigfaltigkeiten über dem C^n gelten, hat K. STEIN[21]) die Existenz von hinreichend vielen holomorphen Funktionen auf $\mathfrak{M}^n$ gefordert. Nach ihm heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$ *holomorph vollständig*, wenn folgendes gilt:

1. *Zu zwei beliebigen Punkten x, $y \in \mathfrak{V}^n$ gibt es immer eine auf $\mathfrak{V}^n$ holomorphe Funktion, so daß $f(x) \neq f(y)$ ist,*
2. *zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{V}^n$ gibt es n holomorphe Funktionen, die eine Umgebung von x eineindeutig in den C^n abbilden,*
3. *$\mathfrak{V}^n$ ist holomorph-konvex,*
4. *das System der offenen Mengen von $\mathfrak{V}^n$ hat eine abzählbare Basis.*

Beispiele von holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten sind die unverzweigten Holomorphiegebiete über dem C^n[22]).

Wir betrachten eine beliebige analytische Menge A in einer holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$. In jedem Punkt $x \in \mathfrak{V}^n$ bilden die in x holomorphen und auf A verschwindenden Funktionen ein Ideal I_x im Ring der in x holomorphen Funktionen. Nach H. CARTAN und K. OKA ist diese

[19]) Vgl. H. CARTAN, loc. cit.[8]) Brüssel, hier p. 51.

[20]) H. HOPF: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Math. appl. Serie V, **10**, 169—182 (1951), sowie H. HOPF: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helvet. **29**, 132—155 (1955).

[21]) K. STEIN, loc. cit. [8]).

[22]) Das ergibt sich unmittelbar aus den Ergebnissen einer Arbeit von K. OKA, loc. cit. [12]).

Verteilung von Idealen eine *kohärente analytische Garbe*[23]) (faisceau analytique) über $\mathfrak{B}^n$. Es folgt deshalb aus einem sehr allgemein gehaltenen Satz von H. Cartan als Spezialfall[24]):

Das Ideal I der auf A verschwindenden Funktionen im Ringe der in $\mathfrak{B}^n$ holomorphen Funktionen erzeugt in jedem Punkte $x \in \mathfrak{B}^n$ das Ideal I_x.

Das bedeutet aber auch, daß A das simultane Nullstellengebilde der Funktionen aus I ist. Diese Aussage läßt sich verschärfen:

Satz 2. *A stimmt mit den gleichzeitigen Nullstellen von höchstens $n+1$ Funktionen $f_0 \ldots f_n$ aus I überein*[25]).

Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 1. *Ist x_ν, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, eine beliebige Punktfolge aus $\mathfrak{B}^n - A$, so gibt es eine holomorphe Funktion $g \in I$ derart, daß $f(x_\nu) \neq 0$ ist.*

Beweis. Man wähle eine $\mathfrak{B}^n$ ausschöpfende Folge von Bereichen B_ν, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, bei der $B_\nu \subset B_{\nu+1}$ liegt, man setze $g = \lim g_\nu$ und wähle für g_1 eine Funktion aus I mit $g_1(x_1) \neq 0$. Ferner sei $g_{\nu+1} = g_\nu$, falls $g_\nu(x_{\nu+1}) \neq 0$ ist. Gilt $g_\nu(x_{\nu+1}) = 0$, so werde $g_{\nu+1} = g_\nu + h_\nu$ gesetzt, wobei h_ν eine Funktion aus I mit folgenden Eigenschaften ist:

1. $h_\nu(x_{\nu+1}) \neq 0$,
2. $\sup |h_\nu(B_\nu)| < 2^{-\nu}$,
3. $\max\limits_{\mu=1\ldots\nu} |h_\nu(x_\mu)| < 3^{-\nu} \min\limits_{\mu=1\ldots\nu} |g_\nu(x_\mu)|$.

Nach Konstruktion konvergiert die Folge g_ν gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{B}^n$ gegen eine Funktion g, die auf allen x_ν nicht verschwindet. Da ein durch eine analytische Menge erzeugtes Ideal abgeschlossen ist, gehört g zu I.

Nun zum Beweis von Satz 2! Wir wählen für f_0 eine nicht identisch verschwindende Funktion aus I, sofern nicht der triviale Fall vorliegt, daß A mit $\mathfrak{B}^n$ übereinstimmt. Das Nullstellengebilde von f_0 zerfällt in (evtl. endlich viele) $n-1$-dimensionale, irreduzible Komponenten $K_\mu^{(1)}$, $\mu = 1, 2, 3 \ldots$ Wir konstruieren nun — falls noch $A \neq \bigcup K_\mu^{(1)}$ — eine Folge x_ν so, daß $x_\nu \in \mathfrak{B}^n - A$ und jede Komponente $K_\nu^{(1)}$, die nicht ganz zu A gehört, wenigstens ein x_ν enthält. Wird dann nach Hilfssatz 1 g konstruiert und $f_1 = g$ gesetzt und zerfällt das simultane Nullstellengebilde von f_0, f_1 in die irreduziblen Komponenten $K_\mu^{(2)}$, $\mu = 1, 2, 3 \ldots$, so liegen höchstens $n-2$-dimensionale $K_\mu^{(2)}$ nicht ganz in A. Zu diesen kann man wieder eine Funktion g konstruieren. Das gleichzeitige Nullstellengebilde von $f_0, f_1, f_2 = g$ enthält dann höchstens $n-3$-dimensionale Komponenten, die nicht ganz zu A gehören. Nach höchstens n Schritten hat man Funktionen $f_0 \ldots f_n$ erhalten, so daß durch die Gleichungen $f_0 = \ldots f_n = 0$ genau A beschrieben wird.

§ 2. Metriken

Wir nennen eine Metrik A in einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ *vollständig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in \mathfrak{M}^n$ gibt, derart, daß die Entfernungen

[23]) Vgl. H. Cartan: Idéaux et modules des fonctions analytiques des variables complexes. Bull. Soc. Math. France 78, 28—64 (1950).

[24]) Vgl. H. Cartan, loc. cit.[8]) Brüssel, théorème A.

[25]) Der Satz läßt sich wahrscheinlich auf n holomorphe Funktionen verschärfen.

von x_0 und der Punkte x_ν, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, jeder beliebigen sich in $\mathfrak{M}^n$ nicht häufenden Punktfolge aus $\mathfrak{M}^n$ mit wachsendem ν gegen unendlich streben. Man sieht leicht ein, daß diese Eigenschaft einer Metrik in $\mathfrak{M}^n$ nicht von der Wahl des Punktes $x_0 \in \mathfrak{M}^n$ abhängt. Ist $\mathfrak{M}^n$ ein Gebiet über dem C^n und ist $y \in C^n$ ein Randpunkt[26]) von $\mathfrak{M}^n$, so heißt y in bezug auf Λ ein *unendlichferner Randpunkt*, wenn die Entfernungen eines Punktes $x_0 \in \mathfrak{M}^n$ und der Punkte x_ν, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, jeder in $\mathfrak{M}^n$ gegen y konvergierenden Punktfolge mit wachsendem ν unbeschränkt groß werden. In einem beschränkten Gebiet des C^n ist eine Metrik genau dann vollständig, wenn alle Randpunkte des Gebietes unendlich fern sind.

In den folgenden Paragraphen der Arbeit treten vor allem *Hermitesche* und *Kählersche Metriken* auf. Durch eine in $\mathfrak{M}^n$ gegebene Hermitesche Metrik $ds^2 = \sum\limits_{\nu,\mu=1}^{n} g_{\nu\bar\mu} dz_\nu d\bar z_\mu$ wird in bekannter Weise die Länge einer differenzierbaren Kurve in $\mathfrak{M}^n$ definiert. Unter der Entfernung zweier Punkte $x, y \in \mathfrak{M}^n$ verstehen wir dann die untere Grenze der Längen aller differenzierbaren Kurven, die x mit y verbinden. Es sei fortan — sofern es nicht ausdrücklich anders gefordert wird — von allen Hermiteschen Metriken vorausgesetzt, daß die $g_{\nu\bar\mu}$ reell-analytisch von den Koordinaten jedes lokalen Koordinatensystems $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, von $\mathfrak{M}^n$ abhängen und somit ein reell-analytisches, zweifach kovariantes, Hermitesches Tensorfeld in $\mathfrak{M}^n$ bilden. Ferner sei die Form $\Sigma g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu d\bar z_\mu$ — sofern nicht anders behauptet — in jedem Punkte von $\mathfrak{M}^n$ positiv definit. Einer Hermiteschen Metrik Λ: $ds^2 = \Sigma g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu d\bar z_\mu$ läßt sich die alternierende Differentialform $\Omega = i\, \Sigma g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu \wedge d\bar z_\mu$ koordinateninvariant zuordnen. Offenbar drückt $d\,\Omega = 0$ eine besondere Eigenschaft von Λ aus. Hermitesche Metriken mit dieser Eigenschaft heißen Kählersche Metriken. Nach E. Kähler[27]) sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1. *Ω ist geschlossen (in Zeichen $d\,\Omega = 0$),*
2. *Es ist in jedem $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$:*

$$\frac{\partial g_{\nu\bar\mu}}{\partial z_\lambda^{(j)}} = \frac{\partial g_{\lambda\bar\mu}}{\partial z_\nu^{(j)}} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial g_{\nu\bar\mu}}{\partial \bar z_\lambda^{(j)}} = \frac{\partial g_{\nu\bar\lambda}}{\partial \bar z_\mu^{(j)}}, \qquad \lambda, \mu, \nu = 1 \ldots n,$$

(Kählersche Bedingungen)

3. *Es gibt zu jedem Punkt $x \in \mathfrak{M}^n$ ein lokales Koordinatensystem $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ und in $\mathfrak{U}_j$ eine reell-analytische Funktion R (Potential), so daß*

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z_\nu^{(j)}\, \partial \bar z_\mu^{(j)}} = g_{\nu\bar\mu}$$

gilt.

Dabei sind die Koordinaten von $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ mit $z_1^{(j)} \ldots z_n^{(j)}$ bezeichnet. $\dfrac{\partial^2 D}{\partial z_\nu^{(j)}\, \partial \bar z_\mu^{(j)}}$; $D = R, g_{\nu\bar\mu} \ldots$; ist eine abkürzende Schreibweise für $\dfrac{\partial^2 (D\, \Psi_j^{-1})}{\partial z_\nu^{(j)}\, \partial \bar z_\mu^{(j)}} \circ \Psi_j$. Wir werden fortan immer von dieser Schreibweise Gebrauch machen.

[26]) Zur Def. vgl. die ersten Zeilen von § 7.

[27]) Vgl. E. Kähler, loc. cit.[6]).

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3. *Ist R eine 2mal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion in $\mathfrak{M}^n$, so ist dort $\alpha = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$ mit $g_{\nu\bar\mu} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial z_\nu^{(j)}\, \partial \bar z_\mu^{(j)}}$ in jedem $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, eine koordinateninvariante Hermitesche Form. $\Omega = i\, \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu \wedge d\bar z_\mu$* ist eine *geschlossene Differentialform.*

Dabei nennen wir eine Hermitesche Form α koordinateninvariant, wenn $g_{\nu\bar\mu}$ ein zweifach kovariantes Tensorfeld ist. Ist α positiv definit für alle Punkte von $\mathfrak{M}^n$, so ist $ds^2 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu} dz_\nu d\bar z_\mu$ eine Kählersche Metrik in $\mathfrak{M}^n$ (nicht notwendig reell-analytisch).

Beim Beweis von Satz 3 ist zu zeigen, daß $g_{\nu\bar\mu}$ ein kovariantes Tensorfeld ist und daß $d\,\Omega = 0$ gilt. Beide Behauptungen ergeben sich durch simple Rechnungen. Es sei darum hier auf eine Ausführung des Beweises verzichtet. α heißt die *durch R erzeugte Hermitesche Form* und $ds^2 = \alpha$, wenn α positiv definit ist, die *durch R erzeugte Kählersche Metrik*. Es interessiert die Frage, wann α positiv definit ist. Wir zeigen:

Satz 4. *Eine 2mal stetig differenzierbare Funktion R in $\mathfrak{M}^n$ ist genau dann plurisubharmonisch, wenn die durch R erzeugte Form α in allen Punkten von $\mathfrak{M}^n$ positiv semidefinit ist.*

Zunächst sei an die Definition der plurisubharmonischen Funktion erinnert. Eine reellwertige, *nach oben halbstetige* ($\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, R(x) \leq R(x_0)$) *Funktion R in $\mathfrak{M}^n$ heißt plurisubharmonisch, wenn die Funktion $R\,\tau$ im offenen Einheitskreis K der z-Ebene immer subharmonisch*[28]) *ist.* Dabei ist τ eine beliebige holomorphe Abbildung von K in $\mathfrak{M}^n$. Ist R nun plurisubharmonisch, 2mal stetig differenzierbar in $\mathfrak{M}^n$ und bildet τ den Einheitskreis K in ein $\mathfrak{U}_j$, $j \in I$, ab, so gilt:

$$\frac{\partial^2 (R\tau)}{\partial z\, \partial \bar z} = \Sigma \frac{\partial^2 R}{\partial z_\nu^{(j)} \partial \bar z_\mu^{(j)}} \frac{\partial z_\nu^{(j)}}{\partial z} \frac{\partial \bar z_\mu^{(j)}}{\partial \bar z} \geq 0\,,$$

wenn durch $z_1^{(j)} \ldots z_n^{(j)}$ die Koordinaten von $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ bezeichnet werden und wenn $z_\lambda^{(j)}(z)$, $\lambda = 1 \ldots n$, die Abbildung $\Psi_j \tau$ von K in den C^n beschreibt. Da τ und damit die Ableitungen $\dfrac{\partial z_\lambda^{(j)}}{\partial z}$ beliebig gewählt werden können, ist die durch R erzeugte Hermitesche Form α positiv semidefinit. Die Umkehrung unserer Beweisschritte zeigt die Gültigkeit von Satz 4 in der anderen Richtung.

In den folgenden Paragraphen betrachten wir des öfteren das Verhalten von Kählerschen Metriken unter holomorphen Abbildungen. Zu dem Zwecke beweisen wir:

Satz 5. *Seien $\mathfrak{M}^n$, $'\mathfrak{M}'^n$ zwei komplexe Mannigfaltigkeiten, $\tau: \mathfrak{M}^n \to {'\mathfrak{M}'^n}$ eine holomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}^n$ in $'\mathfrak{M}'^n$ und $'\Lambda: ds^2 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$ eine Kählersche Metrik in $'\mathfrak{M}'^n$. Dann gibt es in $\mathfrak{M}^n$ eine eindeutig bestimmte positiv semidefinite Kählersche Metrik $\Lambda = {'\Lambda} \circ \tau$, derart, daß τ in bezug auf Λ, $'\Lambda$ (punktal) isometrisch ist. Ist ferner $'R$ ein Potential von $'\Lambda$ in $'\mathfrak{M}'^n$, so ist $R = {'R}\,\tau$ ein Potential von Λ.*

[28]) Eine Definition der subharmonischen Funktion findet sich bei H. Behnke und P. Thullen, loc. cit.[1]), p. 47.

Wir nennen Λ die *durch τ nach $\mathfrak{M}^n$ übertragene Metrik* $'\Lambda$.

Beweis von Satz 5. Die (lokale) Maßbestimmung von $'\mathfrak{M}'^n$ wird in natürlicher Weise nach $\mathfrak{M}^n$ übertragen, so daß τ in bezug auf $'\Lambda$ und die so in $\mathfrak{M}^n$ gewonnene Metrik Λ eine isometrische Abbildung ist. Λ ist in $\mathfrak{M}^n$ Hermitesch, wie folgende Betrachtung lehrt:

Es sei $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, ein lokales Koordinatensystem von $\mathfrak{M}^n$, das durch τ in die offene Menge $'\mathfrak{U}_k$ eines lokalen Koordinatensystems $('\mathfrak{U}_k, '\Psi_k)$, $k \in 'I$, von $'\mathfrak{M}'^n$ abgebildet wird. Die Abbildung $'\Psi_k \tau \Psi_j^{-1}: \mathfrak{G}_j \to '\mathfrak{G}_k$ des Gebietes $\mathfrak{G}_j = \Psi_j(\mathfrak{U}_j)$ des Raumes der Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ in das Gebiet $'\mathfrak{G}_k = '\Psi_k('\mathfrak{U}_k)$ des Raumes der Veränderlichen $'z_1 \ldots 'z_n$ werde durch $'z_\lambda = f_\lambda(z_1 \ldots z_n)$, $\lambda = 1 \ldots 'n$, beschrieben. In $\mathfrak{U}_j$ wird dann Λ durch die positiv semidefinite Hermitesche Form $ds^2 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, d z_\nu\, d\bar z_\mu$ mit

$$g_{\nu\bar\mu} = \Sigma\, 'g_{\gamma\bar\delta}\,(\tau)\,\frac{\partial' z_\gamma}{\partial z_\nu}\,\frac{\partial' \bar z_\delta}{\partial \bar z_\mu}$$

gegeben. Da jeder Punkt von $\mathfrak{M}^n$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}_j$ mit den verlangten Eigenschaften enthalten ist, ist Λ Hermitesch auf ganz $\mathfrak{M}^n$. Die übrigen Aussagen des Satzes 5, daß Λ Kählersch ist und daß R ein Potential von Λ ist, kann man durch eine simple Rechnung beweisen. Auf eine Durchführung sei hier verzichtet.

§ 3. Komplexe Mannigfaltigkeiten mit vollständiger Kählerscher Metrik

Man kann auf einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ die Existenz von holomorphen Funktionen zur Konstruktion einer Kählerschen Metrik ausnutzen. Ist f eine in $\mathfrak{M}^n$ holomorphe Funktion, so ist dort bekanntlich $f\bar f$ plurisubharmonisch und erzeugt darum nach Satz 4 in $\mathfrak{M}^n$ eine positiv semidefinite Form $\alpha = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$. Ferner ergibt sich aus Satz 3. $ds^2 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$ ist eine positiv semidefinite Kählersche Metrik. Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz 2. *Sei in $\mathfrak{M}^n$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$, gegeben, derart, daß in bezug auf jede relativ kompakte Teilmenge $B \subset \mathfrak{M}^n$ die Summe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sup f_\varkappa(B)\,\overline{f_\varkappa(B)}$ konvergiert. Dann strebt $\Sigma\, f_\varkappa(x)\,\overline{f_\varkappa(x)}$ im Innern von $\mathfrak{M}^n$ gleichmäßig gegen eine reell-analytische Grenzfunktion R_0. Die Summe der durch die $f_\varkappa \bar f_\varkappa$ in $\mathfrak{M}^n$ erzeugten Hermiteschen Formen $\alpha_\varkappa = \Sigma\, g^{(\varkappa)}_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$ konvergiert im Innern von $\mathfrak{M}^n$ gleichmäßig gegen die durch R_0 erzeugte Hermitesche Form $\alpha_0 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu}\, dz_\nu\, d\bar z_\mu$. Diese ist positiv semidefinit.*

Dabei sagen wir, eine Folge von Funktionen $R_\varkappa$ konvergiert im Innern von $\mathfrak{M}^n$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion R_0, wenn $R_\varkappa$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{M}^n$ gleichmäßig konvergiert. Es bedeutet ferner, die Summe der Hermiteschen Formen $\alpha_\varkappa$ konvergiert im Innern von $\mathfrak{M}^n$ gleichmäßig gegen α_0, daß im Innern von jedem lokalen Koordinatensystem $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, die Summe $\Sigma\, g^{(\varkappa)}_{\nu\bar\mu}$ gleichmäßig gegen $g_{\nu\bar\mu}$ strebt.

Beweis von Hilfssatz 2. Das Konjugiert-Komplexe einer in $\mathfrak{M}^n$ holomorphen Funktion ist in bezug auf die zur komplex-analytischen Struktur von $\mathfrak{M}^n$ konjugiert-komplexe Struktur holomorph. Wir erhalten daher im

kartesischen Produkt $\mathfrak{M}^n \times {}^*\mathfrak{M}^n$ von $\mathfrak{M}^n$ mit der zu $\mathfrak{M}^n$ konjugiert-komplexen Mannigfaltigkeit ${}^*\mathfrak{M}^n$ eine Folge holomorpher Funktionen $'R_\varkappa$, wenn wir dort $'R_\varkappa(x, {}^*x) = f_\varkappa(x)\,\overline{f_\varkappa({}^*x)}$ setzen. Nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes konvergiert im Innern von $\mathfrak{M}^n \times {}^*\mathfrak{M}^n$ die Summe $\Sigma\, 'R_\varkappa$ gleichmäßig. Ist $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, ein beliebiges Koordinatensystem von $\mathfrak{M}^n$ und bezeichnet $\mathfrak{U}_j \times \mathfrak{U}_j$ das topologische Produkt von $\mathfrak{U}_j$ mit sich selbst und $\Psi_j \times \overline{\Psi}_j$ das kartesische Produkt der Abbildung Ψ_j mit der konjugiert-komplexen Abbildung $\overline{\Psi}_j$, so ist $(\mathfrak{U}_j \times \mathfrak{U}_j,\ \Psi_j \times \overline{\Psi}_j)$ ein lokales Koordinatensystem von $\mathfrak{M}^n \times {}^*\mathfrak{M}^n$. Die Koordinaten von $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$ seien mit $z_1 \ldots z_n$, die von $(\mathfrak{U}_j, \overline{\Psi}_j)$ mit $w_1 \ldots w_n$ und dementsprechend die Koordinaten von $(\mathfrak{U}_j \times \mathfrak{U}_j,\ \Psi_j \times \Psi_j)$ mit $z_1 \ldots z_n,\ w_1 \ldots w_n$ bezeichnet. Da $\Sigma\, 'R_\varkappa$ im Innern von $\mathfrak{U}_j \times \mathfrak{U}_j$ gleichmäßig konvergiert, folgt

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} {}'R_\varkappa}{\partial z_\nu \partial w_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\partial^2\, 'R_\varkappa}{\partial z_\nu \partial w_\mu}.$$

Die Summe $\Sigma \dfrac{\partial^2\, 'R_\varkappa}{\partial z_\nu \partial w_\mu}$ konvergiert gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{U}_j \times \mathfrak{U}_j$. Bekanntlich erhält man eine Reihenentwicklung der Funktionen $R_0 = \Sigma f_\varkappa \overline{f}_\varkappa$ bzw. $R_\varkappa = f_\varkappa \overline{f}_\varkappa$ um jeden Punkt $(z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \mathfrak{U}_j$ nach Potenzen von $z_\lambda, \overline{z}_\lambda$, wenn man $'R = \Sigma\, 'R_\varkappa$ bzw. $'R_\varkappa$ in $U_j \times U_j$ nach Potenzen von z_λ, w_λ entwickelt und nachher die w_λ durch die $\overline{z}_\lambda$ ersetzt. Daher gilt:

1. R_0 ist reell-analytisch in $\mathfrak{U}_j$,

2. $\dfrac{\partial R_0}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} = \Sigma \dfrac{\partial^2 R_\varkappa}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu}$,

3. $\Sigma \dfrac{\partial^2 R_\varkappa}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} = \sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} g_{\nu\overline{\mu}}^{(\varkappa)}$ konvergiert gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{U}_j$. Da diese drei Aussagen für jedes lokale Koordinatensystem von $\mathfrak{M}^n$ gelten, sind sie auch für $\mathfrak{M}^n$ richtig. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Nunmehr geben wir für holomorph vollständige Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{V}^n$ eine Konstruktion einer positiv definiten Kählerschen Metrik $'\Lambda$ an. Aus dem Axiom 2 und 4 der holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit (s. § 1) folgt unmittelbar: $\mathfrak{V}^n$ ist durch eine abzählbare Folge von offenen Mengen $\mathfrak{U}_{j_\varkappa}$, $j_\varkappa \in I$, $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$, überdeckbar, derart, daß es zu jedem $\mathfrak{U}_{j_\varkappa}$ n in $\mathfrak{V}^n$ holomorphe Funktionen $f_1^{(\varkappa)} \ldots f_n^{(\varkappa)}$ gibt, die $\mathfrak{U}_{j_\varkappa}$ eineindeutig in den C^n abbilden. Ist nun $d_\varkappa$ eine Folge hinreichend kleiner positiver Zahlen, so daß $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \sup d_\varkappa f_\lambda^{(\varkappa)}(B) \cdot d_\varkappa \overline{f}_\lambda^{(\varkappa)}(B)$ für jede relativ kompakte Teilmenge $B \subset\subset \mathfrak{V}^n$ konvergiert, so erfüllt $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} d_\varkappa f_\lambda^{(\varkappa)}\, d_\varkappa \overline{f}_\lambda^{(\varkappa)}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Nach einem Satz von W. F. Osgood[29]) über eineindeutige Abbildungen durch holomorphe Funktionen ist die Funktionalmatrix der Funktionen $f_1^{(\varkappa)} \ldots f_n^{(\varkappa)}$ in $U_{j_\varkappa}$ von null verschieden. Eine leichte Rechnung zeigt, daß deshalb die durch $d_\varkappa^2 (f_1^{(\varkappa)} \overline{f}_1^{(\varkappa)} + \cdots + f_n^{(\varkappa)} \overline{f}_n^{(\varkappa)})$ erzeugte Hermitesche Form in $\mathfrak{U}_{j_\varkappa}$ positiv definit ist. Da ferner die durch $'R_0 = \Sigma\Sigma\, d_\varkappa^2 f^{(\varkappa)} \overline{f}^{(\varkappa)}$ erzeugte Hermitesche Form $'\alpha_0 = \Sigma\, 'g_{\nu\overline{\mu}}\, dz_\nu\, d\overline{z}_\mu$ gleichmäßig konvergierende Summe der durch

[29]) W. F. Osgood, Lb. II₁. p. 117 (Satz 5).

$d_\varkappa^2 f_\lambda^{(\varkappa)} \bar{f}_\lambda^{(\varkappa)}$ erzeugten, in $\mathfrak{V}^n$ positiv semidefiniten Formen ist, muß $'\alpha_0$ in ganz $\mathfrak{V}^n$ positiv definit sein. Aus Satz 3 folgt dann, daß $\Lambda: ds^2 = \Sigma\, 'g_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ eine Kählersche Metrik in $\mathfrak{V}^n$ ist. Es gilt also:

Satz 6. *In jeder holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$ gibt es eine (positiv definite) Kählersche Metrik $'\Lambda$ mit einem globalen Potential $'R_0$.*

Die Aussage dieses Satzes läßt sich verschärfen:

Satz 7. *In jeder holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$ existiert eine vollständige Kählersche Metrik Λ mit einem globalen Potential R_0.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$, eine $\mathfrak{V}^n$ ausschöpfende Folge von analytischen Polyedern, bei der die $\mathfrak{P}_\varkappa \subset \mathfrak{P}_{\varkappa+1}$ liegen. $f_1^{(\varkappa)} \ldots f_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}$ seien die definierenden Funktionen von $\mathfrak{P}_\varkappa$. In $\mathfrak{P}_{\varkappa-1}$ ist dann der Betrag der $f_\lambda^{(\varkappa)}$, $\lambda = 1 \ldots r_\varkappa$, kleiner als 1. Bilden wir $g_\lambda^{(\varkappa)} = \varkappa (f_\lambda^{(\varkappa)})^k$ mit genügend großem k, so ist daher $|g_\lambda^{(\varkappa)}|^2$ in $\mathfrak{P}_{\varkappa-1}$ kleiner als $\frac{2^{-\varkappa}}{r_\varkappa}$. Die Summe $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \sum\limits_{\lambda=1}^{r_\varkappa} g_\lambda^{(\varkappa)} \bar{g}_\lambda^{(\varkappa)}$ genügt also den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Darum ist die durch $''R_0 = \sum\limits_\varkappa \sum\limits_\lambda g_\lambda^{(\varkappa)} \bar{g}_\lambda^{(\varkappa)}$ erzeugte Hermitesche Form $''\alpha_0 = \Sigma\, ''g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ positiv semidefinit. Zeigen wir noch, daß die positiv semidefinite Kählersche Metrik $''\Lambda: ds^2 = \Sigma\, ''g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ vollständig ist und addieren wir zu $''\Lambda$ die beim Beweis von Satz 6 konstruierte positiv definite Kählersche Metrik $'\Lambda: ds^2 = \Sigma\, 'g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ von $\mathfrak{V}^n$ hinzu, so ist $\Lambda: ds^2 = \Sigma\, g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ mit $g_{\nu\bar{\mu}} = 'g_{\nu\bar{\mu}} + ''g_{\nu\bar{\mu}}$ eine positiv definite, vollständige Kählersche Metrik in $\mathfrak{V}^n$. Offenbar ist $R_0 = 'R_0 + ''R_0$ ein Potential von Λ, wobei $'R_0$ das Potential von $'\Lambda$ bezeichnet. Wir haben auf diese Weise eine Kählersche Metrik mit den in Satz 7 geforderten Eigenschaften gefunden.

Es werde nun der Beweis für die Vollständigkeit der Metrik $''\Lambda$ nachgeholt. x_0 sei ein Punkt aus $\mathfrak{P}_1$, der Punkt $y \in \mathfrak{V}^n$ liege außerhalb des Polyeders $\mathfrak{P}_\varkappa$, $\varkappa > 1$, ferner verbinde die differenzierbare Kurve K in $\mathfrak{V}^n$ die Punkte x_0 und y. Der Rand von $\mathfrak{P}_\varkappa$ wird von K in einem Punkt x_1 geschnitten. In x_1 gilt für eine der $\mathfrak{P}_\varkappa$ definierenden Funktionen $|f_{\lambda_1}^{(\varkappa)}| = 1$. Daher ist dort $|g_{\lambda_1}^{(\varkappa)}| = \varkappa$. Durch $z = g_{\lambda_1}^{(\varkappa)}$ wird eine holomorphe Abbildung von $\mathfrak{V}^n$ in die komplexe Zahlenebene der Veränderlichen z vermittelt. x_0 wird dabei auf einen Punkt $\bar{x}_0$ im Kreise $|z| < \sqrt{\frac{2^{-\varkappa}}{r_\varkappa}} \leqq 2^{-\frac{\varkappa}{2}}$ bezogen, der Bildpunkt $\bar{x}_1$ von x_1 liegt auf $|z| = \varkappa$, und das Bild $\bar{K}$ von K ist eine differenzierbare Kurve in der z-Ebene, die durch $\bar{x}_0$ und $\bar{x}_1$ verläuft. Bezeichnet $\Sigma\, {}^*g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ die durch $g_{\lambda_1}^{(\varkappa)} \bar{g}_{\lambda_1}^{(\varkappa)}$ erzeugte Hermitesche Form, so besteht in jedem lokalen Koordinatensystem $(\mathfrak{U}_j, \Psi_j)$, $j \in I$, mit den Koordinaten $z_1 \ldots z_n$ die Beziehung:

$$ {}^*g_{\nu\bar{\mu}} = \frac{\partial g_{\lambda_1}^{(\varkappa)}}{\partial z_\nu} \frac{\partial \bar{g}_{\lambda_1}^{(\varkappa)}}{\partial \bar{z}_\mu}. $$

Daher ist $\int\limits_K ds = \int\limits_{\bar{K}} |dz|$, wenn $ds^2 = \Sigma\, {}^*g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ gesetzt wird. Nun gilt $\int\limits_{\bar{K}} |dz| \geqq \left| \int\limits_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} dz \right| > \varkappa - 2^{-\frac{\varkappa}{2}}$. Da diese Abschätzung für jede Kurve richtig ist, die x_0 mit y verbindet, ist die Entfernung von x_0 und y in bezug auf die Metrik ${}^*\Lambda: ds^2 = \Sigma\, {}^*g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ größer als $\varkappa - 2^{-\frac{\varkappa}{2}}$. Das Gleiche gilt für die Entfernung

in bezug auf $''\Lambda$, da $''\Lambda$ aus $^*\Lambda$ durch Addition einer positiv semidefiniten Metrik entsteht. In jedem $P_\varkappa$ können nur endlich viele Punkte einer beliebigen sich in $\mathfrak{B}^n$ nicht häufenden Punktfolge $x_\varrho \in \mathfrak{B}^n$, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$, liegen. Somit wird der Abstand der x_ϱ von x_0 mit wachsendem ϱ unbeschränkt groß, q.e.d.

Fragen wir nun, ob jede Mannigfaltigkeit mit vollständiger Kählerscher Metrik holomorph-konvex ist, so zeigt sich, daß das nicht immer richtig ist. Es wird hier eine Konstruktion einer vollständigen Kählerschen Metrik im Raume $C^n - 0$ angegeben. $C^n - 0$ ist dabei die komplexe Mannigfaltigkeit, die aus dem Raum C^n der Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ durch Entfernung des Nullpunktes erhalten ist. Bekanntlich ist $C^n - 0$ für $n > 1$ nicht mehr holomorph-konvex[30]).

$g(w)$ sei für $w > 0$ eine reell-analytische Funktion mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $g(w) > 0$,

2. $\int\limits_0^1 w\, g^2\, dw = d$ (endlich),

3. $\int\limits_0^1 g\, dw = \infty$.

Wir wählen etwa für $g(w)$ die Funktion $\frac{w-1}{w \ln w}$, die — wie man leicht nachrechnet — diese drei Eigenschaften hat. Setzt man nun $f(w) = \int\limits_0^w w g^2 dw$ und $^*U(w) = \int \frac{f}{w}\, dw$, so erzeugt $^*U(z_1\bar z_1 + \cdots + z_n \bar z_n)$ in $C^n - 0$ eine positiv semidefinite Hermitesche Form $\alpha_0 = \Sigma\, g_{\nu\bar\mu} dz_\nu d\bar z_\mu$. Es gilt nämlich:
$g_{\nu\bar\nu} = {}^*U' + {}^*U'' z_\nu \bar z_\nu$, $g_{\nu\bar\mu} = {}^*U'' z_\mu \bar z_\nu$, wenn $\nu \neq \mu$ und $^*U' = \frac{\partial^* U}{\partial w}$, $^*U'' = \frac{\partial^{2*} U}{\partial w^2}$ ist. Auf der komplex eindimensionalen Ebene $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$ ist daher:

$$\alpha_0 = \sum_\nu {}^*U' dz_\nu d\bar z_\nu + {}^*U'' z_1 \bar z_1\, dz_1\, d\bar z_1 \geqq ({}^*U' + {}^*U'' z_1 \bar z_1)\, dz_1\, d\bar z_1 =$$
$$= g^2 w\, dz_1\, d\bar z_1 \geqq w\,(g\, d\, r)^2,$$

wenn $w = z_1 \bar z_1 + \cdots + z_n \bar z_n$ und $r = \sqrt{w}$ gesetzt wird. α_0 ist durch ein Potential im $C^n - 0$ erzeugt, das nur vom euklidischen Abstand der Punkte vom Nullpunkt des C^n abhängt. Aus Satz 5 folgt deshalb, daß α_0 gegenüber unitären Drehungen invariant ist. Das Gleiche ist in natürlicher Weise für $w(g dr)^2$ richtig. Somit gilt allgemein im $C^n - 0$:

$$\alpha_0 \geqq w (g d r)^2.$$

Das hat zur Folge:
1. α_0 ist positiv semidefinit,
2. unter der darum positiv semidefiniten Kählerschen Metrik $^*\Lambda : ds^2 = \Sigma g_{\nu\bar\mu} dz_\nu d\bar z_\mu$ ist der Nullpunkt 0 unendlich fern.

In der Tat! Ist x_0 ein Punkt aus $C^n - 0$ und konvergiert $x_\varkappa \in C^n - 0$, $\varkappa = 1, 2 \ldots$, gegen 0, sind w_0, $w_\varkappa$ die zugehörigen Abstandsquadrate von 0 und

[30]) Vgl. loc. cit.[11]).

verbindet die differenzierbare Kurve $K_\varkappa$ den Punkt x_0 mit $x_\varkappa$, so gilt:

$$\int_{K_\varkappa} ds \geq \left|\int_{K_\varkappa} r g dr\right| \geq 1/2 \left|\int_{w_\varkappa}^{w_0} g\, dw\right|.$$

Aus Eigenschaft 3 von g ist ersichtlich, daß die Entfernungen von x_0 und $x_\varkappa$ in bezug auf $^*\Lambda$ mit wachsendem $\varkappa$ gegen unendlich streben. Addieren wir noch zu $^*\Lambda$ die euklidische Metrik $ds^2 = dz_1 d\bar{z}_1 + \cdots dz_n d\bar{z}_n$ hinzu, so erhalten wir im $C^n - 0$ eine vollständige (positiv-definite) Kählersche Metrik Λ_n, zu der $U_n = {}^*U + z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n$ ein Potential ist.

Dieses Resultat läßt sich ausnutzen, um Satz 7 zu verallgemeinern. Wir formulieren als Hauptsatz dieses Paragraphen:

Satz A. *Ist eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ aus einer holomorph vollständigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^n$ durch Herausnahme einer beliebigen analytischen Menge A entstanden, so existiert in $\mathfrak{M}^n$ eine vollständige Kählersche Metrik.*

Beweis. A ist simultanes Nullstellengebilde von holomorphen Funktionen $f_0 \ldots f_n$ (vgl. Satz 2). $U = U_{n+1} \circ \tau$ ist Potential der durch die holomorphe Abbildung $\tau: z_0 = f_0 \ldots z_n = f_n$ nach $\mathfrak{V}^n - A$ übertragenen Kählerschen Metrik Λ_{n+1}. In bezug auf diese (in $\mathfrak{V}^n - A$ positiv semidefinite) Metrik sind die Punkte von A unendlich fern. Addiert man noch eine in V^n vollständige Kählersche Metrik hinzu, so erhält man eine in $M^n = V^n - A$ vollständige (positiv definite) Kählersche Metrik.

§ 4. Vollständige Kählersche Metrik in Reinhardtschen Körpern

Zunächst werde folgender Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 3. *Sei $\mathfrak{M}^n$ eine komplexe Mannigfaltigkeit über dem Raume C^n der Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$, die als Automorphismen die Drehungen $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$: $z_\nu \to z_\nu e^{i\vartheta_\nu}$, $z_\mu \to z_\mu$, $\nu = 1 \ldots k$, $\mu = k+1 \ldots n$, ϑ_ν reell, zuläßt. Sei $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_{\nu-1}, 2\pi, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_k) = \tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_{\nu-1}, 0, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_k)$ für $\nu = 1 \ldots k$. Ist dann Λ eine Kählersche Metrik in $\mathfrak{M}^n$, so läßt sich aus Λ eine Kählersche Metrik $\mathring{\Lambda}$ in $\mathfrak{M}^n$ konstruieren, derart, daß in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ die Drehungen $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$ isometrische Abbildungen sind. Ist Λ in $\mathfrak{M}^n$ vollständig, so gilt Gleiches für $\mathring{\Lambda}$. Enthält eine Randpunktmenge $\{x\}_\tau^k$ von $\mathfrak{M}^n$ in bezug auf Λ nur unendlichferne Punkte, so ist x in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ ein unendlichferner Randpunkt*[31]).

Dabei ist $\{x\}_\tau^k$ eine einem Punkt oder Randpunkt x von $\mathfrak{M}^n$ in folgender Weise zugeordnete Menge:

Hat x die Koordinaten $z_1^{(0)} \ldots z_n^{(0)}$, so gibt es einen x enthaltenden k-fachen Torus von Punkten bzw. Randpunkten von $\mathfrak{M}^n$, die die Koordinaten $z_1^{(0)} e^{i\vartheta_1} \ldots z_k^{(0)} e^{i\vartheta_k}, z_{k+1}^{(0)} \ldots z_n^{(0)}$ besitzen. $\{x\}_\tau^k$ stimme mit den Punkten dieses Torus überein.

Beweis von Hilfssatz 3. Ist Λ eine Metrik $ds^2 = \Sigma g_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu d\bar{z}_\mu$, so bilde man $\mathring{\Lambda}: d\mathring{s}^2 = \Sigma \mathring{g}_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu d\bar{z}_\mu$ mit den Koeffizienten:

$$\mathring{g}_{\nu\bar{\mu}}(z_1 \ldots z_n, \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_n)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_k\, g(z_1 e^{i\vartheta_1} \ldots z_k e^{i\vartheta_k}, z_{k+1} \ldots z_n; \ldots)\, e^{i(\vartheta_\nu \sigma_\nu^k - \vartheta_\mu \sigma_\mu^k)}$$
$$(\sigma_\nu^k = 1 \text{ für } \nu \leq k,\ \sigma_\nu^k = 0 \text{ für } \nu > k).$$

[31]) Vgl. loc. cit.[26]).

Da die angegebene Konstruktion eine Mittelwertbildung über die Gruppe der $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$ darstellt, ist $\mathring{\Lambda}$ Hermitesch, Kählersch, positiv definit und in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ sind die $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$ isometrische Abbildungen. Ferner sind die Koeffizienten $\mathring{g}_{\nu\bar{\mu}}$, wie man leicht sieht, reell-analytisch in $\mathfrak{M}^n$. Es bleiben also nur noch die beiden letzten Behauptungen des Hilfssatzes 3 zu zeigen.

Es seien x_0, x zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{M}^n$, die durch eine differenzierbare Kurve $K: \{z_\varkappa(t),\ 0 \leqq t \leqq 1,\ \varkappa = 1 \ldots n\}$ in $\mathfrak{M}^n$ verbunden seien. Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt für eine reelle, nicht negative Funktion $h(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$, $0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 2\pi$:

$$\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} h\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_k} \geqq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \sqrt{h}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_k .$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_K d\mathring{s} &= \int_0^1 \sqrt{\Sigma \mathring{g}_{\nu\bar{\mu}} \frac{dz_\nu}{dt} \frac{d\bar{z}_\mu}{dt}}\, dt \geqq \\ &\geqq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_k \left(\int_0^1 \sqrt{\Sigma g_{\nu\bar{\mu}}\, e^{i(\vartheta_\nu \sigma_\nu^k - \vartheta_\mu \sigma_\mu^k)} \frac{dz_\nu}{dt} \frac{d\bar{z}_\mu}{dt}}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_k \int_{K(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)} ds , \end{aligned}$$

wenn $K(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$ die Kurve der Punkte $z_1(t)\, e^{i\vartheta_1} \ldots z_k(t)\, e^{i\vartheta_k}, z_{k+1}(t) \ldots z_n(t)$ bezeichnet. $K(\vartheta_1 \ldots \vartheta_k)$ verbindet einen Punkt von $\{x_0\}_\tau^k$ mit einem Punkt von $\{x\}_\tau^k$. Darum ist $\int_K d\mathring{s}$ größer als die Entfernung $E(\{x_0\}_\tau^k, \{x\}_\tau^k)$ von $\{x_0\}_\tau^k$ und $\{x\}_\tau^k$ in bezug auf Λ. Da die Entfernung von x_0 und x untere Grenze der Längen der Kurven ist, die x_0 mit x verbinden, gilt ferner, daß x_0 und x in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ einen höchstens größeren Abstand $\mathring{E}(x_0, x)$ haben als $\{x_0\}_\tau^k$ und $\{x\}_\tau^k$ in bezug auf Λ. Ist $x_\nu \in M^n$ eine sich in M^n nicht häufende beliebige Punktfolge, so strebt, wenn Λ vollständig ist, $E(\{x_0\}_\tau^k, \{x_\nu\}_\tau^k)$ mit wachsendem ν gegen unendlich. Denn anderenfalls gäbe es im Gegensatz zur Vollständigkeit von Λ eine sich in $\mathfrak{M}^n$ nicht häufende Punktfolge $y_\nu \in \{x_\nu\}_\tau^k$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, derart, daß die Entfernungen von x_0 und der Punkte einer unendlichen Teilmenge der y_ν in bezug auf Λ beschränkt wären. Nach den vorangegangenen Überlegungen konvergiert nun auch $\mathring{E}(x_0, x_\nu)$ gegen unendlich. Das bedeutet, daß $\mathring{\Lambda}$ vollständig ist.

Ist $\{x\}_\tau^k$ eine Menge in bezug auf Λ unendlich ferner Randpunkte, so ergeben ähnliche Überlegungen, daß x in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ unendlich fern ist. Auf die Durchführung eines Beweises sei hier verzichtet.

Nachdem nun Hilfssatz 3 bewiesen ist, sei die Frage untersucht, ob die Vollständigkeit der Kählerschen Metrik nicht doch bei gewissen Mannigfaltigkeiten die Holomorphiekonvexität charakterisiert. Satz A zeigte nur,

daß der Rand von $\mathfrak{M}^n$ keine niederdimensionalen Bestandteile enthalten darf. Es ist zweckmäßig, zuerst Untersuchungen an Reinhardtschen Körpern anzustellen.

Unter einem Reinhardtschen Körper $\mathfrak{K}^n$ wird bekanntlich eine Mannigfaltigkeit (Gebiet) über dem C^n verstanden, die als Automorphismen die Drehungen $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n)$, $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_{\nu-1}, 2\pi, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_n) = \tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_{\nu-1}, 0, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_n)$, $\nu = 1 \ldots n$, in sich zuläßt. Nennen wir eine Punktmenge $A_{i_1 \ldots i_s} = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_{i_1} = z_{i_2} = \cdots = z_{i_s} = 0\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$, im C^n eine *n-s-dimensionale Achse* und bezeichnet $\breve{\mathfrak{K}}^n$ den Reinhardtschen Körper, der aus $\mathfrak{K}^n$ durch Herausnahme der Punkte über den Achsen A_i, $i = 1 \ldots n$, entstanden ist, so sind $\ln z_i$, $i = 1 \ldots n$, mehrdeutige holomorphe Funktionen in $\breve{\mathfrak{K}}^n$. Die durch $w_i = \ln z_i$ vermittelte (mehrdeutige) holomorphe Abbildung Γ von $\breve{\mathfrak{K}}^n$ in den Raum $C^n(w)$ der Veränderlichen $w_1 \ldots w_n$ kann als eine holomorphe Abbildung von $\breve{\mathfrak{K}}^n$ auf eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}^n$ über dem Raum $C^n(w)$ aufgefaßt werden. Da Γ in $\breve{\mathfrak{K}}^n$ lokal-topologisch ist, folgt unmittelbar, daß Γ^{-1} die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}^n$ eindeutig auf $\breve{\mathfrak{K}}^n$ abbildet. Das Paar $(\mathfrak{T}^n, \Gamma^{-1})$ stellt also eine (unbegrenzte, unverzweigte) Überlagerung von $\breve{\mathfrak{K}}^n$ dar. Der Gruppe $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n)$ entspricht in $\mathfrak{T}^n$ die Automorphismengruppe $\Gamma\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n)\Gamma^{-1} = \sigma(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n): w_j \to w_j + i\vartheta_j$, $j = 1 \ldots n$. Nach S. Bochner heißen Mannigfaltigkeiten über dem C^n, die eine solche Automorphismengruppe besitzen, Tuben[32]). Setzt man $w_j = u_j + i v_j$, $j = 1 \ldots n$, so bilden die Punkte von $\mathfrak{T}^n$ mit reellen Koordinaten ein Gebiet $\mathfrak{L}$ über dem Raume der reellen Veränderlichen $u_1 \ldots u_n$. Man nennt nun $\mathfrak{K}^n$ *logarithmisch konvex*, wenn $\mathfrak{L}$ konvex im Sinne der Elementargeometrie ist. Wir beweisen folgenden

Satz 8. *Ein Reinhardtscher Körper $\mathfrak{K}^n$ mit vollständiger Kählerscher Metrik Λ ist logarithmisch konvex.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist $\mathring{\Lambda}$ in $\breve{\mathfrak{K}}^n$ vollständig. Da $(\mathfrak{T}^n, \Gamma^{-1})$ eine Überlagerung von $\breve{\mathfrak{K}}^n$ ist, ist jeder (im Endlichen gelegene) Randpunkt von $\mathfrak{T}^n$ in bezug auf die durch Γ^{-1} nach $\mathfrak{T}^n$ übertragene Kählersche Metrik $\mathring{\Lambda}$ unendlich fern. Es werde diese Metrik in $\mathfrak{T}^n$ mit ${}^*\Lambda: ds^2 = \Sigma g_{\nu\bar{\mu}}\, dw_\nu\, d\overline{w}_\mu$ bezeichnet. Da die $\tau(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n)$ in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ isometrische Abbildungen von $\breve{\mathfrak{K}}^n$ sind, müssen die $\sigma(\vartheta_1 \ldots \vartheta_n): w_j \to w_j + i\vartheta_j$ in $\mathfrak{T}^n$ in bezug auf ${}^*\Lambda$ isometrisch sein. Das bedeutet nichts anderes, als daß alle $g_{\nu\bar{\mu}}$ reine Funktionen der $u_1 \ldots u_n$ sind. Die Kählerschen Bedingungen

$$\frac{\partial g_{\nu\bar{\mu}}}{\partial w_\varkappa} = \frac{\partial g_{\varkappa\bar{\mu}}}{\partial w_\nu}, \quad \frac{\partial g_{\nu\bar{\mu}}}{\partial \overline{w}_\varkappa} = \frac{\partial g_{\nu\bar{\varkappa}}}{\partial \overline{w}_\mu}$$

ergeben darum nach Wirtinger[33]) die Beziehungen:

$$\frac{\partial g_{\nu\bar{\mu}}}{\partial u_\varkappa} = \frac{\partial g_{\varkappa\bar{\mu}}}{\partial u_\nu}.$$

---

[32]) S. Bochner und W. T. Martin: Several Complex Variables, p. 90. Princeton 1948.

[33]) Nach Wirtinger ist: $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$\alpha_\mu = \Sigma g_{\nu\bar\mu} du_\nu$ sind daher geschlossene Pfaffsche Formen in $\mathfrak{T}^n$, die auch als in $\mathfrak{L}$ gegeben betrachtet werden können. Wäre nun $\mathfrak{L}$ nicht konvex, so gäbe es zwei Punkte $x, y \in \mathfrak{L}$, deren Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ nicht ganz in $\mathfrak{L}$ läge. Ist dann C ein differenzierbares Kurvenstück in $\mathfrak{L}$, das x mit y verbindet, so gibt es von x her einen ersten Punkt $x_0 \in C$, dessen Verbindungsstrecke $\overline{xx_0}$ mit x nicht ganz in $\mathfrak{L}$ liegt. Wir bezeichnen mit (a_i), $\Sigma a_i^2 \neq 0$, den Richtungsvektor von $\overrightarrow{xx_0}$. Ist $'x$ der erste Punkt auf $\overline{xx_0}$ von x her, der nicht zu $\mathfrak{L}$ gehört, so gilt:

$$\int_{\overline{'xx}} \Sigma a_\mu \alpha_\mu = \int_{t=0}^{t_1} \Sigma g_{\nu\bar\mu}(u_1^0 + a_1 t, \ldots, u_n^0 + a_n t)\, a_\nu a_\mu\, dt \geqq \int_{\overline{'xx}} ds - t_1 = +\infty,$$

weil $\Sigma g_{\nu\bar\mu} a_\nu a_\mu > 0$ und $'x$ ein unendlich ferner Randpunkt von $\mathfrak{T}^n$ und damit von $\mathfrak{L}$ ist. Dabei bezeichnen (u_ν^0) die Koordinaten von x und t_1 ist so bestimmt, daß $u_\nu^0 + a_\nu t_1$ mit den Koordinaten von $'x$ übereinstimmt. $x_\varkappa \in \mathfrak{L}$ sei eine Folge von Punkten, die auf C von x her gegen x_0 konvergiert. Seien nun die Richtungsvektoren der Strecken $\overrightarrow{xx_\varkappa}$ mit $(a_\mu^{(\varkappa)})$ bezeichnet! Da $\Sigma g_{\nu\bar\mu} a_\nu^{(\varkappa)} \bar a_\mu^{(\varkappa)} > 0$ in L ist, gilt dann aus Stetigkeitsgründen: $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} \int\limits_{\overline{xx_\varkappa}} a_\mu^{(\varkappa)} \alpha_\mu = +\infty$. Andererseits ist aber $\overline{xx_\varkappa}$ homotop zu der Teilkurve $C_\varkappa$ von C, die aus den Punkten zwischen x und $x_\varkappa$ besteht. Es gilt daher nach Stokes:

$$\int_{\overline{xx_\varkappa}} \Sigma a_\mu^{(\varkappa)} \alpha_\mu = \int_{C_\varkappa} \Sigma a_\mu^{(\varkappa)} \alpha_\mu \leqq \int_C |\Sigma a_\mu^{(\varkappa)} \alpha_\mu| < M,$$

wobei M eine positive Zahl ist, die nicht von $\varkappa$ abhängt. Widerspruch! Damit ist Satz 8 bewiesen.

Wir merken noch an, daß ein konvexes Gebiet über dem Raum der Veränderlichen $u_1 \ldots u_n$ notwendig schlicht ist. Offenbar ist L genau dann schlicht, wenn $\mathfrak{T}^n$ bzw. $\mathfrak{R}^n$ schlicht ist. Ein *logarithmisch-konvexer Reinhardtscher Körper ist also schlicht*, d. h. ein Gebiet des C^n.

Im folgenden werden die Achsenbestandteile von Reinhardtschen Körpern mit vollständiger Kählerscher Metrik untersucht. Zunächst sei definiert:

1. *Die Punkte einer Achse $A_{i_1 \ldots i_s}$, die nicht auf einer Achse $A_{j_1 \ldots j_{\bar s}}$ kleinerer Dimension ($\bar s > s$) liegen, heißen eigentliche Punkte von $A_{i_1 \ldots i_s}$.*

2. *$A_{i_1 \ldots i_s}$ heißt eine $\mathfrak{R}$-Achse in bezug auf einen Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}^n \subset C^n$, wenn wenigstens ein Punkt von $A_{i_1 \ldots i_s}$ zu $\mathfrak{R}^n$ gehört.*

3. *Unter der Projektion L_i einer Menge $M \subset C^n$ auf die Achse A_i wird die Menge N der Punkte $(z_1 \ldots z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n) \in A_i$ verstanden, zu denen wenigstens ein Punkt $(z_1 \ldots z_{i-1}, z_i, z_{i+1} \ldots z_n)$ zu M gehört.*

Offenbar ist ein Punkt $(z_1 \ldots z_n) \in A_{i_1 \ldots i_s}$ genau dann ein eigentlicher Punkt der Achse, wenn alle seine Koordinaten z_j, $j \neq i_\nu$, $\nu = 1 \ldots s$, von null verschieden sind.

Wir zeigen:

Hilfssatz 4. *Ist ein Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}^n \subset C^n$ logarithmisch konvex und ist A_i eine $\mathfrak{R}$-Achse, so schneidet jede Ebene $E: \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_j = a_j \neq 0$ für $j = 1 \ldots i-1, i+1 \ldots n\}$ aus ihm einen im Mittelpunkt punktierten Kreis oder einen Vollkreis heraus, sofern sie überhaupt einen Punkt von $\mathfrak{R}^n$ trifft.*

Beweis. Wir konstruieren wieder — wie beim Beweise von Satz 8 — zu $\mathfrak{R}^n$ das (jetzt schlichte) Gebiet $\mathfrak{L}$ des $u_1 \dots u_n$-Raumes. Offenbar ist die Behauptung des Hilfssatzes 4 mit folgender Aussage äquivalent:

Jede Gerade $D: \{(u_1 \dots u_n) \mid u_j = \ln |a_j|,\ j = 1 \dots i-1,\ i+1 \dots n\}$, die wenigstens einen Punkt mit $\mathfrak{L}$ gemeinsam hat, schneidet aus $\mathfrak{L}$ eine Halbgerade $H: \{(u_1 \dots u_n) \mid u_j = \ln |a_j|,\ j \neq i,\ |u_i| < r\}$ heraus.

A_i enthält als $\mathfrak{R}$-Achse wenigstens einen Punkt $(z_1^{(0)} \dots z_{i-1}^{(0)}, 0, z_{i+1}^{(0)} \dots z_n^{(0)}) \in \mathfrak{R}^n$ mit $z_j \neq 0$ für $j \neq i$. Das bedeutet, daß der unendlichferne Punkt $(u_1^{(0)} \dots u_{i-1}^{(0)}, -\infty, u_{i+1}^{(0)} \dots u_n^{(0)})$, $u_j^{(0)} = \ln |z_j^{(0)}|$ für $j \neq i$, ein Randpunkt von $\mathfrak{L}$ ist. Da $\mathfrak{L}$ überdies konvex ist, muß die Verbindungsstrecke $H: \{(u_1 \dots u_n) \mid u_j = b_j$ für $j \neq i,\ u_i < b_i\}$ von jeden Punkt $(b_1 \dots b_n) \in \mathfrak{L}$ mit $(u_1^{(0)} \dots -\infty \dots u_n^{(0)})$ ganz zu $\mathfrak{L}$ gehören. Das ergibt sofort, daß jede Gerade D aus $\mathfrak{L}$ eine Halbgerade herausschneidet.

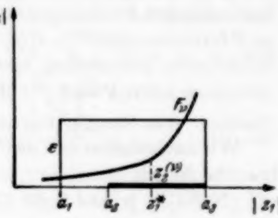

Fig. 1

Wir zeigen nun einen weiteren Hilfssatz, der wesentlich die Existenz einer vollständigen Kählerschen Metrik voraussetzt:

Hilfssatz 5. *Es seien $0 < a_1 < a_2 < a_3$, $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{G}_1$ sei im z_1, z_2-Raum das Gebiet $\{(z_1, z_2) \mid a_1 < |z_1| < a_2, |z_2| < \varepsilon\}$ und $\mathfrak{G}_2$ das Gebiet: $\{(z_1, z_2) \mid a_1 < |z_1| < a_3, 0 < |z_2| < \varepsilon\}$. Ist dann in $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ eine beliebige Kählersche Metrik Λ gegeben, so enthält die Randpunktmenge $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = a_2, z_2 = 0\}$ von $\mathfrak{G}$ sicher auch endlich ferne Randpunkte.*

Beweis. Angenommen Λ wäre eine Kählersche Metrik in $\mathfrak{G}$, in bezug auf die die Punkte $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = a_2, z_2 = 0\}$ unendlich fern sind. Wir bilden nach Hilfssatz 3 aus Λ die Metrik $\mathring{\Lambda}: d\mathring{s}^2 = \Sigma g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$, unter der die Drehungen $\tau(\vartheta_1 \dots \vartheta_n)$ isometrische Abbildungen sind. Es gilt:

(1) *$\mathring{\Lambda}$ besitzt in $\mathfrak{G}$ ein reell-analytisches Potential $U(|z_1|, |z_2|)$.*

Zum Beweise von (1) bilden wir $\mathfrak{G} - A_2$ durch die Transformation $w_i = \ln z_i$, $i = 1, 2$, auf eine Tube $\mathfrak{T}: \{(w_1, w_2) \mid \ln a_1 < u_1 < \ln a_3,\ u_2 < \ln \varepsilon,\ w_1 = u_1 + iv_1,\ w_2 = u_2 + iv_2\}$ ab. Die dabei nach $\mathfrak{T}$ übertragene Kählersche Metrik $\mathring{\Lambda}$ sei mit $^*\Lambda: ds^2 = \Sigma g_{\nu\bar{\mu}} dw_\nu d\bar{w}_\mu$ bezeichnet. Die $g_{\nu\bar{\mu}}$ sind — wie beim Beweis von Satz 8 — vom Imaginärteil der w_i unabhängig. Deshalb folgt aus den Kählerschen Bedingungen für die Beschränkung $'\Lambda$ von $^*\Lambda$ auf $\mathfrak{L}$, daß $\omega_\nu = \Sigma g_{\nu\bar{\mu}} du_\mu$ und $\alpha = du_1 \int \omega_1 + du_2 \int \omega_2$ geschlossene Differentialformen sind. In $'\mathfrak{G}: \left\{(z_1, z_2) \mid 'a_1 < |z_1| < 'a_2,\ |z_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ mit $a_1 < 'a_1 < 'a_2 < a_2$ ist $|\mathring{g}_{\nu\bar{\mu}}| < M$, wenn M hinreichend groß gewählt ist. Daher gilt in $'\mathfrak{L}: \left\{(u_1, u_2) \mid \ln 'a_1 < u_1 < \ln 'a_2,\ u_2 < \ln \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ die Ungleichung: $|g_{22}| < M e^{2u}$. Das ergibt, daß

$$^*U = \int_{(u^0, -\infty)}^{(u_1, u_2)} \Big(du_1 \int_{(u_1^0, -\infty)} \omega_1 - du_2 \int_{(u_1^0, -\infty)} \omega_2\Big)$$

eine in $'\mathfrak{L}$ beschränkte Funktion ist. Ferner wird $^*U$ durch obiges Integral

in ganz $\mathfrak{L}$ definiert, und es gilt dort: $g_{\nu\bar\mu} = \frac{\partial^2 {}^*U}{\partial u_\nu \partial u_\mu}$. Setzen wir in $\mathfrak{T}$: $\tilde U(w_1, w_2) = 4\,{}^*U(u_1, u_2)$, so ist $\frac{\partial^2 \tilde U}{\partial w_\nu \partial \bar w_\mu} = \frac{\partial^{2*} U}{\partial u_\nu \partial u_\mu} = g_{\nu\bar\mu}$. $\tilde U$ ist also in T Potential von ${}^*A$. Satz 5 ergibt, daß $U(|z_1|, |z_2|) = \tilde U(\ln z_1, \ln z_2)$ ein Potential von $\mathring{A}$ in $\mathfrak{G} - A_2$ ist. In $'\mathfrak{G}$ gilt ferner, $|U(|z_1|, |z_2|)| < N$, wenn N hinreichend groß gewählt ist.

Nun gibt es nach einem Satz von E. KÄHLER[34]) in einer Umgebung $\mathfrak{V}(P)$ jedes Punktes $P \in \mathfrak{G}$ ein Potential U_P von $\mathring{A}$. Insbesondere gilt das für $P \varepsilon A_2 \cap {'\mathfrak{G}}$. Da U in einer Umgebung eines jeden dieser Punkte beschränkt ist, ist auch $U - U_P$ in der Nähe von P beschränkt. Ferner ist $U - U_P$ in $\mathfrak{V}(P) - A_2$ biharmonisch. Ein bekannter Satz über die Singularitäten biharmonischer Funktionen sagt aus, daß sich $U - U_P$ zu $H(z_1, z_2)$ biharmonisch in P fortsetzen läßt[34a]). $H(z_1, z_2) + U_P$ ist dann eine eindeutig bestimmte reell-analytische Fortsetzung von U in P. Wir können also durch Fortsetzung von U in jeden Punkt $P \in A_2 \cap \mathfrak{G}$ unsere Potentialfunktion U in ganz $\mathfrak{G}$ definieren. Aus Stetigkeitsgründen ist U überall in $\mathfrak{G}$ Potential von $\mathring{A}$.

Wir untersuchen nun das Verhalten von $U(|z_1|, |z_2|)$ in der Nähe des Randes von $\mathfrak{G}$. Es gilt:

(2) *$U(|z_1|, |z_2|)$ ist in der Umgebung jedes Randpunktes*: $({}^*z_1, 0)$, $a_2 < |{}^*z_1| < a_3$, *nach oben hin unbeschränkt.*

In der Tat! Bilden wir ${}^*U(u, |z_2|) = U(e^u, |z_2|)$, so gilt: $\frac{\partial^2 {}^*U}{\partial u^2} = {}^4g_{11} > 0$ und daher für $\ln a_1 < u^0 < \ln a_2$:

$$(\lambda) \qquad {}^*U(u, |z_2|) \geqq \frac{\partial^* U(u^0, z_2)}{\partial u}(u - u^0) + {}^*U(u^0, |z_2|).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial {}^*U(u,0)}{\partial u} = \frac{\partial {}^*U(b,0)}{\partial u} + \int_b^u \frac{\partial^2 {}^*U(u,0)}{\partial u^2}\, du \geqq$$

$$\geqq \int_b^u \sqrt{\frac{\partial^2 {}^*U}{\partial u^2}}\, du - |u - b| - \left|\frac{\partial {}^*U(b,0)}{\partial u}\right|$$

für $a_1 < b < a_2$. Da die Punkte $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = a_2, z_2 = 0\}$ in bezug auf A und damit nach Hilfssatz 3 auch in bezug auf $\mathring{A}$ unendlich fern sind und $\sqrt{\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}}\, du = 4\, d\mathring{s}$ ist, folgt, daß $\frac{\partial {}^*U(u,0)}{\partial u}$ für $u \to \ln a_2$ gegen $+\infty$ strebt. Aus Stetigkeitsgründen gibt es deshalb auch eine Folge von Punkten $(u^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}) \to (\ln a_2, 0)$ mit $\ln a_1 < u^{(\nu)} < \ln a_2$, $0 < |z_2^{(\nu)}| < \varepsilon$, derart, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\partial {}^*U\left(u^{(\nu)}, |z_2^{(\nu)}|\right)}{\partial u} = +\infty$ ist. Es gilt nach (λ) für ${}^*u = \ln|{}^*z_1|$:

$$U(|{}^*z_1|, |z_2^{(\nu)}|) = {}^*U({}^*u, |z_2^{(\nu)}|) \geqq \frac{\partial {}^*U\left(u^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}\right)}{\partial u}({}^*u - u^{(\nu)}) + {}^*U(u^{(\nu)}, |z_2^{(\nu)}|).$$

[34]) E. KÄHLER, loc. cit.[8]).

[34a]) Vgl. H. GRAUERT und R. REMMERT, Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Math. Z. 1956.

Ferner ergibt unsere Ungleichung (λ), da auf einer Fläche $\left\{(u, z_2) \mid u = c, |z_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ mit $\ln a_1 < c < \ln a_2$ sowohl $*U$ als auch $\frac{\partial *U}{\partial u}$ beschränkt ist, daß $*U$ in einer Umgebung von ($\ln a_2$, 0) sicher nach unten hin beschränkt ist ($*U > M$). Daher gilt

$$U(|*z_1|, |z_2^{(\nu)}|) \geq \frac{\partial *U\left(u^{(\nu)}, |z_2^{(\nu)}|\right)}{\partial u}(*u - u^{(\nu)}) + M.$$

Somit ist $\lim_{\nu \to \infty} U(|*z_1|, |z_2^{(\nu)}|) = -\infty$, d. h. U ist in der Nähe von ($*z_1$, 0) nach oben hin unbeschränkt, q.e.d.

Der Beweis von (2) zeigte, daß es eine Folge von Punkten $(*z_1, z_2^{(\nu)}) \to \to (*z_1, 0)$ gibt, derart, daß die Folge $U(|*z_1|, |z_2^{(\nu)}|)$ gegen $+\infty$ strebt. Sind dann $\tilde{\mathfrak{G}}$ ein Gebiet: $\left\{b < |z_1| < c, |z_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, $a_1 < b < a_2 < |z_1^*| < c < a_3$ und F_ν eine Folge von analytischen Flächen $z_2 = z_2^{(\nu)}\left(\frac{z_1}{*z_1}\right)^{k_\nu}$ mit so großen k_ν, daß jedes F_ν nur mit dem Teilrand $B: \left\{(z_1, z_2) \in rd\,\tilde{\mathfrak{G}} \mid |z_2| = \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \{(z_1, z_2) \in \in rd\,\tilde{\mathfrak{G}}, |z_1| = b\}$ des Randes $rd\,\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ Punkte gemeinsam hat, so gilt auf $rd\,F_\nu = F_\nu \cap B$ für ein von ν unabhängiges M die Ungleichung $|U| < M$. Die Beschränkung $'U_\nu$ von U auf $F_\nu \cap \tilde{\mathfrak{G}}$ wird daher bei hinreichend großem ν in $(*z_1, z_2^{(\nu)})$ größer als auf $rd\,F_\nu$ und nimmt im Innern von $F_\nu \cap \tilde{\mathfrak{G}}$ ihr Maximum an. Andererseits ist U in $\mathfrak{G}$ eine bisubharmonische Funktion. $'U_\nu$ ist deshalb auf F_ν subharmonisch[35]). Ein bekannter Satz über subharmonische Funktionen sagt aber aus, daß eine subharmonische, nicht konstante Funktion im Innern von F_ν ihr Maximum nicht annehmen kann. Widerspruch! Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Die beiden Hilfssätze werden verwendet, um einen für die weiteren Betrachtungen dieses Paragraphen grundlegenden Satz zu beweisen:

Satz 9. *Ist $\mathfrak{K}^n \subset C^n$ ein (schlichter) Reinhardtscher Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik und ist A_i eine K-Achse von $\mathfrak{K}^n$, so liegen die eigentlichen Punkte der L_i-Projektion von $\mathfrak{K}^n$ auf A_i in $\mathfrak{K}^n$.*

Beweis. Es sei $\breve{A}_i$ die Menge der eigentlichen Punkte von A_i. Sicher gilt $\mathfrak{D} = \breve{A}_i \cap \mathfrak{K}^n \subset \breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$. Da ferner $\breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$ ein zusammenhängendes Gebiet in $\breve{A}_i$ ist, stimmt $\mathfrak{D}$ dann und nur dann mit $\breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$ überein, wenn $\breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$ keinen Randpunkt von $\mathfrak{D}$ enthält. Angenommen $P(z_1^0 \ldots z_n^0) \in \in \breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$ wäre ein solcher Randpunkt von $\mathfrak{D}$. Nach Hilfssatz 4 schneidet dann, wenn d so klein gewählt ist, daß $\mathfrak{B}: \{(z_1 \ldots z_n) \in A_i, |z_j - z_j^0| < d, j = 1 \ldots n\} \subset\subset \breve{A}_i \cap L_i(\mathfrak{K}^n)$ gilt, jede eindimensionale Ebene $E_{(b_j)}: \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_j = b_j$ für $j \neq i\}$, $(b_1 \ldots b_n) \in \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{K}^n$ einen Vollkreis oder einen im Mittelpunkt punktierten Kreis heraus. Es gibt deshalb ein $\varepsilon > 0$, so daß $*\mathfrak{G}: \{(z_1 \ldots z_n) \mid L_i(z_1 \ldots z_n) \in \mathfrak{B}, 0 < |z_i| < \varepsilon\}$ in $\mathfrak{K}^n$ enthalten ist. Da ferner P Randpunkt von $\mathfrak{D}$ ist, können wir reelle Konstanten $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $\nu_1 \ldots \nu_n$, so bestimmen,

[35]) Vgl. Def. nach Satz 4), ferner zu dem Satz über subharmonische Funktionen loc. cit.[28]).

daß die eindimensionale Fläche $F(t): \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_j = z_j^0 t^{\nu_j}, z_i = 0, j \neq i, a_1 \leq |t| \leq \leq a_3\}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten ist und daß die Punkte von $F(t)$, $|t| = a_1$, zu $\mathfrak{D}$ gehören. Die Punkte von $F(t)$ mit $|t| = 1$ sind Randpunkte von $\mathfrak{D}$. Wir können deshalb eine reelle Zahl $a_2 > a_1$, $a_2 \leq 1$ so wählen, daß die Menge $\{(z_1 \ldots z_n) \mid |z_j| = |z_j^0| \cdot |a_2|^{\nu_j}, z_i = 0\}$ Randpunktmenge von $\mathfrak{D}$ ist und daß $\{(z_1 \ldots z_n) \mid z_j = z_j^0 t^{\nu_j}, z_i = 0, a_1 < |t| < a_2\}$ ganz zu D gehört. Sind dann $\mathfrak{G}_1$ der Reinhardtsche Körper $\{(t, z_i) \mid a_1 < |t| < a_2, |z_i| < \varepsilon\}$ und $\mathfrak{G}_2$ der Reinhardtsche Körper $\{(t, z_i) \mid a_1 < |t| < a_3, 0 < |z_i| < \varepsilon\}$, und ist $^*\Lambda$ die durch die Abbildung $z_j = z_j^0 t^{\nu_j}$, $z_i = z_i$ nach $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ übertragene Kählersche Metrik Λ, so sind in bezug auf $^*\Lambda$ die Randpunkte $\{(t, z_i) \mid |t| = a_2, z_i = 0\}$ von $\mathfrak{G}$ unendlich fern. Da außerdem $\mathfrak{G}$ den weiteren Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 genügt, ergibt dieser Hilfssatz dazu einen Widerspruch. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Wir werden nun zeigen, daß man einen Reinhardtschen Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik durch Zufügen von Achsenpunkten zu einem Holomorphiegebiet ergänzen kann. Zu dem Zwecke beweisen wir die Hilfssätze 6_s, $s = 1 \ldots n$, und 7.

Hilfssatz 6_s. *Eine $\mathfrak{R}$-Achse $A_{i_1} \ldots {}_{i_k} \ldots {}_{i_s}$, $k = 1 \ldots s$, schneidet aus einem Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}^n$ mit vollständiger Kählerscher Metrik Λ einen zusammenhängenden Reinhardtschen Körper $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-s}$ im Raume der Veränderlichen $z_{j_1} \ldots z_{j_{n-s}}$, $j_1 < j_2 < \ldots j_{n-s}$, $i_\varrho \neq j_\varkappa$, $\varrho = 1 \ldots s$, $\varkappa = 1 \ldots n - s$, heraus. Die eigentlichen Punkte von $A_{i_1} \ldots {}_{i_s}$, die zu der L_{i_k}-Projektion von $\mathfrak{R}^n$ gehören, liegen in $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-s}$.*

Der Beweis ergibt sich durch Induktion:

a) 6_1: Da nach Voraussetzung $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-1} = \mathfrak{R}^n \cap A_i$ nicht leer ist, ist $\mathfrak{R}^n \cap A_i$ aus Symmetriegründen ein Reinhardtscher Bereich. Wenn $\breve{A}_i$ die Menge der eigentlichen Punkte von A_i bezeichnet, folgt aus Satz 9: $\mathfrak{R}^n \cap \breve{A}_i = L_i(\mathfrak{R}^n) \cap \breve{A}_i$, also der zweite Teil der Behauptung von Hilfssatz 6_1. Da ferner $\mathfrak{R}^n$ zusammenhängend ist, muß auch $\breve{\tilde{\mathfrak{R}}}^{n-1} = \mathfrak{R}_n \cap \breve{A}_i = L_i(\mathfrak{R}^n) \cap \breve{A}_i$ zusammenhängend und damit $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-1}$ ein Reinhardtscher Körper sein.

b) Aus 6_s folgt 6_{s+1}:

Eine $\mathfrak{R}$-Achse $A_{i_1} \ldots {}_{i_k} \ldots {}_{i_{s+1}}$ liegt in der $\mathfrak{R}$-Achse $A_{i_1} \ldots {}_{i_{k-1}}, {}_{i_{k+1}} \ldots {}_{i_{s+1}}$. Diese schneidet nach Induktionsvoraussetzung aus $\mathfrak{R}^n$ einen Reinhardtschen Körper $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-s}$ mit den Koordinaten $z_{j_1} \ldots z_{j_{n-s-1}}, z_{i_k}$, $j_\varrho \neq i_\nu$, heraus. Die Beschränkung von Λ auf $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-s}$ ist in $\tilde{\mathfrak{R}}^{n-s}$ eine vollständige Kählersche Metrik, die $\tilde{A}_{i_k}$-Achse des $(z_{j_1} \ldots z_{j_{n-s-1}}, z_{i_k})$-Raumes $^*C^{n-s}$ entspricht der $A_{i_1} \ldots {}_{i_{s+1}}$-Achse des C^n, die $\tilde{L}_{i_k}$-Projektion im $^*C^{n-s}$ ist gleich der Beschränkung der L_{i_k}-Projektion. Damit tritt Fall a) ein.

Nun sei unter einer *a-Achse* eine Achse des C^n verstanden, die keine Punkte von $\mathfrak{R}^n$ enthält. Es ergibt sich:

Hilfssatz 7. *Ist $\mathfrak{R}^n \subset C^n$ ein Reinhardtscher Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik, M Vereinigung von null oder mehreren Achsen des C^n, liegt $P \in C^n$ nicht auf einer a-Achse und gibt es ferner eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, so daß $\mathfrak{U} - M \subset \mathfrak{R}^n$ ist, so gehört P zu $\mathfrak{R}^n$.*

Zum Beweise kann $\mathfrak{U}$ so klein gewählt werden, daß $\mathfrak{U}$ keinen Punkt mit einer a-Achse gemeinsam hat. Es sei dann M^* die kleinstmögliche Vereinigungsmenge von null oder mehreren $\mathfrak{K}$-Achsen, derart, daß noch $\mathfrak{U} - M^* \subset \mathfrak{K}^n$ gilt. Sofern M^* nicht leer ist, gibt es in M^* eine Achse $A_{i_1} \ldots _{i_s}$ maximaler Dimension. $A_{i_1} \ldots _{i_s}$ enthält sicher einen eigentlichen Punkt $Q \in \mathfrak{U}$, der nicht in $\mathfrak{K}^n$ liegt. Um Q gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$, in der nur Punkte von M^* liegen, die zu den eigentlichen Punkten von $A_{i_1} \ldots _{i_s}$ gehören. Es gilt also $\mathfrak{V} - A_{i_1} \ldots _{i_s} \subset \mathfrak{K}^n$. Hilfssatz 6 ergibt: $\mathfrak{V} \cap A_{i_1} \ldots _{i_s} \cap \mathfrak{K}^n = A_{i_1} \ldots _{i_s} \cap$ $\cap L_i(\mathfrak{K}^n) \cap \mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{V} - A_{i_1} \ldots _{i_s}$ und damit $\mathfrak{K}^n$ die Menge $\mathfrak{V} \cap A_{i_1} \ldots _{i_s}$ ganz umschließt, folgt: $\mathfrak{V} \cap A_{i_1} \ldots _{i_s} \subset \mathfrak{K}^n$, also auch $Q \in \mathfrak{K}^n$. Der so zu $Q \notin \mathfrak{K}^n$ gewonnene Widerspruch löst sich nur so, daß M^* leer ist, daß $\mathfrak{U}$ und damit P in $\mathfrak{K}^n$ enthalten sind. Das war zu beweisen.

Wir bezeichnen jetzt mit M die Vereinigung aller a-Achsen der Dimension $n - s < n - 1$. Ein Punkt $P \in M$ heiße ein $\mathfrak{K}$-Punkt, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} - M \subset \mathfrak{K}^n$ von P gibt. Fügt man alle $\mathfrak{K}$-Punkte zu $\mathfrak{K}^n$ hinzu, so entsteht ein Gebiet $^*\mathfrak{K}^n$, das aus Symmetriegründen sogar ein Reinhardtscher Körper ist.

Satz 10. *Existiert in $\mathfrak{K}^n$ eine vollständige Kählersche Metrik, so ist $^*\mathfrak{K}^n$ relativ vollständig.*

Diese in Satz 10 behauptete Eigenschaft bedeutet, daß $L_i(^*\mathfrak{K}^n) = {}^*\mathfrak{K}^n \cap A_i$ für jede $^*\mathfrak{K}$-Achse A_i ist. Ein von K. Stein und S. Hitotumatu bewiesener Satz sagt aus, daß jeder logarithmisch konvexe relativ vollständige Reinhardtsche Körper holomorphkonvex, also ein Holomorphiegebiet ist[36]). Mit Satz 8 und Satz 10 ergibt das:

Satz 11. *Existiert in $\mathfrak{K}^n$ eine vollständige Kählersche Metrik, so ist $^*\mathfrak{K}^n$ holomorphkonvex.*

Wir beweisen nun den Satz 10. Liegt ein Punkt $\overline{P}(z_1^0 \ldots z_{i-1}^0, 0, z_{i+1}^0, \ldots z_n^0) \in$ $\in L_i(^*\mathfrak{K}^n)$ einer $^*\mathfrak{K}$-Achse A_i nicht in $^*\mathfrak{K}^n$, so ist $\overline{P}$ wegen Hilfssatz 6 notwendig eigentlicher Punkt einer a-Achse von $\mathfrak{K}^n$. N' sei die Vereinigung aller in A_i enthaltenen a-Achsen und N die Menge der Punkte des C^n, die durch L_i auf N' abgebildet werden. N ist wieder Vereinigung von Achsen und enthält M, die Vereinigungsmenge aller a-Achsen.

Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt $P(z_1^0 \ldots z_i^0, \ldots z_n^0) \in {}^*\mathfrak{K}^n$, $z_i^0 \neq 0$, der durch L_i auf $\overline{P}$ abgebildet wird. Um diesen Punkt legen wir eine Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}}: \{(z_1 \ldots z_n) \mid a < |z_i| < b.\ \ (z_1 \ldots z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots z_n) \in \mathfrak{V}\}$, derart, daß $\tilde{\mathfrak{U}} - M \subset \mathfrak{K}^n$ und damit $\tilde{\mathfrak{U}} - N \subset \mathfrak{K}^n$ gilt. Dabei ist $0 < a < b$ und $\mathfrak{V}$ eine Umgebung von $\overline{P}$ innerhalb von A_i. Da N' die Vereinigungsmenge der a-Achsen in A_i ist, ist jeder Punkt von $\mathfrak{V} - N'$ eigentlicher Punkt einer $\mathfrak{K}$-Achse. Nach Hilfssatz 6 gilt daher $\mathfrak{V} - N' \subset \mathfrak{K}^n$. Aus Hilfssatz 4 ergibt sich ferner unmittelbar, daß $\mathfrak{U} - N$ mit $\mathfrak{U}: \{(z_1 \ldots z_n) \mid L_i(z_1 \ldots z_n) \in \mathfrak{V},\ |z_i| < b\}$ in $\mathfrak{K}^n$ enthalten ist. Hilfssatz 7 ergibt dann, daß auch alle Punkte von $N \cap \mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{K}^n$ gehören, die nicht auf einer a-Achse liegen. Also gilt $\mathfrak{U} - M \subset \mathfrak{K}^n$ und damit,

---

[36]) K. Stein: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **114**, 543—569 (1937), hier bes. S. 557, Hilfssatz 1. Vgl. ferner S. Hitotumatu: Note on the Envelope of Regularity of a Tube Domain. Proc. of the Jap. Acad. **26**, 7. 21—25 (1950).

da $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von $\bar{P}$ ist, $\bar{P} \in {}^*\mathfrak{R}^n$. Widerspruch. Es muß $L_i({}^*\mathfrak{R}^n) = {}^*\mathfrak{R}^n \cap A_i$ sein, q.e.d.

Wir fassen nun Satz 11 und Satz A zu dem Hauptsatz dieses Paragraphen zusammen. Dabei ist zu beachten, daß ein holomorphkonvexer Reinhardtscher Körper eine spezielle holomorph vollständige Mannigfaltigkeit ist.

Satz B. *In einem Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}^n$ existiert dann und nur dann eine vollständige Kählersche Metrik mit reellanalytischen Koeffizienten, wenn $\mathfrak{R}^n$ durch Herausnahme von Achsen der Dimension $k \leqq n-2$ aus einem holomorphkonvexen Reinhardtschen Körper entstanden ist.*

§ 5. Ein Kontinuitätssatz für Gebiete mit vollständiger Kählerscher Metrik. Minimalflächen

Unter einer *Schar eindimensionaler analytischer Flächen $F(t)$* im Raume C^n von n komplexen Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ werde im folgenden eine noch von einem reellen Parameter t, $0 \leqq t \leqq 1$, abhängende holomorphe Abbildung $z_\nu = f_\nu(z, t)$, $\nu = 1 \ldots n$, (einer Umgebung) eines Kreises K: $|z| \leqq d$ in den C^n verstanden. Dabei sei vorausgesetzt, daß die $f_\nu(z, t)$ in allen Variablen wenigstens einmal stetig differenzierbar sind. Es folgt folgender

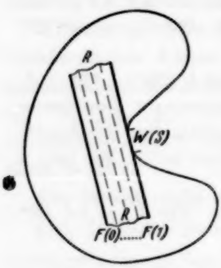

Fig. 2

Satz 12. *Ist zu einem Gebiet $\mathfrak{G} \subset C^n$ eine Schar analytischer Flächen $F(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, definiert, derart, daß*

a) die Menge $R: \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f_\nu(de^{i\vartheta}, t),\ \vartheta$ reell, $0 \leqq t \leqq 1\}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist,

b) $F(t)$ für $0 \leqq t < 1$ in $\mathfrak{G}$ liegt,

c) $F(1)$ mit dem Rande von $\mathfrak{G}$ einen echten Weg $W(s): \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f_\nu(z(s), 1),\ 0 \leqq s \leqq 1\}$ mit $z(0) \neq z(1)$ gemeinsam hat, so sind in bezug auf eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Kählersche Metrik Λ niemals alle Punkte von $W(s)$ unendlich fern.

Wir setzen in Satz 12 nicht voraus, daß Λ reellanalytische Koeffizienten besitzt. Vielmehr wird *nur gefordert, daß in einer Umgebung eines jeden Punktes von $\mathfrak{G}$ eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion von Λ existiert.*

Beweis von Satz 12. Wir bilden zunächst die Λ in kanonischer Weise zugeordnete äußere Differentialform $\Omega = i \sum g_{\nu\bar\mu} dz_\nu d\bar z_\mu$. Nach Voraussetzung gibt es zu Λ in einer Umgebung $\mathfrak{B}(P)$ eines jeden Punktes $P \in \mathfrak{G}$ ein Potential U. Es ist in $\mathfrak{B}$: $\frac{\partial^2 U}{\partial z_\nu \partial \bar z_\mu} = g_{\nu\bar\mu}$ und deshalb, wenn wir $\omega = -i \sum \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu$ setzen, dort $\Omega = d\,\omega$ (d = äußere Ableitung einer Differentialform).

Es werde mit $A(t_1, t_2)$, $0 \leqq t_1 < t_2 < 1$, die zweidimensionale Fläche $\{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_\nu = f_\nu(de^{i\vartheta}, t),\ \vartheta$ reell, $t_1 \leqq t \leqq t_2\} \subset \mathfrak{G}$ bezeichnet. $A(t_1, t_2)$ werde durch die Festsetzung orientiert, daß der Übergang von der positiven ϑ-Richtung in die positive t-Richtung eine positive Drehung sein soll. Wir zerlegen nun den Kreis $K: \{|z| \leqq d\}$ in endlich viele Teilgebiete $K_1, \ldots, K_k$ mit stückweise stetig differenzierbarem Rande und ebenso das Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ in Teilintervalle $I_\nu: \{t \mid t^{(\nu-1)} \leqq t \leqq t^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, \ldots, m$, $t_1 = t^{(0)} < t^{(1)} < \cdots < t^{(m)} = t_2$. Diese

Zerlegung kann so fein gewählt werden, daß die Flächen $F_{\nu\mu} = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\varkappa = f_\varkappa(z, t),\ z \in K_\nu,\ t \in I_\mu\}$, $\nu = 1, \ldots, k$, $\mu = 1, \ldots, m$ in Umgebungen $\mathfrak{V}_{\nu\mu}$ enthalten sind, in denen $\Omega = d\,\omega_{\nu\mu}$ ist. Nach dem Stokeschen Satz gilt:

$$\int\limits_{A(t_1,t_2)+F(t_2)-F(t_1)} \Omega = \sum_{\nu,\mu} \int\limits_{rd F_{\nu\mu}} \Omega = \sum \int\limits_{rd\,rd F_{\nu\mu}} \omega_{\nu\mu} = 0,$$

da die doppelte Anwendung des Randoperators rd auf $F_{\nu\mu}$ null ergibt. Somit wird, wenn wir $q(t) = \int\limits_{F(t)} \Omega$ setzen, $|q(t_2) - q(t_1)| = |\int\limits_{A(t_1,t_2)} \Omega|$. $A(0, 1)$ liegt ganz im Innern von $\mathfrak{G}$; Ω ist also in einer Umgebung von $A(0, 1)$ beschränkt. Es gibt daher ein $M > 0$, derart, daß $|\int\limits_{A(t_1,t_2)} \Omega| < M$ für $0 \leqq |t_\nu| \leqq 1$, $\nu = 1{,}2$ ist. Daraus folgt sofort, daß $q(t)$ für $t \to 1$ beschränkt sein muß.

Andererseits können wir zeigen, daß $q(t)$ mit $t \to 1$ über alle Grenzen wächst, wenn $F(1)$ mit $rd\,\mathfrak{G}$ einen echten unendlichfernen Weg $W(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_\nu = f_\nu(z(s), 1),\ 0 \leqq s \leqq 1\}$ gemeinsam hat. Da der Rand des Kreises K durch $z_\nu = f_\nu(z, 1)$ in das Innere des Gebietes $\mathfrak{G}$ abgebildet wird, ist die Menge $N = \{z \mid (f_1(z, 1), \ldots, f_n(z, 1)) \in rd\,\mathfrak{G}\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathring{K}$. Der Weg $\overline{W}(s) = \{z \mid z = z(s),\ 0 \leqq s \leqq 1\}$ ist in N enthalten. Da nach Voraussetzung $z(0) \neq z(1)$ ist, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x(0) \neq x(1)$ ist, wenn wir $z(s) = x(s) + i\,y(s)$ setzen. Es gibt dann eine Strecke $\overline{S} = \{(x, y) \mid x(0) \leqq a_1 \leqq x \leqq a_2 \leqq x(1),\ y = b\} \subset K - N$ (mit $z = x + i\,y$ und $a_1 < a_2$), derart, daß alle Strecken $\{(x, y) \mid x = a,\ b \leqq y \leqq + \sqrt{d^2 - a^2}\}$ mit $a_1 \leqq a \leqq a_2$ nicht durch $\overline{W}(s)$ verlaufen. Daraus folgt, daß jede Strecke $\{(x, y) \mid x = a,\ b \geqq y \geqq -\sqrt{d^2 - a^2}\}$, $a_1 \leqq a \leqq a_2$, den Weg $\overline{W}(S)$ in einem ersten Punkt $y = d(a)$ trifft. Es ist für $0 \leqq t < 1$:

$$q(t) = \int\limits_{F(t)} \Omega = 2 \int\limits_{|z| \leqq d} g(x, y; t)\, dx\, dy \geqq \left[\min_{a_1 \leqq x \leqq a_2} \int\limits_{d(x)}^{b} g\, dy\right] (a_2 - a_1),$$

wenn $g(x, y; t) = \sum g_{\nu\bar{\mu}} \dfrac{\partial f_\nu(z, t)}{\partial z} \dfrac{\partial \bar{f}_\mu(z, t)}{\partial \bar{z}}$ gesetzt wird. Da $\sum g_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$ in $\mathfrak{G}$ positiv definit und daher in K: g nirgends negativ ist, folgt:

$$\min \int\limits_{d(x)}^{b} g\, dy \geqq \min \int\limits_{d(x)}^{b} \sqrt{g}\, dy - 2d\,.$$

Offenbar ist $\sqrt{g}\, dy = ds$. Das ergibt:

$$\min \int\limits_{d(x)}^{b} g(t)\, dy \geqq E(S(t, s),\ W(t, s)) - 2d,$$

wenn E bei festem t die Entfernung in G der Wege: $S(t, s) = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f_\nu(z, t),\ z = s + ib,\ a_1 \leqq s \leqq a_2\}$ und $W(t, s) = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f_\nu(z(s), t),\ 0 \leqq s \leqq 1\}$ bezeichnet. Die Vereinigungsmenge $\bigcup\limits_{t=0}^{1} S(t, s) = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f_\nu(s + ib, t),\ a_1 \leqq s \leqq a_2,\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ liegt kompakt in $\mathfrak{G}$, da $z_\nu = f_\nu(z, 1)$ die Strecke $\overline{S}$ in das Innere von $\mathfrak{G}$ abbildet. Nach Voraussetzung sind alle Punkte des Weges $W(s) = W(1, s)$ unendlich ferne Randpunkte von $\mathfrak{G}$. Deshalb strebt die Entfernung $E(\bigcup\limits_{t} S(t, s),\ W(t, s))$ des Weges $W(t, s)$ von $\bigcup S(t, s)$ mit $t \to 1$ gegen

$\to \infty$. Da $E(S(t,s), W(t,s)) \geq E(\bigcup_t S(t,s), W(t,s))$ ist, gilt auch $\lim_{t\to 1} E(S(t,s), W(t,s)) = \infty$ und folglich ist $q(t)$ für $t \to 1$ unbeschränkt. Dieser Widerspruch löst sich nur so, daß es Punkte von $W(S)$ gibt, die nicht unendlich fern sind. Das aber wurde in Satz 12 behauptet.

Unter der Annahme, daß die analytische Fläche F mit dem Rande von $\mathfrak{G}$ nur einen Punkt, also nicht einen echten Weg gemeinsam hat, gilt die Aussage von Satz 12 nicht immer. $\mathfrak{G}$ sei etwa der $\dot{C}^2 = \{(z_1 z_2) \mid (z_1 z_2) \neq (0,0)\}$, in dem die vollständige Kählersche Metrik A_2 (vgl. den Beweis von Satz A) vorgegeben ist; $F(t)$ sei die Flächenschar $\{(z_1 z_2) \mid z_1 = z,\ z_2 = 1 - t,\ |z| \leq 1\}$. $F(t)$ genügt mit der angegebenen Ausnahme den Voraussetzungen des Satzes 12. Andererseits hat $F(1)$ mit $rd\,\dot{C}^2$ den unendlichfernen Punkt $(0,0)$ und damit einen unechten unendlichfernen Weg gemeinsam, dessen Punkte alle unendlichfern sind.

Aus Satz 12 ergibt sich unmittelbar, daß Gebiete mit vollständiger Kählerscher Metrik einem Kontinuitätssatz[37]) genügen müssen:

Satz 13. *Zu jedem Gebiet $\mathfrak{G} \subset C^n$ mit vollständiger Kählerscher Metrik gibt es keine Schar analytischer Flächen $F(t): z_\nu = f_\nu(z,t)$, derart, daß die Menge $\{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = f(de^{i\vartheta}, t),\ \vartheta$ reell, $0 \leq t \leq 1\}$ in $\mathfrak{G}$ liegt, $F(t)$ für $0 \leq t < 1$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, $F(1)$ aber mit dem Rande von $\mathfrak{G}$ ein Kontinuum gemeinsam hat.*

Mit Satz 12 eng verknüpft ist eine Betrachtung des Flächeninhaltes von analytischen Mengen N in komplexen Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Maßbestimmung.

Es sei definiert:

Ein Punkt $P \in N$ heißt *gewöhnlicher Punkt der (komplexen) Dimension s* von N, wenn es ein lokales Koordinatensystem $\mathfrak{U}(z_1 \ldots z_n) \in \{\mathfrak{U}_j\}$ um P gibt, in dem $n - s$ genau auf $N \cap \mathfrak{U}$ simultan verschwindende holomorphe Funktionen $f_1 \ldots f_{n-s}$ existieren, deren Funktionalmatrix $\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\right)\right)$ in P den Rang $n - s$ hat.

Ferner werde N *rein von der Dimension s* genannt, wenn alle gewöhnlichen Punkte $P \in N$ die Dimension s besitzen.

In einem gewöhnlichen Punkt P der Dimension s läßt sich das Gleichungssystem $f_1 = \cdots = f_{n-s} = 0$ nach $n - s$ Variablen auflösen. Ist etwa $\frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-s})}{\partial(z_{s+1} \ldots z_n)} \neq 0$ in P, so wird N in einer Umgebung $\mathfrak{U}^*(P) \subset \mathfrak{U}$, die in den Koordinaten von $\mathfrak{U}$ die Gestalt eines Polyzylinders $|z_\nu - z_\nu^0| < d_\nu$ erhält, durch ein Gleichungssystem $z_{s+\lambda} = g_\lambda(z_1 \ldots z_s)$, $\lambda = 1 \ldots n - s$, dargestellt. Dabei sind die g_λ in U^* holomorphe Funktionen.

In dem Polyzylinder $\mathfrak{U}^*$ stellt bekanntlich $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} h_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta$ mit $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$, $dz^\nu = dz_\nu$, $dz^{n+\nu} = d\bar{z}_\nu$ genau dann eine reelle Riemannsche Metrik in

[37]) K. OKA (loc. cit.[12])) konnte zeigen, daß ein Gebiet $\mathfrak{G}$ genau dann Holomorphiegebiet ist, wenn $F(1)$ mit dem Rande $rd\,\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ keinen Punkt gemeinsam haben kann. Im Gegensatz dazu können wir nur zeigen, daß $F(1)$ mit $rd\,\mathfrak{G}$ kein Kontinuum gemeinsam hat.

komplexer Schreibweise dar. wenn $h_{\nu,\mu} = \bar{h}_{n+\nu,\, n+\mu}$ und die $h_{\nu,\, n+\mu} = h_{\mu,\, n+\nu}$, $\nu, \mu = 1 \ldots n$, sind. Da das Raumelement einer solchen Metrik durch den Ausdruck $do = \pm \sqrt{\| h_{\varkappa\beta} \|}\, dz^1 \ldots dz^{2n}$ gegeben wird, der formal (bis auf einen konstanten Faktor) mit dem Ausdruck für das Raumelement einer reell geschriebenen Metrik übereinstimmt, und da ferner die verallgemeinerten Eulerschen Gleichungen eines Variationsproblems im Komplexen dieselbe Gestalt wie im Reellen haben, besitzen auch die Minimalflächengleichungen im Komplexen die gleiche Gestalt wie im Reellen[38]). Deshalb gilt, wenn $\mathfrak{M}^n$ eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik $\Lambda : ds^2 = \Sigma h_{\varkappa\beta}\, dz^\varkappa dz^\beta$ ist, wenn $F : \{z_\mu = f_\mu(w_1 \ldots w_s, \bar{w}_1 \ldots \bar{w}_s),\ |w_\nu| \leqq d_\nu,\ \nu = 1 \ldots s,\ \mu = 1 \ldots n\}$ eine zweimal stetig differenzierbare Fläche in $\mathfrak{M}^n$ ist und wir ferner mit Λ^* die durch $z_\mu = f_\mu(w_1 \ldots w_s, \bar{w}_1 \ldots \bar{w}_s)$ nach $\mathfrak{Z} : \{|w_\nu| < d_\nu,\ \nu = 1 \ldots s\}$ übertragene Metrik Λ bezeichnen:

F ist dann und nur dann Minimalfläche, wenn in $\mathfrak{Z}$ die Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa, \beta, \nu, \mu}^{2n} g^{\varkappa\beta} (z^\tau_{,\varkappa,\beta} - (\Gamma^\tau_{\mu\nu})_h\, z^\mu_{,\alpha}\, z^\nu_{,\beta}) = 0, \qquad \tau = 1 \ldots 2n$$

erfüllt sind, in denen $g^{\varkappa\beta}$ die kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors von Λ^* in bezug auf $w_1 \ldots w_s$; $z^\tau_{,\varkappa,\beta}$, $z^\mu_{,\varkappa}$, $z^\nu_{,\beta}$ die kovarianten Ableitungen der Funktionen $z^\tau = f_\tau$ (mit $f_{n+\nu} = \bar{f}_\nu$, $\nu = 1 \ldots n$) in bezug auf Λ^* und $(\Gamma^\tau_{\mu\nu})_h$ den affinen Zusammenhang der Metrik Λ bedeuten. Bei einer Hermiteschen Metrik $ds^2 = \Sigma h_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu d\bar{z}_\mu$ (wobei $h_{\nu\bar{\mu}} = h_{\nu,\, n+\mu}$), ergibt sich daraus als Minimalflächengleichung für die analytische Fläche $F : \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\mu = w_\mu,\ z_{s+\lambda} = g_\lambda(w_1 \ldots w_s),\ |w_\mu| < d_\nu, \mu = 1 \ldots s,\ \lambda = 1 \ldots n - s\} \subset \mathfrak{U}^*$ die Beziehung:

$$\sum_{\nu, \mu, \varkappa, \lambda}^{n} g^{\nu, s+\mu} (z^\tau_{,\nu,\, n-\mu} - (\Gamma^\tau_{\varkappa,\, n-\lambda})_h\, z^\varkappa_{,\nu}\, \overline{z^\lambda_{,\mu}}) = 0, \qquad \tau = 1 \ldots 2n$$

oder ausgerechnet:

$$\sum_{\substack{\nu, \mu, \varkappa, \lambda \\ \gamma = 1 \ldots 2n}}^{n} g^{\nu, s-\mu} (-z^\tau_{,\gamma}\, (\Gamma^\gamma_{\nu,\, s-\mu})_g - (\Gamma^\tau_{\varkappa,\, n-\lambda})_h\, z^\varkappa_{,\nu}\, \overline{z^\lambda_{,\mu}}) = 0,$$

wenn $(\Gamma^\gamma_{\nu,\, s-\mu})_g$ Komponenten des affinen Zusammenhangs der Metrik Λ^* bedeuten. Wie man leicht errechnet[39],) ist eine Hermitesche Metrik $ds^2 = \Sigma h_{\nu\bar{\mu}}\, dz_\nu d\bar{z}_\mu$ in $\mathfrak{M}^n$ dann und nur dann Kählersch, wenn mit Ausnahme von $(\Gamma^\varkappa_{\nu\mu})_h$ und $(\Gamma^{n-\varkappa}_{n+\nu,\, n+\mu})_h$ $\nu, \mu, \varkappa = 1 \ldots n$, alle Komponenten ihres affinen Zusammenhangs verschwinden. Ist Λ nun in $\mathfrak{M}^n$ Kählersch, so ist auch Λ^* eine Kählersche Metrik. Daraus folgt, daß dann für eine analytische Menge in jedem gewöhnlichen Punkt die Minimalflächengleichung erfüllt ist. Analytische Mengen mit solcher Eigenschaft seien *Minimalflächengebilde* genannt.

Ist andererseits in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ des C^n jede rein 1-dimensionale analytische Menge $X \subset \mathfrak{G}$ in bezug auf eine in $\mathfrak{G}$ definierte Hermitesche Metrik

---

[38]) Vgl. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton 1949, hier besonders pp. 176–178.

[39]) Vgl. auch H. Guggenheimer: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik. Com. Math. Helvet. **25**, 257—297 (1951).

$\Lambda : ds^2 = \Sigma h_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ Minimalflächengebilde, so muß für jede eindimensionale Ebene $z_\varkappa = a_\varkappa t + b_\varkappa$, $\varkappa = 1 \ldots n$ (t komplex), durch einen Punkt von $\mathfrak{G}$

$$\Sigma g^{1,2} (\Gamma^\tau_{\nu, n+\mu})_h a_\nu \bar{a}_\mu = 0 \qquad \text{für } \tau = 1 \ldots 2n$$

sein. Da $g^{1,2} \neq 0$ und die a_ν beliebig gewählt werden können, folgt $(\Gamma^\tau_{\nu, n+\mu})_h = 0$. Man errechnet ferner, daß die Komponenten $\Gamma^{n+\varkappa}_{\nu,\mu}$ und $\Gamma^\varkappa_{n+\nu, n+\mu}$; ν, μ, $\varkappa = 1 \ldots n$, $\tau = 1 \ldots 2n$, bei jeder Hermiteschen Metrik verschwinden. Somit sind nur die $\Gamma^\varkappa_{\nu,\mu}$ und die $\Gamma^{n+\varkappa}_{n+\nu, n+\mu}$ von null verschieden, d. h. Λ ist Kählersch.

Es gilt also der

Satz 14. *In jeder Kählermannigfaltigkeit sind die analytischen Mengen Minimalflächengebilde. Sind in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ des C^n mit Hermitescher Metrik Λ alle eindimensionalen analytischen Mengen Minimalflächengebilde, so ist Λ eine Kählersche Metrik.*

Dieser Satz gibt den tieferen Grund für die Gültigkeit von Satz 12. In einem Gebiet $\mathfrak{G}$ des Raumes von n komplexen Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ gilt auf einer eindimensionalen analytischen Fläche $F : \{z_k = f_k(w), k = 1 \ldots n\}$ für das Flächenelement do in bezug auf eine in $\mathfrak{G}$ gegebene Kählersche Metrik $ds^2 = \Sigma h_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$:

$$do = i \Sigma h_{\nu\bar{\mu}} \frac{\partial f_\nu}{\partial w} \frac{\partial \bar{f}_\mu}{\partial \bar{w}} d w d \bar{w} = \Omega .$$

Also ist $\int \Omega = I$, dem Inhalt von F. Könnte sich nun eine analytische Fläche F so an den Rand von $\mathfrak{G}$ anschmiegen, daß sie mit $rd\,\mathfrak{G}$ ein Kontinuum gemeinsam hat und ihr Inhalt daher unendlich wird, so kann I auf allen in hinreichender Nähe von F in $\mathfrak{G}$ gelegenen analytischen Flächen nicht stationär sein.

§ 6. Hartogssche Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik

Unter einem *Hartogsschen Körper* im Raume von n komplexen Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$ sei ein Gebiet $H^n \subset C^n$ verstanden, das als Automorphismen die Drehungen $\tau(\vartheta) : z_1 \to z_1 e^{i\vartheta}$, $z_2 \to z_2 \ldots z_n \to z_n$ zuläßt. Zunächst seien Hartogssche Körper $H^2 \subset C^2$ betrachtet, die durch eine Ungleichung $R_1(z_2, \bar{z}_2) < |z_1| < R_2(z_2, z_2)$, $z_2 \in \mathfrak{G}$, gegeben werden können. Dabei seien $\mathfrak{G}$ ein Gebiet der z_2-Ebene, R_1, R_2 in $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktionen, und überall in $\mathfrak{G}$ gelte $0 < R_1 < R_2$. In H^2 sei eine positive definite Kählersche Metrik $\Lambda : ds^2 = \sum\limits_{\nu, \mu = 1}^{2} g_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu dz_\mu$ definiert. Ist unter Λ eine Randpunktmenge $\{z^{(0)}\}^!_r$ (vgl. Hilfssatz 3) von H^2 unendlich fern, so gilt nach Hilfssatz 3 Gleiches in bezug auf die aus Λ gebildete Kählersche Metrik $\overset{c}{\Lambda} : ds^2 = \Sigma \mathring{g}_{\nu\bar{\mu}} dz_\nu d\bar{z}_\mu$. H^2 werde durch die (nicht eindeutige, aber eindeutig umkehrbare) Transformation $L : w_1 = \ln z_1$, $w_2 = z_2$ auf die *Halbtube* $\mathfrak{T} : \{(w_1, w_2) \mid \ln R_1 < u < \ln R_2, w_2 \in \mathfrak{G}\}$, $w_1 = u + iv$, abgebildet. Es sei $\Lambda_T : ds^2 = \Sigma h_{\nu\bar{\mu}} dw_\nu d\bar{w}_\mu$ die durch L nach $\mathfrak{T}$ übertragene Metrik $\mathring{\Lambda}$. Da alle Abbildungen $\tau(\vartheta)$ in bezug auf $\mathring{\Lambda}$ isometrisch sind, sind die Automorphismen $\sigma(\vartheta) : w_1 \to w_1 + i\vartheta$, $w_2 \to w_2$ isometrische Abbildungen von $\mathfrak{T}$. Das bedeutet aber, daß die $h_{\nu\bar{\mu}}$ nicht vom

Imaginärteil v von w_1 abhängen. Ist $\{z^{(0)}\}_\tau^1$ eine unendlichferne Randpunktmenge, so sind offenbar unter Λ_T alle Randpunkte $\{w^{(0)}\}_\sigma^{\cdot} = L(\{z^{(0)}\}_\tau^1)$, $w^{(0)} = L(z^{(0)})$ unendlichfern. Wie man unmittelbar sieht, ist $\{w^{(0)}\}_\sigma$ eine Punktmenge, die in der Form $\{(w_1, w_2) \mid u = u^0,\ w_2 = w_2^{(0)}\}$, $w^{(0)} = (w_1^{(0)}, w_2^{(0)})$, gegeben werden kann. Wir zeigen:

(1) *Λ_T besitzt in $\mathfrak{T}$ ein globales Potential $U(u; w_2, \overline{w}_2)$.*

Beweis. Aus den Kählerschen Bedingungen für Λ_T ergibt sich unmittelbar, daß die alternierende Differentialform $\varphi = 2h_{1,\overline{1}}\,du + h_{2,\overline{1}}\,dw_2 + h_{1,\overline{2}}\,d\overline{w}_2$ geschlossen ist (in Zeichen $d\varphi = 0$). $U^* = \int_{w^{(1)}}^{(w_1, w_2)} \varphi + C$ mit $w^{(1)} \in \mathfrak{T}$ stellt deshalb eine Funktion in $\mathfrak{T}$ dar. U^* hängt nicht von v ab und ist reell, wenn wir für C eine reelle Zahl gewählt haben. Ist dann $\widetilde{U}(u; w_2, \overline{w}_2)$ eine reelle Funktion in $\mathfrak{T}$ mit $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial u} = 2U^*$, so gilt:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial w_1 \partial \overline{w}_1} = \frac{1}{4}\widetilde{U}'' = h_{1,\overline{1}}\,; \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial w_1 \partial \overline{w}_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{U}'}{\partial \overline{w}_2} = h_{1,\overline{2}}\,; \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial w_2 \partial \overline{w}_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{U}'}{\partial w_2} = h_{2,\overline{1}}$$

und ferner

$$\left(\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} - h_{2,\overline{2}}\right)' = 2\left(\frac{\partial h_{1,\overline{2}}}{\partial w_2} - \frac{\partial h_{2,\overline{2}}}{\partial w_1}\right) = 0 \qquad \left(\text{mit } \widetilde{U}' = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial u}\,;\ \ \widetilde{U}'' = \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial u^2}\right)$$

Somit ist $f^* = \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} - h_{2,\overline{2}}$ eine reine Funktion in w_2 und $\overline{w}_2$. Es gibt nun eine reellwertige Funktion f in $\mathfrak{S}$, für die dort $\frac{\partial^2 f}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} = f^*$ ist. Setzen wir noch $U = \widetilde{U} - f$, so ist offenbar U ein in (1) gefordertes Potential von Λ_T.

(2) *Eine reellwertige, stetige Funktion $R(w_2, \overline{w}_2) > 0$ sei in $\mathfrak{S}$ so gewählt, daß dort $\ln R_1 < R < \ln R_2$ gilt. Liegt dann ein Gebiet $\breve{\mathfrak{S}}$ (mit glattem Rande) relativ kompakt in $\mathfrak{S}$, so kann man $C > 0$ so bestimmen, daß $\frac{\partial U}{\partial u} = U' > 0$ ist in $\breve{\mathfrak{T}}: \{(w_1, w_2) \mid \ln R(w_2, \overline{w}_2) < u < \ln R_2(w_2, \overline{w}_2),\ w_2 \in \breve{\mathfrak{S}}\}$.*

Beweis. Es ist $U'(u^{(0)}; w_2^{(0)}, \overline{w}_2^{(0)}) = 2 \int_{w^{(1)}}^{\left(\ln R\left(w_2^{(0)}, \overline{w}_2^{(0)}\right),\, w_2^{(0)}\right)} \varphi + 4 \int_{\mathfrak{L}} h_{1,\overline{1}}\,du + C,$

wenn $\mathfrak{L}$ die Strecke $\{(u, w_2) \mid \ln R(w_2^{(0)}, \overline{w}_2^{(0)}) < u < u^{(0)},\ w_2 = w_2^{(0)}\}$ bezeichnet. Der erste Term τ der vorstehenden Gleichung ist auf $\{(u, w_2) \mid u = \ln R(w_2, \overline{w}_2), w_2 \in \breve{\mathfrak{S}}\}$ beschränkt. Es ist also dort $\tau + C > 0$, wenn $C > 0$ hinreichend groß gewählt ist. Da ferner Λ_T positiv definit ist, und damit $h_{1,\overline{1}} > 0$ gilt, folgt, daß für ein solches C die Ungleichung $U' > 0$ in $\breve{\mathfrak{T}}$ gilt.

Durch eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion $r(w_2, \overline{w}_2)$ in $\mathfrak{S}$ wird Λ_T eine (nicht notwendig positiv definite) Kählersche Metrik $r \circ \Lambda$: $ds^2 = \Sigma\, \hat{h}_{\nu\overline{\mu}}\, dw_\nu d\overline{w}_\mu$ in der Halbtube $r \circ \breve{\mathfrak{T}}: \{(w_1, w_2) \mid \ln R - r < u < \ln R_2 - r,\ w_2 \in \breve{\mathfrak{S}}\}$ zugeordnet, wenn man fordert, daß die Funktion $\hat{U}(u; w_2, \overline{w}_2) = U(u + r; w_2, \overline{w}_2)$ Potential von $r \circ \Lambda$ sein soll. Da $\hat{U}$ sicher zweimal stetig differenzierbar ist, folgt, daß alle $\hat{h}_{\nu\overline{\mu}}$ stetige Funktionen sind. Wie eine kurze Rechnung

zeigt, gilt:

$$\hat{h}_{\nu\bar{\mu}} = \Sigma\, h_{\lambda\bar{\kappa}}(u+r;\, w_2, \overline{w}_2)\, \gamma_{\lambda\nu}\, \overline{\gamma}_{\kappa\mu} + \eta_{\nu\bar{\mu}} U',$$

wobei

$$(\gamma_{\kappa\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & 2\dfrac{\partial r}{\partial w_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (\eta_{\nu\bar{\mu}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 r}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} \end{pmatrix}$$

ist. Setzen wir noch $h^*_{\nu\bar{\mu}} = \Sigma\, h_{\lambda\bar{\kappa}}\, \gamma_{\lambda\nu}\, \overline{\gamma}_{\kappa\mu}$, so ist offenbar die Metrik $\Lambda^*: ds^2 = \Sigma\, h^*_{\nu\bar{\mu}} dw_\nu d\overline{w}_\mu$ positiv definit. $r \circ \Lambda_T$ hat folgende Eigenschaften:

1. *$r \circ \Lambda_T$ ist in $r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ sicher dann positiv definit, wenn $\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} \geqq 0$ in $\breve{\mathfrak{S}}$ ist.*

2. *Ist eine Randpunktmenge $\{w^{(0)}\}_\sigma$: $\{(w_1, w_2) \mid u = u_0,\, w_2 = w_2^0\}$ von $\breve{\mathfrak{T}}$ unendlichfern in bezug auf Λ_T, so ist $\{\hat{w}^{(0)}\}_\sigma = \{(w_1, w_2) \mid u = u_0 - r,\, w_2 = w_2^0\} \subset \subset rd\, r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ unter der Maßbestimmung $r \circ \Lambda_T$ unendlichfern, wenn $\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} \geqq 0$ in $\breve{\mathfrak{S}}$ ist.*

Beweis. Da Λ^* positiv definit ist, folgt 1. unmittelbar, wenn man beobachtet, daß U' in $\breve{\mathfrak{T}}$ positiv ist. Zum Beweise von 2. ordne man jeder stetig differenzierbaren Kurve $\hat{\mathfrak{L}}: \{(\hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t)) \mid 0 \leqq t \leqq 1\} \subset r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ die stetig differenzierbare Kurve $\mathfrak{L}: \left\{(w_1, w_2) \mid w_1 = \hat{w}_1(t) + r(\hat{w}_2(t), \overline{\hat{w}}_2(t)) + \int\limits_0^t \left(\dfrac{\partial r}{\partial w_2}\dfrac{d\hat{w}_2}{dt} - \dfrac{\partial r}{\partial \overline{w}_2}\dfrac{d\overline{\hat{w}}_2}{dt}\right) dt,\; w_2 = \hat{w}_2(t)\right\}$ zu. $\mathfrak{L}$ liegt in $\breve{\mathfrak{T}}$, da der Integralausdruck in der Definition von $\mathfrak{L}$ rein imaginär ist. Es gilt: $\dfrac{dw_1}{dt} = \dfrac{d\hat{w}_1}{dt} + 2\dfrac{\partial r}{\partial w_2} \cdot \dfrac{d\hat{w}_2}{dt}$; $\dfrac{dw_2}{dt} = \dfrac{d\hat{w}_2}{dt}$ und daher: $\dfrac{dw_\nu}{dt} = \sum\limits_{\mu=1}^{2} \gamma_{\nu\mu} \dfrac{d\hat{w}_\mu}{dt}$. $\hat{\mathfrak{L}}$ hat also in bezug auf Λ^* die gleiche Länge wie $\mathfrak{L}$ in bezug auf Λ_T und, falls $\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_2 \partial \overline{w}_2} \geqq 0$, in bezug auf $r \circ \Lambda_T$ höchstens eine größere Länge als $\mathfrak{L}$. Enthielte nun $\{\hat{w}^{(0)}\}_\sigma$ einen endlichfernen Punkt $\hat{w}^{(1)}$, so könnte man eine Punktfolge $\hat{w}^{(\nu)} \in r \circ \breve{\mathfrak{T}}$, $\nu = 2, 3 \ldots$, finden, die gegen $\hat{w}^{(1)}$ konvergiert, derart, daß man alle $\hat{w}^{(\nu)}$ mit einem inneren Punkt $0 \in r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ durch stetig differenzierbare Kurven $\hat{\mathfrak{L}}_\nu: \{\hat{w}_1^{(\nu)}(t), \hat{w}_2^{(\nu)}(t)\} \subset r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ verbinden kann, deren Längen in bezug auf $r \circ \Lambda_T$ beschränkt sind. Da man ferner dabei, weil die Ränder von $\breve{\mathfrak{S}}$ und $\breve{\mathfrak{T}}$ glatt sind, voraussetzen darf, daß $\left|\dfrac{dw_2^{(\nu)}}{dt}\right|$ eine von ν, t unabhängige Schranke besitzt, ist der Integralausdruck τ in der Definition der zu den $\hat{\mathfrak{L}}_\nu$ konstruierten Kurven $\mathfrak{L}_\nu$ (unabhängig von ν) beschränkt. Die $\mathfrak{L}_\nu$ enden daher in Punkten $w^{(\nu)} \in \breve{\mathfrak{T}}$, die sich gegen mindestens einen Randpunkt $w^{(1)} \in \{w^{(0)}\}_\sigma$ häufen. Die Längen der $\mathfrak{L}_\nu$ sind beschränkt. $w^{(1)}$ ist also im Gegensatz zu unserer Voraussetzung endlichfern. Damit ist auch 2. bewiesen.

Satz 15. *Ist $z_2(s) \subset \breve{\mathfrak{S}}$, $0 \leqq s \leqq 1$, ein echter Weg und ist die Randpunktmenge $D: \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = R_\nu[z_2(s), z_2(s)],\, z_2 = z_2(s),\, 0 \leqq s \leqq 1\}$ von $\mathfrak{H}^2$ unter Λ unendlichfern, so gilt für alle $z_2 \in \{z_2(s)\}$ die Ungleichung $(-1)^\nu \dfrac{\partial^2 \ln R_\nu(z_2, \overline{z}_2)}{\partial z_2 \partial \overline{z}_2} \leqq 0$.*

Beweis. Es sei $\nu = 2$. Wir setzen $z(s) = (R_2[z_2(s), \bar{z}_2(s)], z_2(s))$. Nach Definition (vgl. Hilfssatz 3) ist $D = \bigcup_{0 \leq s \leq 1} \{z(s)\}_r^1$. Es folgt, daß unter A_T die Randpunktmenge $\bigcup \{w(s)\}_\sigma = \{(w_1, w_2),\ u = \ln R_2[z_2(s), \bar{z}_2(s)],\ w_2 = z_2(s),\ 0 \leq \leq s \leq 1\}$ von $\breve{\mathfrak{T}}$ unendlich fern ist. Wir nehmen nun an, Satz 15 wäre falsch. Es gibt dann einen Punkt $z_2^0 \in \{z_2(s)\}$ und einen Kreis $K : \{z_2 \mid |z_2 - z_2^0| < \varepsilon\} \subset \mathfrak{G}$, in dem $\frac{\partial \ln R_2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} > 0$ gilt. Es sei q eine beliebig oft stetig differenzierbare, reellwertige Funktion in K, die in $K^* : \left\{z_2 \mid |z_2 - z_2^0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ identisch 1 und in $K - K^*$ kleiner als 1 ist. Setzen wir $r(z_2, \bar{z}_2) = q \cdot \ln R_2(z_2, \bar{z}_2)$, so gilt in einer offenen Umgebung $\breve{\mathfrak{G}} \subset K$ von K^* noch $\frac{\partial r}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} > 0$. In K^* ist $r \equiv \ln R_2$, in $K - K^* : r < < \ln R_2$. Es werde in $\mathfrak{G}$ die Funktion R so gewählt, daß dort $\ln R_1 < \ln R < \ln R_2$ gilt. Gehen wir nun von der Halbtube $\breve{\mathfrak{T}}$ zu $r \circ \breve{\mathfrak{T}} : \{(w_1, w_2) \mid \ln R - r < u < < \ln R_2 - r,\ w_2 \in \breve{\mathfrak{G}}\}$ über, so sind in bezug auf $r \circ A_T$ die Randpunkte $\bigcup_{z_2(s) \in \breve{\mathfrak{G}}} \{w(s)\}_\sigma$ unendlichfern. $r \circ A_T$ ist eine positiv definite Kählersche Metrik. Sind $\delta > 0$, $d > \frac{\varepsilon}{2}$ hinreichend klein gewählt, so liegt die Schar $F(t) = \{(w_1, w_2) \mid w_1 = \delta(t-1),\ w_2 = w + z_2^0,\ |w| \leq d\}$ für $0 \leq t \leq 1$ in $r \circ \breve{\mathfrak{T}}$ und genügt den übrigen Voraussetzungen des Satzes 12. Da ferner $F(1)$ mit dem Rande von $r \circ \mathfrak{T}$ den echten unendlichfernen Weg $\{(w_1, w_2) \mid w_1 = 0,\ w_2 = z_2(s),\ w_2 \in K^*\}$ gemeinsam hat, hat man zu der Aussage dieses Satzes einen Widerspruch. Damit ist Satz 15 für den Fall, daß D auf dem Rande $|z_1| = R_2$ liegt, bewiesen. Der Beweis für den Fall $D \subset \{u = R_1\}$ ergibt sich unmittelbar, wenn man auf $\mathfrak{H}^2$ die Transformation $z_1 \to \frac{1}{z_1}$, $z_2 \to z_2$ anwendet.

Wir wenden nun Satz 15 auf Hartogssche Körper mit vollständiger Kählerscher Metrik an.

Satz 16. *Es bezeichne $\mathfrak{G}$ ein Gebiet des C^{n-1} und R eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion in $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{H}^n : \{(z_1 \ldots z_n) \mid |z_1| < < R(z_2 \ldots z_n, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n),\ (z_2 \ldots z_n) \in \mathfrak{G}\}$ ein Hartogsscher Körper, in dem eine vollständige Kählersche Metrik A definiert ist, so ist $-\ln R$ überall in $\mathfrak{G}$ plurisubharmonisch.*

Beweis: Nach Satz 4 ist zu zeigen, daß die Form $\varphi = -\sum \frac{\partial^2 \ln R}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} dz_\nu d\bar{z}_\mu$ in jedem Punkt $z^0 = (z_2^0 \ldots z_n^0) \in \mathfrak{G}$ positiv semidefinit ist. Es sei $E : \{z_\nu = z_\nu^0 + a_\nu w,\ \nu = 2 \ldots n\}$ eine beliebige analytische Ebene durch z^0. Die Beschränkung von A auf den Hartogsschen Körper $\mathfrak{H}^2 : \{(z_1, w) \mid |z_1| < R(z_\nu^0 + a_\nu w, \bar{z}_\nu^0 + \bar{a}_\nu \bar{w}),\ (z_\nu^0 + a_\nu w) \in E \cap \mathfrak{G}\}$ ist dann eine vollständige Kählersche Metrik in $\mathfrak{H}^2$, unter der insbesondere alle Randpunkte $|z_1| = R$ von $\mathfrak{H}^2$ unendlichfern sind. Aus Satz 15 folgt deshalb unmittelbar, daß in z^0: $\frac{\partial^2 \ln R}{\partial w \partial \bar{w}} = \sum \frac{\partial \ln R}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} a_\nu \bar{a}_\mu \leq 0$ gilt. Das bedeutet aber, daß φ positiv semidefinit ist, q.e.d.

Für $n = 2$ ist $\mathfrak{H}^n$ genau dann ein Holomorphiegebiet, wenn $-\ln R$ in $\mathfrak{G}$ plurisubharmonisch ist[40]). Deshalb gilt unter gleichen Voraussetzungen wie in Satz 16:

[40]) Vgl. etwa H. Behnke und P. Thullen loc. cit.[1]), Satz 16 und p. 55.

Satz 17. *Ein Hartogsscher Körper* $\mathfrak{H}^2: \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < R(z_2, \bar{z}_2),\ z_2 \in \mathfrak{G}\}$ *mit vollständiger Kählerscher Metrik ist Holomorphiegebiet.*

§ 7. Vollständige Kählersche Metrik in Gebieten über dem C^n

Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, unverzweigtes Gebiet (= Mannigfaltigkeit) über dem komplexen Zahlenraum; es werde mit Φ die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf seine Grundpunkte bezeichnet. Unter einem Randpunkt r von $\mathfrak{G}$ (in Zeichen $r \in rd\,\mathfrak{G}$) verstehen wir ein Filter $\{M_i,\ i \in I\}$ (I eine Indexmenge) von offenen Teilmengen aus $\mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{M_i\}$ konvergiert gegen keinen Punkt aus $\mathfrak{G}$.
2. Das Filter $\{\Phi(M_i)\}$ konvergiert gegen einen Punkt $z \in C^n$.
3. $\{M_i\}$ enthält vom Φ-Urbild jeder Umgebung von z genau eine zusammenhängende Komponente und keine weiteren Mengen.

Man erhält eine Fortsetzung von Φ zu Φ^* in die Randpunkte r von $\mathfrak{G}$, wenn man $\Phi^*(r) = z$ setzt. Wir führen nun zu den so definierten Randpunkten einen Umgebungsbegriff ein. Eine Umgebung eines Randpunktes $r = \{M_i\}$ ist die Vereinigung einer Menge $M \in \{M_i\}$ und der Randpunkte $r_j = \{M_i^{(j)}\}$ von $\mathfrak{G}$, bei denen wenigstens ein $M_i^{(j)}$ in M enthalten ist. Offenbar wird durch diese Definition $\mathfrak{G} + rd\,\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}$ zu einem Hausdorffschen Raum gemacht. Φ^* bildet $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig in den C^n ab.

Wir sagen, $\mathfrak{G}$ besitzt einen k-mal stetig differenzierbaren (reell-analytischen) Rand, wenn es zu jedem $r \in rd\,\mathfrak{G}$ eine Umgebung $\mathfrak{B}$ gibt, die durch Φ^* umkehrbar eindeutig in eine Umgebung $\mathfrak{U}(\Phi(r)) \in C^n$ abgebildet wird, und ferner in $\mathfrak{U}$ eine k-mal stetig differenzierbare (reell-analytische), reellwertige Funktion φ, $d\varphi \neq 0$, so gegeben werden kann, daß $\Phi(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}) = \{z \in \mathfrak{U} \mid \varphi(z) < 0\}$ ist.

Im folgenden wird zur Charakterisierung der Pseudokonvexität die Bedingung von Levi-Krzoska verwendet. Eine 2mal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion φ, $d\varphi \neq 0$, in einem Gebiet $\mathfrak{U} \subset C^n$ heißt eine *LK*-Funktion (im strengen Sinne), wenn für alle $z \in \mathfrak{U}$ und a_ν mit $\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} a_\nu = 0$, $(a_1 \ldots a_n) \neq (0 \ldots 0)$, die Form $L(\varphi) = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} a_\nu \bar{a}_\mu \geqq 0$ (bzw. > 0) ist. Wir nennen nun $\mathfrak{G}$ pseudokonvex, wenn der Rand von $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbar ist und zu jedem $r \in rd\,\mathfrak{G}$ bei geeigneter Vorgabe der Umgebungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}$ die Funktion φ als *LK*-Funktion gewählt werden kann. Bezeichnet $d_{\mathfrak{G}}(x)$ den euklidischen Abstand eines Punktes $x \in \mathfrak{G}$ von $rd\,\mathfrak{G}$, so gilt folgender Satz:

Satz 18. *Ist* $\mathfrak{G}$ *pseudokonvex, so ist* $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ *eine in* $\mathfrak{G}$ *plurisubharmonische Funktion.*

Aus Darstellungsgründen ist es zweckmäßig, dem Beweise von Satz 18 drei Hilfssätze vorauszuschicken:

Hilfssatz 8. *Es sei* $\mathfrak{G}$ *ein beliebiges Gebiet über dem* C^n. *Gibt es dann zu jedem Randpunkt* r *von* $\mathfrak{G}$ *eine Umgebung* $\mathfrak{B}$ *derart, daß* $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ *in* $\mathfrak{B} - rd\,\mathfrak{G}$ *plurisubharmonisch ist, so ist* $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ *in ganz* $\mathfrak{G}$ *plurisubharmonisch.*

Beweis. Angenommen, $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ wäre in $\mathfrak{G}$ nicht überall plurisubharmonisch. Es gibt dann ein 1-dimensionales analytisches Flächenstück $F_0: \{g(t) \in \mathfrak{G} \mid$

$t \in \tilde{\mathfrak{G}} \subset C^1$, $\Phi\, g(t) = ((f_\nu(t)))\}$ in $\mathfrak{G}$, so daß die Beschränkung von $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ auf F_0 nicht subharmonisch ist. Man kann daher in einer Umgebung eines Kreises $K: \{z \mid |z - z_0| \leq d\} \subset \tilde{\mathfrak{G}}$ eine harmonische Funktion $h_1(z, \bar z)$ so bestimmen, daß folgendes gilt:

1. $h_1(z, \bar z) \geq q(t, \bar t) =_{Def.} (-\ln d_{\mathfrak{G}}) \circ g(t)$ in K.
2. $h_1(z, \bar z) > q(t, \bar t)$ auf $rd\,K$.
3. $h_1(z, \bar z) = q(t, \bar t)$ in einer gewissen Punktmenge P von K.

Ferner gibt es eine in K harmonische Funktion $h_2(z, \bar z)$, derart, daß $f^* = h_1 + i h_2$ dort holomorph ist. Setzen wir $f = e^{-f^*}$, so wird $|f| \leq d_{\mathfrak{G}} \circ g(t)$ in K, $|f| < d_{\mathfrak{G}} \circ g(t)$ auf $rd\,K$ und $|f| = d_{\mathfrak{G}} \circ g(t)$ in P. Es sei $p_0 \in P$. Der Punkt $g_0 = g(p_0)$ hat von $rd\,\mathfrak{G}$ einen endlichen Abstand d_0 (falls wir den trivialen Fall $\mathfrak{G} = C^n$ von unserer Betrachtung ausschließen). Der Rand der Hyperkugel H mit dem Radius d_0 um g_0 liegt deshalb nicht mehr ganz in $\mathfrak{G}$, wohl aber noch das Innere von H. Man kann daraus leicht zeigen, daß $H + rd\,H$ kompakt in $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten ist. $B = rd\,H \cap rd\,\mathfrak{G}$ ist also nicht leer. Es sei nun ein Punkt $r_0 \in B$ gewählt; ferner n-tupel a_ν, b_ν, $\nu = 1 \ldots n$, so daß für die Ebene $E(t) = \{(z_1 \ldots z_n) \mid z_\nu = a_\nu + b_\nu t,\ \nu = 1 \ldots n\}$ $E(0) = \Phi(g_0)$ und $\Phi(r_0) = E(1)$ ist. In $\mathfrak{G}$ gibt es genau eine Schar analytischer Flächen $F(t;\tau)$: $\left\{g \in \mathfrak{G} \mid g = g(t,\tau),\ \Phi \circ g(t,\tau) = \left(\left(f_\nu(t) + b_\nu \tau \frac{f(t)}{f(p_0)}\right)\right),\ t \in K,\ 0 \leq \tau < 1\right\}$, bei der $F(t;0)$ in F_0 enthalten ist. Offenbar wird $d_{\mathfrak{G}}$ in den Punkten $F(p_0, \tau)$ für $\tau \to 1$ beliebig klein. Die Menge $\{g \mid g = g(t,\tau),\ |t| = d,\ 0 \leq \tau < 1\}$ liegt relativ kompakt in $\mathfrak{G}$. Es gibt daher ein $0 \leq \tau_0 < 1$, so daß für $\tau_0 \leq \tau < 1$ die Beschränkung $q_\tau(t)$ von $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ auf $F(t;\tau)$ ihr Maximum im Innern von $F(t;\tau)$ in einem Punkt $g(\tau)$ annimmt. Wir können ferner $g(\tau)$ so wählen, daß $q_\tau(t)$ in der Nähe von $g(\tau)$ nicht konstant ist. $q_\tau(t)$ kann dann in keiner Umgebung von $g(\tau)$ subharmonisch sein. Es folgt nun, daß $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ in $g(\tau)$ sicher nicht plurisubharmonisch ist. Andererseits kann man leicht zeigen, daß sich die Punkte $g(\tau)$ gegen einen Randpunkt $r \in rd\,\mathfrak{G}$ häufen. Dieser besitzt also keine Umgebung $\mathfrak{B}$, derart, daß in $\mathfrak{B} - rd\,\mathfrak{G}$ unsere Funktion $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ plurisubharmonisch ist. Das widerspricht den Voraussetzungen des Hilfssatzes.

Hilfssatz 9. *Es gibt zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}(r)$, $r \in rd\,\mathfrak{G}$, eine kleinere Umgebung $\mathfrak{B}(r) \subset \mathfrak{U}(r)$, so daß in $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}$ $-\ln d_{\mathfrak{G}} = -\ln d_{\mathfrak{U}}$ ist.*

Beweis. Es bezeichne *$dist\,(A, B)$ die (euklidische) Entfernung zweier Mengen A und B.* Wählen wir dann $\mathfrak{B}(r)$ so, daß für die Punkte $g \in \mathfrak{B}$ gilt: $\mathrm{dist}\,(g, \mathfrak{B} \cap rd\,\mathfrak{G}) < \mathrm{dist}\,(g, \tilde{\mathfrak{G}} - \mathfrak{U})$, so hat $\mathfrak{B}$ die verlangte Eigenschaft.

Hilfssatz 10. *Ist φ eine LK-Funktion in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes $z^{(0)} \in C^n$, so gibt es einen Polyzylinder $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{U}$ um $z^{(0)}$, so daß für $0 < t \leq 1$ die Funktion $\Psi = \varphi + t\, \Sigma\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}|^2$ in $\mathfrak{Z}$ eine LK-Funktion im strengen Sinne ist.*

Beweis. Es ist $\Psi_{i,\bar k} = \varphi_{i,\bar k} + t\,\delta_i^k$ und $\Psi_i = \varphi_i + t(\bar z_i - \bar z_i^{(0)})$ $\Big($mit $\varphi_{i,\bar k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i\, \partial \bar z_k}$, $\Psi_{i,\bar k} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i\, \partial \bar z_k}$, $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}$, $\Psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial z_i}\Big)$. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varphi_1 \neq 0$ gilt. Es sei $\Sigma\, \Psi_i a_i = 0$. Setzen wir $b_1 = a_1 + ct$; $b_\nu = a_\nu$, $\nu = 2 \ldots n$, und $c = \frac{\Sigma\, a_\nu (\bar z_\nu - \bar z_\nu^{(0)})}{\varphi_1}$, so ist $\Sigma\, \varphi_\nu b_\nu = 0$. Es gilt

$\Sigma \varphi_{\nu,\bar{\mu}} b_\nu \bar{b}_\mu \geqq 0$, also $\Sigma\, \varphi_{\nu,\bar{\mu}} a_\nu \bar{a}_\mu + tc\gamma + t\bar{c}\,\bar{\gamma} + \bar{c}ctt\; \varphi_{1,\bar{1}} \geqq 0$, wenn $\gamma = \varphi_{1,\bar{\mu}} \bar{a}_\mu$ gesetzt wird. Daher ist: $\Sigma\, \Psi_{\nu,\bar{\mu}} a_\nu \bar{a}_\mu \geqq t \left[\Sigma\, a_\nu \bar{a}_\nu - c\,\gamma - \bar{c}\,\bar{\gamma} - c\bar{c}t\; \varphi_{1,\bar{1}} \right]$. Offenbar brauchen wir den Hilfssatz nur für Einheitsvektoren a_ν zu beweisen. Für solche gilt: $\Sigma\, \Psi_{\nu,\bar{\mu}}\, a_\nu \bar{a}_\mu \geqq t\, [1 - 2 \max\limits_{a_\nu, \mathfrak{z}} |c| \cdot |\gamma| - \max\limits_{a_\nu, \mathfrak{z}} c\bar{c}\, |\varphi_{1,\bar{1}}|]$. Da $\max |c|$ mit $\mathfrak{Z}$ beliebig klein wird, kann man $\mathfrak{Z}$ so bestimmen, daß der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer immer größer als $\frac{1}{2}$ ist. Ψ ist dann für jedes $0 < t \leqq 1$ eine LK-Funktion im strengen Sinne.

Nun zum eigentlichen Beweis von Satz 18! Angenommen, $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ ist in $\mathfrak{G}$ nicht überall plurisubharmonisch. Es sei r ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ im Sinne von Hilfssatz 8. Da $rd\,\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbar ist, gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(r)$, die durch Φ eineindeutig in eine Umgebung $\mathfrak{U}(z^{(0)})$, $z^{(0)} = \Phi(r)$, abgebildet wird. Es sei $\mathfrak{B}$ der Bereich der Punkte $\{z \mid z \in \mathfrak{U},\ \varphi(z) < 0\}$. Nach Hilfssatz 9 stimmt $-\ln d_{\mathfrak{V}}$ in hinreichender Nähe von r mit $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ überein und ist deshalb in keiner Umgebung von r plurisubharmonisch. Da $d_{\mathfrak{V}} \circ \Phi^{-1} \equiv d_{\mathfrak{B}}$ ist, gilt das Gleiche für $-\ln d_{\mathfrak{B}}$ in bezug auf alle Umgebungen von $z^{(0)}$. Sei nun $\mathfrak{Z}$ ein Polyzylinder um $z^{(0)}$ im Sinne von Hilfssatz 10. Aus Hilfssatz 9 folgt wieder, daß $-\ln d_{\mathfrak{B}_0}$ in $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z} = \{z \mid z \in \mathfrak{Z},\ \varphi(z) < 0\}$ nicht plurisubharmonisch sein kann. Andererseits sind nach einem bekannten Satz[41]) alle Funktionen $-\ln d_{\mathfrak{B}_t}$ in $\mathfrak{B}_t = \{z \mid z \in \mathfrak{Z},\ \varphi(z) + t \sum\limits_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_\nu^{(0)}|^2 < 0\}$, $0 < t \leqq 1$, plurisubharmonisch. Es gilt $\lim\limits_{t \to 0} \mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}_0$, $-\ln d_{\mathfrak{B}_t} \leqq -\ln d_{\mathfrak{B}_{t'}}$, für $t \leqq t'$ und $\lim\limits_{t \to 0} -\ln d_{\mathfrak{B}_t} = -\ln d_{\mathfrak{B}_0}$. $-\ln d_{\mathfrak{B}_0}$ ist also Grenzwert einer absteigenden Folge plurisubharmonischer Funktionen und deshalb wieder plurisubharmonisch[42]). Widerspruch! Damit ist Satz 18 bewiesen.

Wir untersuchen nun Gebiete mit vollständiger Kählerscher Metrik. Es gilt folgender Satz:

Satz 19. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein (unverzweigtes) Gebiet über dem C^n; der Rand von $\mathfrak{G}$ sei reell-analytisch. Ist dann ferner in $\mathfrak{G}$ eine vollständige Kählersche Metrik A definiert, so ist $\mathfrak{G}$ pseudokonvex.*

Aus Satz 18 ergibt sich, daß unter den Voraussetzungen von Satz 19 $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{G}$ plurisubharmonisch ist. Wir ziehen jetzt einen grundlegenden Satz von K. OKA heran:

Satz. *Ein verzweigtes Gebiet $\mathfrak{G}$ über dem C^n, in dem $-\ln d_{\mathfrak{G}}$ eine plurisubharmonische Funktion ist, ist ein holomorphkonvexes Holomorphiegebiet*[43]).

Es folgt nun unmittelbar:

Satz C. *Jedes (unverzweigte) Gebiet über dem $\mathfrak{C}^n$ mit reell-analytischem Rand und vollständiger Kählerscher Metrik ist ein holomorphkonvexes Holomorphiegebiet.*

---

[41]) Vgl. S. HITOTUMATU: On some conjectures concerning pseudoconvex domaines. J. Math. Soc. Japan **6**, 177—195 (1954); hier besonders p. 187.

[42]) Vgl. S. HITOMATU, loc. cit.[41]), p. 179, Propos. 2.

[43]) Vgl. K. OKA, loc. cit.[12]).

Die folgenden Seiten werden nur noch verwendet, um Satz 19 zu beweisen. Es sei r ein beliebiger Randpunkt von $\mathfrak{G}$. Da $rd\,\mathfrak{G}$ als reell-analytisch vorausgesetzt ist, gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V}(r)$, die durch Φ eineindeutig in eine Umgebung $\mathfrak{U}(z^{(0)})$, $z^{(0)} = \Phi(r)$, abgebildet wird. In $\mathfrak{U}$ gilt $d\,\varphi \neq 0$, wenn φ wie auf p. 68 gewählt ist. Durch eine geeignete affin-lineare Koordinatentransformation kann man erreichen, daß $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \neq 0$, $\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} = 0$, $\nu = 2 \ldots n$, in $z^{(0)}$ gilt. Da ferner die Klasse der LK-Funktionen gegenüber holomorphen Transformationen invariant ist, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in $z^{(0)}$ dieser Fall vorliegt und sogar, daß dort $\frac{\partial\, {}^*\varphi}{\partial u} > 0$ ist, wenn wir ${}^*\varphi(u, v; z_2, \bar z_2; \ldots; z_n \bar z_n) \equiv \varphi(u + iv, u - iv; z_2, \bar z_2; \ldots; z_n, \bar z_n)$ setzen. Wir können ebenso $z^{(0)} = (0, \ldots, 0) = 0$ voraussetzen. Durch eine quadratische Transformation $z_\nu \to z_\nu + \Sigma a_{\nu,\varkappa\mu} z_\varkappa z_\mu$ in einer Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}}(0) \subset \mathfrak{U}$ kann man weiter erreichen[44]), daß in 0 auch noch $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial z_\mu} = 0$, $\nu, \mu = 1 \ldots n$, gilt. Es gibt nun ein Gebiet $\mathfrak{D} : \{(z_1 \ldots z_n) \mid |u| < d, |v| < d, |z_\nu| < d_\nu, \nu = 2 \ldots n\} \subset \tilde{\mathfrak{U}}$ um $z^{(0)} = 0$, in dem die Gleichung ${}^*\varphi = 0$ nach u auflösbar ist: Man kann in $\mathfrak{D}' : \{(v, z_2 \ldots z_n) \mid |v| < d, |z_\nu| < d_\nu\}$ eine reell-analytische Funktion $h(v; z_2, \bar z_2, \ldots z_n, \bar z_n)$, $|h| < d$, finden, derart, daß $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{B} = \{(z_1 \ldots z_n) \in \mathfrak{D} \mid u < h(v; z_2, \bar z_2 \ldots z_n, \bar z_n)\}$ ist ($\mathfrak{B} = \{(z_1 \ldots z_n) \in \mathfrak{U}) \mid \varphi(z_1 \ldots z_n) < 0\}$). Es gilt $h(0; 0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial z_\nu} = 0$, $\frac{\partial^2 h}{\partial z_\nu \partial z_\mu} = 0$, $\nu, \mu = 2 \ldots n$, in 0. In $\mathfrak{B}^*$ ist $\Lambda^* = \Lambda \circ \Phi^{-1}$ eine Kählersche Metrik, unter der die Randpunkte $u = h$ von $\mathfrak{B}^*$ unendlichfern sind. Es ist $\mathfrak{V}^* = \Phi^{-1}(\mathfrak{D})$ eine Umgebung von r. $\mathfrak{V}^* - rd\,\mathfrak{G}$ wird durch Φ eineindeutig in $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{B}^*$ abgebildet. Wir nennen nun eine *reellwertige Funktion* Ψ, $\Psi(0) = 0$, *eine LK-Funktion in* 0, *wenn* Ψ *in einer Umgebung* $W(0)$ *zweimal stetig differenzierbar ist, dort* $d\,\Psi \neq 0$ *gilt und in* 0 *die Ungleichung* $\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial \bar z_\mu} a_\nu \bar a_\mu \geq 0$ *für alle* a_ν, $\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} a_\nu = 0$ *erfüllt ist.* Ist Ψ_1 eine weitere zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion mit $d\,\Psi_1 \neq 0$ in W und stimmen dort die Mengen $\Psi = 0$ und $\Psi_1 = 0$ und die Seiten $\Psi < 0$, $\Psi_1 < 0$ überein, so ist auch Ψ_1 eine LK-Funktion in 0, wie man leicht durch Rechnung zeigen kann[44]). *Ob* Ψ *in* 0 *LK-Funktion ist oder nicht, hängt also nur von der Fläche* $\Psi = 0$ *ab.* Können wir zeigen, daß $u - h$ eine LK-Funktion in 0 ist, so ist deshalb $u - h$ auch sicher eine LK-Funktion in jedem Punkte $u = h$ aus $\mathfrak{D}$; denn da $r \in rd\,\mathfrak{G}$ beliebig gewählt ist, ist kein Punkt von $u = h$ ausgezeichnet. $u - h$ ist auch eine LK-Funktion in ganz $\mathfrak{D}$, was man gleich einsieht, wenn man beachtet, daß h nicht von u abhängt. Satz 19 folgt also unmittelbar aus folgendem:

Hilfssatz 11. *Es sei* $u = h(v; z_2, \bar z_2 \ldots z_n, \bar z_n)$ *eine in* $\mathfrak{D}'$ *reell-analytische, reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften*:

1. $|h| < d$ *in* $\mathfrak{D}'$.

2. $h = 0$, $\frac{\partial h}{\partial z_\nu} = 0$, $\frac{\partial^2 h}{\partial z_\nu \partial z_\mu} = 0$, $\nu, \mu = 2 \ldots n$, *in* 0.

---

[44]) Vgl. H. Behnke und P. Thullen, loc. cit.[1]), p. 54.

Ist dann in $\mathfrak{B}^* = \{(z_1 \ldots z_n) \in \mathfrak{D} \mid u < h\}$ *eine Kählersche Metrik* Λ^* *definiert, unter der die Randpunkte* $u = h$ *von* $\mathfrak{B}^*$ *unendlich fern sind, so ist* $u - h$ *eine LK-Funktion in* 0.

$u - h$ werde als Funktion von $z_1 \ldots z_n$ betrachtet. Gilt in 0: $\Sigma \frac{\partial(u-h)}{\partial z_\nu} a_\nu = 0$, $(a_1 \ldots a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so sind die Vektoren $\mathfrak{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathfrak{e}_2 = (0, a_2, \ldots, a_n)$ sicher linear unabhängig. E sei die durch $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ in 0 aufgespannte zweidimensionale komplexe Ebene. Jeder Punkt von E ist eine Linearkombination $\hat{z}_1 \mathfrak{e}_1 + \hat{z}_2 \mathfrak{e}_2$ von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$. $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ können als komplexe Koordinaten auf E aufgefaßt werden. Offenbar ist $\hat{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cap E$ ein Gebiet, das durch eine Formel $\{(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \mid |\hat{u}| < d, |\hat{v}| < d, |\hat{z}_2| < \hat{d}\}$, $\hat{z}_1 = \hat{u} + i\hat{v}$ gegeben werden kann. Bezeichnet $\hat{h}$ die Beschränkung von h auf E und $\hat{\mathfrak{B}}$ das Gebiet $\{(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in E \mid \hat{u} < \hat{h}\} = \mathfrak{B}^* \cap E$, so ist die Beschränkung $\hat{\Lambda}$ von Λ^* auf $\hat{\mathfrak{B}}$ eine Kählersche Metrik in $\hat{\mathfrak{B}}$, unter der die Randpunkte $\hat{u} = \hat{h}$ unendlich fern sind. Gilt nun Hilfssatz 11 für $n = 2$, so ist in $(0, 0) \in E$: $\gamma = \Sigma \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{h})}{\partial \hat{z}_\nu \partial \bar{\hat{z}}_\mu} b_\nu \bar{b}_\mu \geqq 0$, für $(b_1, b_2) = (a_1, 1)$, da $\Sigma \frac{\partial(\hat{u} - \hat{h})}{\partial \hat{z}_\nu} b_\nu = \Sigma \frac{\partial(u-h)}{\partial z_\nu} a_\nu = 0$ gilt. γ ist aber gleich $\Sigma \frac{\partial^2(u-h)}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} a_\nu \bar{a}_\mu$. Hilfssatz 11 gilt also sicher, wenn er für $n = 2$ richtig ist.

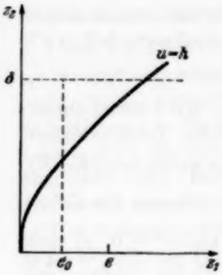

Fig. 3

Beweis des Hilfssatzes für $n = 2$. Da nach Voraussetzung $\frac{\partial(u-h)}{\partial z_2} = 0$ in 0 gilt, genügt ein Vektor (a_1, a_2) genau dann dort der Gleichung $\Sigma \frac{\partial(u-h)}{\partial z_\nu} a_\nu = 0$, wenn $a_1 = 0$ ist. Nehmen wir nun an, $u - h$ wäre keine *LK*-Funktion in 0, so ist deshalb $\frac{\partial^2 h}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} > 0$ für $v = 0, z_2 = 0$. Daraus folgt, wenn man beachtet, daß $\frac{\partial^2 h}{\partial z_2 \partial z_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}_2 \partial \bar{z}_2} = 0$ vorausgesetzt wurde, daß in 0: $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \varrho^2}\right)_\vartheta =_{Df.} \frac{\partial^2 h(0, \varrho e^{i\vartheta}, \varrho e^{-i\vartheta})}{\partial \varrho^2} > 0$ gilt. ($\varrho = |z_2|$, $\vartheta = \operatorname{arc} z_2$). Es gibt darum einen punktierten Kreis $K = \{z_2 \mid 0 < |z_2| < \delta\} \Subset \mathfrak{D}'$ der z_2-Ebene, in dem $\left(\frac{\partial h}{\partial \varrho}\right)_\vartheta =_{Df.} \frac{\partial h(0, \varrho e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta})}{\partial \varrho} > 0$ ist. In K gilt $h > 0$, auf $|z_2| = \delta$ sogar: $0 < e < h$. Insbesondere ist in den Punkten $\{(z_1, z_2) \mid z_1 = e_0 = \frac{e}{2}, |z_2| < \delta, u = h\}$ auf der Ebene $z_1 = e_0$ die Ableitung $\left(\frac{\partial(u-h)}{\partial \varrho}\right)_\vartheta \neq 0$. Das Gleiche gilt auch noch in einer vollen (komplex) zweidimensionalen Umgebung dieser Punkte. $u - h = 0$ ist dort nach ϱ auflösbar: In einem Gebiet $\mathfrak{D}_0$: $\{(z_1, z_2) \mid |u - e_0| < \varepsilon, |v| < \varepsilon, |z_2| < \delta\}$, $0 < \varepsilon < e_0$, wird die Fläche $u = h$ durch eine reell-analytische Gleichung $\varrho = \eta(\vartheta; u, v)$ gegeben. $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{D}_0$ ist gleich $\{(z_1, z_2) \in \mathfrak{D}_0 \mid \varrho > \eta\}$. Wurde e_0 hinreichend klein gewählt, so ist $(u - h)$ wie auch $(\eta - \varrho)$ in keinem Punkt von $F: \{(z_1, z_2) \in \mathfrak{D}_0 \mid \varrho = \eta\}$ eine LK-Funktion. Es bezeichne nun E die Fläche $\{(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \mid u_1 = e_0, |v_1| < \varepsilon, |z_2^{(1)}| = 1\}$ und E_1 die Fläche $\{(z_1^{(1)},$

$z_2^{(1)}) \mid u_1 = e_0, |v_1| < \varepsilon_1, |z_2^{(1)}| = 1\}$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon$ im Raume der Veränderlichen $z_1^{(1)} = u_1 + i v_1$, $z_2^{(1)} = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}$. Für E gilt folgender, am Schluß der Arbeit bewiesene

Hilfssatz 12. *Ist* $\hat{\tau}_1: z_\nu = \hat{f}_\nu(\vartheta_1, v_1)$, $\nu = 1, 2$, *eine reell-analytische, eineindeutige Abbildung von* E *auf* $\hat{\tau}_1(E)$ *und ist ferner überall auf* E *die Determinante* $\frac{\partial(\hat{f}_1, \hat{f}_2)}{\partial(\vartheta_1, v_1)} \neq 0$, *so ist* $\hat{\tau}_1$ *eindeutig zu einer umkehrbar eindeutigen, holomorphen Abbildung* $\tau_1: z_\nu = f_\nu(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$ *einer vollen Umgebung* $\mathfrak{D}_1: \{(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \mid |u_1 - e_0| < \varepsilon_1, |v_1| < \varepsilon_1, 1 - \delta_1 < |z_2| < 1 + \delta_1\}$ *von* E_1 *auf eine Umgebung von* $\hat{\tau}(E_1)$ *fortsetzbar. In* $\mathfrak{D}_1$ *gilt*: $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})} \neq 0$.

Wir setzen auf E die Funktion $\hat{f}_1(\vartheta_1, v_1) \equiv i v_1$, $\hat{f}_2(\vartheta_1, v_1) \equiv \eta(\vartheta_1; e_0, v_1)\, e^{i\vartheta_1}$. Die Fortsetzung τ_1 ist dann von der Form: $z_1 = f_1 \equiv z_1^{(1)}$; $z_2 = f_2(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$. $\mathfrak{D}_1$ sei so klein, daß $\mathfrak{D}_0$ die Menge $\tau_1(\mathfrak{D}_1)$ enthält. Bezeichnet ϱ_1 den $|z_2^{(1)}|$, so gilt für $u_1 = e_0$, $v_1 = 0$, $\varrho_1 = 1$, ϑ_1 reell: $\left(\frac{\partial(\eta - \varrho) \circ \tau_1}{\partial \varrho_1}\right)_{\vartheta_1} \neq 0$, wie man leicht errechnet. Das Gleiche gilt auch noch in einer ganzen Umgebung dieser Punkte. Hat man ε_1 hinreichend klein gewählt, so kann man darum die Fläche $F_1: (\varrho - \eta) \circ \tau_1 = 0$ in $\mathfrak{D}_1$ durch eine reell-analytische Gleichung $\varrho_1 = \eta_1(\vartheta_1, u_1, v_1)$ geben. Es ist: $\eta_1(\vartheta_1; e_0, v_1) \equiv 1$ und natürlich $\eta_1(\vartheta_1 + 2n\pi, u_1, v_1) = \eta_1(\vartheta_1, u_1, v_1)$. τ_1 bildet F_1 in F ab und den Bereich $\mathfrak{B}_1: \{(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \in \mathfrak{D}_1 \mid \varrho_1 > \eta_1\}$ in $\mathfrak{B}$. $\eta_1 - \varrho_1$ ist wie $(\eta - \varrho) \circ \tau_1$ keine LK-Funktion auf F_1.

Wir konstruieren nun eine umkehrbar eindeutige holomorphe Abbildung τ_2 eines Teilgebietes $\mathfrak{D}_1^* \subset \mathfrak{D}_1$, das aus Punkten $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$ mit $|u_1 - e_0| < \varepsilon_2$, $|v_1| < \varepsilon_2$ besteht, auf ein Gebiet $\mathfrak{D}_2: \{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \mid |u_2 - e_0| < \varepsilon_2, |v_2| < \varepsilon_2, 1 - \delta_2 < |z_2^{(2)}| < 1 + \delta_2\}$, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $0 < \delta_2 < \delta_1$. τ_2 habe folgende Eigenschaften:

1. τ_2 kann durch Gleichungen $z_1^{(2)} = z_1^{(1)}$; $z_2^{(2)} = \frac{z_2^{(1)}}{g(u_1, v_1; \varrho_1, \vartheta_1)}$ gegeben werden.

2. Es gilt in $\mathfrak{D}_1^*$:

a) $g(u_1, v_1, \varrho_1, \vartheta_1 + 2n\pi) = g(u_1, v_1, \varrho_1, \vartheta_1)$,

b) $|g(e_0, v_1, 1, \vartheta_1)| \equiv 1$,

c) $\frac{\partial |g(e_0, v_1, 1, \vartheta_1)|}{\partial u_1} + k(v_1, \vartheta_1) \frac{\partial |g(e_0, v_1, 1, \vartheta_1)|}{\partial \varrho_1} \equiv k(v_1, \vartheta_1)$,

d) $\arc g(e_0, 0, 1, \vartheta_1) \equiv 0$.

Dabei ist $k(v_1, \vartheta_1) = \frac{\partial \eta_1(\vartheta_1; e_0, v_1)}{\partial u_1}$ gesetzt. c) braucht nur auf $E_1 \cap \mathfrak{D}_1^*$ zu gelten. Da dort $\varrho = 1$, $|g| = 1$ gilt, ist c) offenbar erfüllt, wenn $g = e^q$ ist und q den Gleichungen c'): $\frac{\partial\, Re\, q(e_0, v_1, 1, \vartheta_1)}{\partial u_1} + k(v_1, \vartheta_1) \frac{\partial\, Re\, q(e_0, v_1, 1, \vartheta_1)}{\partial \ln \varrho_1} = k(v_1, \vartheta_1)$ und $Re\, q(e_0, v_1, 1, \vartheta_1) = 0$ genügt. q muß dabei holomorph in den Variablen $z_1^{(1)} = u_1 + i v_1$, $w = \ln \varrho_1 + i\vartheta_1$ sein. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergeben, daß c') mit c'') $\frac{\partial p(v_1, \vartheta_1)}{\partial v_1} + k(v_1, \vartheta_1) \frac{\partial p(v_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} = k(v_1, \vartheta_1)$ äquivalent ist $(p(v_1, \vartheta_1) = Im\, q(e_0, v_1, 1, \vartheta_1))$. c'') stellt eine lineare partielle Differentialgleichung dar, die sich mit der Nebenbedingung d): $p(0, \vartheta_1) = \arc g(e_0, 0, 1, \vartheta_1) \equiv 0$ in $\{(v_1, \vartheta_1) \mid |v_1| < \varepsilon_1, \vartheta_1 \text{ reell}\}$ eindeutig lösen läßt. Die Lösung ist wie $k(v_1, \vartheta_1)$ periodisch in ϑ_1: $p(v_1, \vartheta_1) = p(v_1, \vartheta_1 + 2n\pi)$. Setzen

wir noch $Re\ q(e_0, v_1, 1, \vartheta_1) = 0$ und $g(e_0, v_1, 1, \vartheta_1) = e^q$, so erhalten wir eine eindeutige, reell-analytische Funktion g auf E_1. Die Abbildung $\hat{\tau}_2: z_1^{(2)} = z_1^{(1)}$, $z_2^{(2)} = \frac{z_2^{(1)}}{g}$ ist eine reell-analytische Abbildung von E_1 in den C^2. Ist $\tilde{\varepsilon}_2$ hinreichend klein gewählt, so gilt auf $E_1^* = \{(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \in E_1 \mid |v_1| < \tilde{\varepsilon}_2\}: \frac{\partial \operatorname{arc} z_2^{(2)}}{\partial \vartheta_1} = \frac{\partial(\vartheta_1 - \operatorname{arc} g)}{\partial \vartheta_1} = 1 - \frac{\partial p(v_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} \neq 0$, da $\frac{\partial p(0, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} \equiv 0$ ist. $\operatorname{arc} z_2^{(2)}$ ist dann in ϑ_1 monoton; $z_2^{(2)} = \frac{z_2^{(1)}}{g}$ für jedes feste v_1, $|v_1| < \tilde{\varepsilon}_2$, eine eineindeutige Abbildung des Einheitskreisrandes in der z_2-Ebene auf sich und daher $\hat{\tau}_2$ eine eineindeutige Abbildung von E_1^* auf sich. Ferner ist: $\left|\frac{\partial(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})}{\partial(v_1, \vartheta_1)}\right| \geqq 1 - \left|\frac{\partial p(v_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\right| \neq 0$ bei hinreichend kleinem $\tilde{\varepsilon}_2$ auf E_1^*. Nach Hilfssatz 12 können wir $\hat{\tau}_2$ zu einer eineindeutigen Abbildung τ_2 einer Umgebung von E_2^*: $\{(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \in E_1\, |v_1| < \varepsilon_2\}$ fortsetzen. Sind $\mathfrak{D}_1^*$ und $\varepsilon_2 < \tilde{\varepsilon}_2 < \varepsilon_1$ geeignet gewählt, so ist τ_2 sogar eine solche Abbildung von $\mathfrak{D}_1^*$ auf ein Gebiet $\mathfrak{D}_2$: $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \mid |u_2 - e_0| < \varepsilon_2,\ |v_2| < \varepsilon_2,\ 1 - \delta_2 < |z_2^{(2)}| < 1 + \delta_2\}$. τ_2 hat die verlangten Eigenschaften.

Es sei E_2 die Fläche $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \mid u_2 = e_0,\ |v_2| < \varepsilon_2,\ |z_2^{(2)}| = 1\} \subset \mathfrak{D}_2$. τ_2^{-1} bildet E_2 eineindeutig in E_1 ab. Da $g(e_0, 0, 1, \vartheta_1) \equiv 1$ ist, gilt für die Fortsetzung auch $g(e_0, 0, \varrho_1, \vartheta_1) \equiv 1$. In allen Punkten $z_1^{(2)} = e_0$, $z_2^{(2)} = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}$ ist daher $\frac{\partial([\varrho_1 - \eta_1] \circ \tau_2^{-1})}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial(\varrho_1 - \eta_1)}{\partial \varrho_1} = 1$. Werden ε_2, δ_2 hinreichend klein gewählt, so ist diese Ableitung noch in $\mathfrak{D}_2$ von Null verschieden: In einem geeigneten D_2 kann also die Fläche $(\eta_1 - \varrho_1) \circ \tau^{-1} = 0$ in der Form $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \in \mathfrak{D}_2 \mid \eta_2 = \varrho_2\}$ gegeben werden. Man errechnet leicht unter Verwendung der Eigenschaften a, b, c, d von g, daß für $\eta_2(\vartheta_2; u_2, v_2)$ folgendes gilt:

1. $\eta_2(\vartheta_2 + 2n\pi; u_2, v_2) \equiv \eta_2(\vartheta_2, u_2, v_2)$,
2. $\eta_2(\vartheta_2; e_0, v_2) \equiv 1$,
3. $\frac{\partial \eta_2(\vartheta_2; e_0, v_2)}{\partial u_2} \equiv 0$.

Ferner ist $\eta_2 - \varrho_2$ wie $(\eta_1 - \varrho_1) \circ \tau_2^{-1}$ *LK*-Funktion in keinem Punkt von $\eta_2 - \varrho_2 = 0$. Das Gebiet $\mathfrak{B}_2$: $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \in \mathfrak{D}_2 \mid \varrho_2 > \eta_2\}$ wird durch τ_2^{-1} eineindeutig holomorph in $\mathfrak{B}_1$ abgebildet.

Aus 2. und 3. folgt, daß $\frac{\partial(\eta_2 - \varrho_2)}{\partial z_1^{(2)}} = 0$ gilt auf E_2. Da ferner $\eta_2 - \varrho_2$ dort keine LK-Funktion ist, muß $\gamma = \frac{\partial^2 \eta_2(\vartheta_2, e_0, v_2)}{\partial z_1^{(2)} \partial \bar{z}_1^{(2)}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \eta_2(\vartheta_2, e_0, v_2)}{\partial u_2^2} < 0$ sein. Ist $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, so gilt für $|v_2| < \varepsilon_3$, $-\infty < \vartheta_2 < +\infty$, sogar $\gamma(\vartheta_1, v_2) < r < 0$. Wurde ε_3 hinreichend klein gewählt, so ist daher $R_1(u_2, v_2) =_{Df.} 1 + r(u_2 - e_0)^2 \geqq \eta_2$ für $|u_2 - e_0| < \varepsilon_3$, $|v_2| < \varepsilon_3$, $-\infty < \vartheta_2 < +\infty$, und es gilt für diesen Argumentbereich $0 < R_1 < 1 + \delta_2$. Der Rand des Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}^2$: $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \mid |u_2 - e_0| < \varepsilon_3,\ |v_2| < \varepsilon_3,\ R_1 < |z_2^{(2)}| < R_2 = 1 + \delta_2\}$ hat mit F_2: $\{\varrho_2 = \eta_2\}$ das (reell) zweidimensionale Flächenstück E_3: $\{(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \mid z_1^{(2)} = e_0 + iv_2,\ |z_2^{(2)}| = R_1(e_0, v_2) = 1,\ -\varepsilon_3 < v_2 < \varepsilon_3\}$ gemeinsam. Da $\tau_1 \circ \tau_2^{-1}$ das Gebiet $\mathfrak{B}_2$ eineindeutig holomorph in $\mathfrak{B}$ abbildet und dabei F_2 auf $u = h$ wirft, sind in $\mathfrak{B}_2$

alte Randpunkte $\varrho_2 = \eta_2$ unter der Kählerschen Metrik $\Lambda = \Lambda^* \circ (\tau_1 \tau_2^{-1})$ unendlich fern. Also ist erst recht in $\mathfrak{H}^2$, das ja in $\mathfrak{B}_2$ enthalten ist, die Fläche E_3 unendlich fern. Nach Satz 15 muß für $z_1^{(2)} = e_0 + i v_2$ gelten: $\dfrac{\partial^2 \ln R_1}{\partial z_1^{(2)} \partial \bar{z}_1^{(2)}} \geqq 0$. Das ist aber, wie man errechnet, nicht der Fall. Damit haben wir einen Widerspruch durch unsere Annahme gewonnen, daß $u - h$ nicht LK-Funktion in 0 ist. Hilfssatz 11 ist also richtig.

Wir holen nun noch den Beweis von Hilfssatz 12 nach. Da die Funktionen $\hat{f}_\nu(v_1, \vartheta_1)$ auf E reell-analytisch sind, kann man f_ν um jeden Punkt $p = (v_1^0, \vartheta_1^0) \in E_1$ in eine Potenzreihe $\Sigma a_{n,m}^{(\nu)} (v_1 - v_1^0)^n \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_1^0)^n$ entwickeln. Die Reihe $f_\nu^* (z_1^{(1)}, w) = \Sigma a_{n,m}^{(\nu)} i^{-(n+m)} (z_1^{(1)} - i v_1^0)^n \cdot (w - i\vartheta_1^0)^m$ konvergiert noch in einer (komplex) zweidimensionalen Umgebung von $(i v_1^0, i\vartheta_1^0)$, im $(z_1^{(1)}, w)$-Raum. Die $f_\nu^* (z_1^{(1)}, w)$ sind dort holomorphe Funktionen. Offenbar ist $f_\nu(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) = f_\nu^* (z_1^{(1)}, \ln z_2^{(1)})$ eine holomorphe Fortsetzung von $\hat{f}_\nu$ in eine volldimensionale Umgebung von p. Wie man unmittelbar aus der Konstruktion entnimmt, ist f_ν die einzig mögliche holomorphe Fortsetzung. Im Punkte p gilt $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_1^{(1)}} = i^{-1} a_{1,0}^{(\nu)} = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial v_1}$;
$\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_2^{(1)}} = i^{-1} a_{0,1}^{(\nu)} e^{-i\vartheta_1^0} = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial \vartheta_1} e^{-i\vartheta_1^0}$ und somit $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})} = -\dfrac{\partial(\hat{f}_1, \hat{f}_2)}{\partial(v_1, \vartheta_1)} \cdot e^{-i\vartheta_1^0} \neq 0$. $z_1 = f_1$, $z_2 = f_2$ bildet also eine Umgebung von p eindeutig ab.

Wir erhalten nun eine Fortsetzung $f_\nu(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$ von $\hat{f}_\nu$ in eine volle Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_1, wenn wir f_ν in jedem Punkt $p \in E_1$ fortsetzen. Ist $\mathfrak{U}$ hinreichend klein gewählt, so gilt dort $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})} \neq 0$. Gäbe es keine Umgebung $\mathfrak{D}_1$ von E_1, in der $\tau_1: z_\nu = f_\nu$ eineindeutig ist, so gäbe es in $\mathfrak{U}$ zwei Folgen $p_\nu^{(1)}$ und $p_\nu^{(2)}$ von Punkten $p_\nu^{(1)} \neq p_\nu^{(2)}$, die gegen einen Punkt $p_0^{(1)}$ bzw. $p_0^{(2)}$ aus E_1 konvergieren, derart, daß $\tau_1(p_\nu^{(1)}) = \tau_1(p_\nu^{(2)})$ ist. Dann gilt auch $\tau_1(p_0^{(1)}) = \tau_1(p_0^{(2)})$ und da auf $E_1: \tau_1 = \hat{\tau}_1$ eineindeutig ist, $p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_0$. Das kann aber nicht sein, da τ_1 wie vorhin gezeigt, eine Umgebung von p_0 umkehrbar abbildet. Damit ist Hilfssatz 12 bewiesen.

(Eingegangen am 28. Juli 1955)

BREMERMANN, H. J.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 76—86 (1956)

On the Conjecture of the Equivalence of the Plurisubharmonic Functions and the Hartogs Functions

By

H. J. BREMERMANN in Münster (Westf.)

1. Introduction

The subject of this paper is to disprove a conjecture which S. BOCHNER and W. T. MARTIN stated in their book "Several Complex Variables" ([5], p. 145) and which can be formulated as follows: "Every plurisubharmonic function is a Hartogs function." The Hartogs functions, which were introduced by BOCHNER and MARTIN, are real valued functions which are obtained from the family of functions $\log |f|$, where f is holomorphic in a domain D by applying certain operations. The plurisubharmonic functions are a subclass of the subharmonic functions, they were introduced by P. LELONG [15] and K. OKA [20]. We show that any Hartogs function possesses a continuation as a Hartogs function into the envelope of holomorphy of its domain of definition and that an upper bound of a Hartogs function in its domain of definition is also an upper bound for any continuation as a Hartogs function in the envelope of holomorphy. Then we give an example of a function $V(z)$ such that $V(z)$ is plurisubharmonic in a domain $D_1 \cup D_2$, $V(z) = 0$ in D_1 and $V(z) > 0$ in D_2, where D_2 is part of the envelope of holomorphy of D_1. ($D_1 \cup D_2$ is a tube domain in the example.) If the conjecture were true, then $V(z)$ would be a Hartogs function and we should have $V(z) \leqq 0$ in contradiction to the definition of $V(z)$. On the other hand the conjecture is true if the domain of definition is a domain of holomorphy (pseudo-convex domain). For this a new proof is given. A consequence of the Bochner-Martin conjecture would have been, that every plurisubharmonic function would have possessed a plurisubharmonic continuation into the envelope of holomorphy of its domain of definition. This consequence conjecture is also disproved in this paper.

The BOCHNER-MARTIN conjecture has been of particular interest because its positive solution would have had as a consequence a positive solution of the Levi problem, which had been an outstanding problem in several complex variables for many years. The conjecture has been investigated previously by P. LELONG [16] and [18], H. J. BREMERMANN [7] and recently by S. HITOTUMATU [13]. In [16] and [7] in particular the close connection of the conjecture with the Levi problem (compare BEHNKE-THULLEN [3], p. 54) which only recently has been solved completely for the case of arbitrary complex dimension by K. OKA [21], F. NORGUET [19] and H. J. BREMERMANN [9] has been studied. In [18] p. 32 LELONG has credited the

author for having indicated in his thesis [7] a proof of the prolongation conjecture. This is a misunderstanding.

At the end of the paper three new problems are indicated.

2. Definitions

Let D be a schlicht domain in the space of n complex variables. According to BOCHNER-MARTIN ([5], p. 143) the class F_D of Hartogs functions of the domain D is defined as follows: It is the smallest class of real valued functions that includes all functions $\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(z) = \log |f(z)|$, where $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ is holomorphic in D, and that is closed under the following operations:

1. If $\varphi(z)$, $\psi(z) \in F_D$ and $c \geqq 0$ is a constant, then $\varphi(z) + \psi(z) \in F_D$ and $c\,\varphi(z) \in F_D$.

2. If $\{\varphi_\nu\}$ is a family of functions of F_D which is uniformly bounded from above in every compact subset of D, then $\sup_\nu \{\varphi_\nu(z)\} \in F_D$.

3. If $\varphi_\nu \in F_D$ and $\varphi_\nu(z) \geqq \varphi_{\nu+1}(z)$, then $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(z) \in F_D$.

4. If $\varphi(z) \in F_D$ then $\limsup_{z' \to z} \varphi(z') \in F_D$.

5. If $\varphi(z) \in F_{D'}$ for every $D' \subset D$, then $\varphi(z) \in F_D$.

The plurisubharmonic functions (termed "pseudo-convex functions" in OKA [20] and BREMERMANN [7]) are defined as follows (OKA [20], LELONG [15]): A real valued function $V(z)$ is called "plurisubharmonic" in a domain D if it satisfies the following conditions:

a) $-\infty \leqq V(z) < \infty$,

b) $\limsup_{z' \to z} V(z') \leqq V(z)$, ($V$ is upper semi-continuous)

c) The restriction of $V(z)$ in D to any "analytic plane" $\{z \mid z = z^{(0)} + \lambda a\} \cap D$, where a is a complex vector and λ a complex parameter, is subharmonic. (We admit the constant $-\infty$ as a plurisubharmonic function, so does OKA, while LELONG excludes it.)

If $V(z)$ has continuous derivatives of second order, then a necessary and sufficient condition for $V(z)$ to be plurisubharmonic is, that the Hermitian form

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} d z_\mu d \bar{z}_\nu$$

be positive semi-definite in D (LELONG [15], p. 321; [18], p. 25).

Given a function $V(z)$, plurisubharmonic in a domain D. Any function $V^*(z)$ which is subharmonic in a domain $D^* \supset D$ which is equal to $V(z)$ in D we call a "plurisubharmonic continuation of $V(z)$ in D^*". The plurisubharmonic continuation will in general, if possible at all, not be unique. Analogously the "Hartogs continuation" of a Hartogs function and the "convex continuation" of a convex function is defined.

3. Statement of the Conjectures

As BOCHNER-MARTIN observe already, every Hartogs function $\varphi(z)$ that has continuous partial derivatives of second order satisfies

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} d z_\mu d \bar{z}_\nu \geqq 0.$$

Therefore it is a plurisubharmonic function. In general, the functions $\log|f|$, f holomorphic, are plurisubharmonic, and the class of plurisubharmonic functions is closed with respect to operations 1., 3., 4. and 5. It is not closed with respect to operation 2. However, if we replace the class of plurisubharmonic functions by the class of "quasiplurisubharmonic functions", or "functions of class M" in the terminology of LELONG, then this class is closed with respect to operations 1. to 5. (LELONG [15], p. 334). Also, if $U(z)$ is a quasiplurisubharmonic function, then $V(z) = \lim\sup_{z' \to z} U(z')$ is a plurisubharmonic function. Therefore every Hartogs function is a quasiplurisubharmonic function and every upper semi-continuous Hartogs function is a plurisubharmonic function.

BOCHNER-MARTIN conjecture ([5], p. 147) that conversely every function $\varphi(z)$ satisfying

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} dz_\mu d\bar{z}_\nu \geqq 0$$

is a Hartogs function. That means that every twice continuously differentiable plurisubharmonic function would be a Hartogs function. Now every function $V(z)$, plurisubharmonic in a domain D, can be approximated in every compact subdomain $D' \subset D$ by a sequence of in D' plurisubharmonic functions $V_\nu(z)$ that possess partial derivatives of arbitrary high order such that $V_\nu(z) \geqq V_{\nu+1}(z)$ (LELONG 17], p. 184; BREMERMANN [7], p. 30). If the Bochner-Martin conjecture therefore would be true, then it would follow by properties 3. and 5. of the Hartogs functions that $V(z)$ is a Hartogs function. Therefore equivalent with the conjecture of BOCHNER and MARTIN is the following:

Conjecture 1. *The class of the upper semi-continuous Hartogs functions and the class of the plurisubharmonic functions coincide.*

The classes of the Hartogs functions and the plurisubharmonic functions depend upon their domain of definition which may or may not be a domain of holomorphy (that is a domain that does not have an analytic completion except itself. Compare BEHNKE-THULLEN [3], p. 70). We will see that it is of importance if the domain of definition is a domain of holomorphy or not. We therefore split from the total conjecture the

Conjecture 1 a. *The upper semi-continuous Hartogs functions and the plurisubharmonic functions coincide in domains of holomorphy.*

4. Disprove of Conjecture 1

Theorem 1. *The Hartogs functions and the plurisubharmonic functions do not coincide in certain domains. Thus conjecture 1 is wrong in the general case.*

For the proof several lemmas are needed.

Lemma 1. *Let $\varphi(z)$ be a Hartogs function in D. Then in any compact subdomain $D' \subset D$, $\varphi(z)$ has a representation $\varphi(z) = \lim_{r\to\infty} \varphi_r(z)$, where $\varphi_r \geqq \varphi_{r+1} \geqq \varphi$ in D' and $\varphi_r(z)$ is of the form $\varphi_r(z) = \sup_\alpha\{(\log|f^r_\alpha(z)|)/n_\alpha\}$, f^r_α holomorphic in $\bar{D}'$. α is an index set, not necessarily countable, and the n_α are integers. The family $\{(\log|f^r_\alpha|)/n_\alpha\}$ is uniformly bounded from above.*

Trivially the lemma is true for functions $\log|f(z)|$. Then one has to show that if the representation holds for φ_1 and φ_2, then it holds also for $\varphi_1 + \varphi_2$, and so on for the other operations 1.—5. with respect to which the class of the Hartogs functions is closed. We omit the details which are merely technical.

Lemma 2. *Let $\psi_\mu(z)$ be a sequence of functions that are quasiplurisubharmonic in a domain G and uniformly bounded from above. If then* $\limsup_\mu \psi_\mu(z) \leq A$ *in G, then for every subdomain G' that is closed in G and for every $\varepsilon > 0$ there exists a μ_0 such that for $\mu \geq \mu_0$ we have $\psi_\mu(z) > A + \varepsilon$* [1]).

This lemma is not trivial. It was first proved [for $\psi_\mu(z)$ of the form $(\log|f_\mu(z)|)/\mu$] by F. Hartogs ([11], p. 15—18). In Bremermann ([7], p. 26) a proof is given for plurisubharmonic functions. A quasi-plurisubharmonic function differs from a plurisubharmonic function on a set of Lebesgue measure zero on which it is smaller. Therefore the mean integrals exist just as in the case of the plurisubharmonic functions (Lelong [13], p. 335). Therefore the proof given in Bremermann [7] applies literally also for quasi-plurisubharmonic functions. We note that the upper envelope of a family of quasi-plurisubharmonic functions that is uniformly bounded from above is a quasi-plurisubharmonic function (Lelong [15], p. 334). Now we are able to prove the following lemma.

Lemma 3. *Let $\varphi(z)$ be a Hartogs function in D. Let $D' \subset D$. a) Then $\varphi(z)$ possesses at least one Hartogs continuation into the envelope of holomorphy $E(D')$ of D'. b) If $\varphi(z) \leq M$ in D, and if $\varphi^*(z)$ is an arbitrary Hartogs continuation of $\varphi(z)$ into $E(D')$, then $\varphi^*(z) \leq M$ holds in $E(D')$.*

Proof. a) According to lemma 1 $\varphi(z)$ has a representation

$$\varphi(z) = \lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu(z),\quad \varphi_\nu(z) = \sup_\alpha\{(\log|f_\alpha^\nu(z)|)/n_\alpha\} \quad\text{and}\quad \varphi_\nu \geq \varphi_{\nu+1}.$$

Now we change the representation. To represent φ_{ν_0} we take instead of the family $\{(\log|f_\alpha^{\nu_0}|)/n_\alpha\}$ the union of all families $\{(\log|f_\alpha^\nu|)/n_\alpha\}$ for $\nu \geq \nu_0$. Let this union of the families be the family $\{(\log|g_\beta^{\nu_0}|)/n_\beta\}$ where β varies in a suitable index set. Because we have $\varphi_\nu \geq \varphi_{\nu+1}$ the addition of the families for $\nu \geq \nu_0$ does not change the supremum. Hence we have $\varphi_{\nu_0} = \sup_\beta\{(\log|g_\beta^{\nu_0}|)/n_\beta\}$.

Because we have such a representation in any closed subdomain of D, we can assume that our representation is valid already for a domain $D'' \subset D$, with $D' \subset D''$. According to lemma 1 each family $\{(\log|g_\beta^\nu|)/n_\beta\}$ is uniformly bounded from above in D''. Now it is a very simple and basic lemma that any function that is holomorphic in a domain D' assumes in the envelope of holomorphy $E(D')$ no values that it does not assume in D' (compare Bochner-Martin [5], p. 64). Hence each function $(\log|g_\beta^\nu|)/n_\beta$ does not assume any values in $E(D')$ that it does not assume in D'. Therefore the same upper bound that holds for a family $\{(\log|g_\beta^\nu|)/n_\beta\}$ in D' also holds in $E(D')$. Therefore all the families are uniformly bounded from above in $E(D')$ and therefore each φ_ν has a Hartogs continuation in $E(D')$. Because the family representing

[1]) This Lemma holds also for general subharmonic functions and even for the more general class of "fonctions sous-médianes". Comp. Lelong [14], theorem 9, p. 102 and Deny-Lelong [10a], Proprieté 5, p. 110.

$\varphi_{\nu+1}$ is a subfamily of the one representing φ_ν, the inequality $\varphi_{\nu+1} \leqq \varphi_\nu$ holds also in $E(D')$. Therefore $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu$ exists and is a Hartogs function according to property 3. of the Hartogs functions. Thus we have proved that $\varphi(z)$ has a Hartogs continuation into $E(D')$.

b) Let now $\varphi^*(z)$ be an arbitrary Hartogs continuation of $\varphi(z)$ into $E(D')$. Let $\varphi^*(z)$ be represented by $\varphi_\nu^*(z)$ in the sense of lemma 1 in the domain $D'' \cup E(D')$. Because we have $\varphi_{\nu+1} \leqq \varphi_\nu^*$ in D'' and because each φ_ν^* is bounded from above in D'', the sequence $\{\varphi_\nu^*\}$ is uniformly bounded in D''. Each φ_ν^* is a quasiplurisubharmonic function in D''. Further we have $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu^* \leqq M$ in D''. Applying lemma 2 to the subdomain D' of D'' we conclude: For every $\varepsilon > 0$ there exists a ν_1 such that for $\nu \geqq \nu_1$ we have $\varphi_\nu^*(z) < < M + \varepsilon$ in D'. Then we have for the same reasons as above $\varphi_\nu^*(z) < M + \varepsilon$ also in $E(D')$. Therefore $\varphi^*(z) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu^*(z) < M + \varepsilon$ in $E(D')$ for every $\varepsilon > 0$, hence $\varphi^*(z) \leqq M$ in $E(D')$. q.e.d.

Remark. The envelope of holomorphy of a schlicht domain can be non-schlicht (BEHNKE-THULLEN [3], p. 79). However, the non-schlicht domains occuring are concrete complex manifolds over the schlicht C^n with no ramification points as interior points. Therefore the $z_1 \ldots z_n$ coordinates of the schlicht C_n-space are local coordinates in a neighborhood of any point of such a domain. Therefore we can admit domains of such type in the definition of the Hartogs functions. Also the property to be a plurisubharmonic function is a local property and we can consider plurisubharmonic functions in complex manifolds with no difficulty at all. Therefore our considerations are also valid for envelopes of holomorphy that are not schlicht. For our counterexample to conjecture 1 however, we can limit ourselves to schlicht envelopes of holomorphy.

We now proceed to give an example of a plurisubharmonic function for which this lemma is not valid.

1. Consider the following domain in the plane of two real variables x_1, x_2:

$$B_1 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| < 4 \wedge |x_2| < 4\} - \{(x_1, x_2) \mid |x_1| < 2 \wedge |x_2| < 2\}.$$

B_1 is a square of side length 8 out of which a square of side length 4 has been removed. Further we consider the point set:

$$B_2 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 2 \wedge |x_2| < 1\}.$$

In B_1 we prescribe the function $V_1(x_1, x_2) \equiv 0$, and in B_2 we prescribe $V_2(x_1, x_2) = (2 - x_1)^3$. Let $B = B_1 \cup B_2$. Then we define in B a function $V(x) = V(x_1, x_2)$ as follows:

$$V =_{df} V_1 \text{ in } B_1 \quad \text{and} \quad V =_{df} V_2 \text{ in } B_2.$$

$V(x)$ is twice continuously differentiable in B. It is

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\mu dx_\nu \equiv 0 \text{ in } B_1.$$

and in B_2:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\nu dx_\nu = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} dx_1^2 = 6(2 - x_1)\, dx_1^2.$$

Therefore we have

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\mu dx_\nu \geqq 0 \text{ in } B.$$

Therefore V is a convex function in B, because any real valued function for which the quadratic differential form is positive semi-definite is a convex function (Bonnesen-Fenchel [6], p. 18).

We now consider the tube domain

$$T_B = \{(z_1, z_2) \mid (x_1, x_2) \in B \wedge |y_1|, |y_2| < \infty\},$$

where B is the domain just constructed and x_j the real part of z_j and y_j the imaginary part. We continue $V(x)$ into T_B by defining $V(z_1, z_2) =_{df} V(x_1, x_2)$. $V(z)$ is plurisubharmonic in T_B because

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial z_\mu \partial \bar z_\nu} dz_\mu d\bar z_\nu \geqq 0 \text{ in } T_B.$$

(Compare Lelong [16] and Bremermann [8] and [10].)

We take a domain $B_1' \Subset B_1$, where B_1 is the domain defined above. Then we consider the "truncated tube domain":

$$S_M' =_{df} \{(z_1, z_2) \mid (x_1, x_2) \in B_1 \wedge |y_1| < M \wedge |y_2| < M\}.$$

Then $S_M' \Subset T_{B_1}$ holds. In T_{B_1} we have $V(z) \equiv 0$ by definition of $V(z)$. If $V(z)$ would be a Hartogs function, that is if the conjecture would be true, then, according to lemma 3, we should have $V(z) \leqq 0$ in $E(S_M')$. If now M goes to infinity and $B_1' \to B_1$, then S_M' converges towards T_{B_1}. For $E(S_M')$ we have the inclusion:

$$S_M' \subset E(S_M') \subset E(T_{B_1}).$$

Therefore $\lim S_M' = T_{B_1} \subset \lim E(S_M') \subset E(T_{B_1})$. We will show now that $\lim S_M'$ is in fact equal to $E(T_{B_1})$. The theorem of Behnke-Stein states that the limit of an increasing sequence of domains of holomorphy is a domain of holomorphy (Behnke-Stein [1] and [2]). Hence $\lim E(S_M')$ is a domain of holomorphy, and it contains T_{B_1} as we have just seen. Now $E(T_{B_1})$ being the envelope of holomorphy of T_{B_1} is the smallest domain of holomorphy containing T_{B_1}, hence $\lim E(S_M') \supset E(T_{B_1})$. It follows $\lim E(S_M') = E(T_{B_1})$. In every $E(S_M')$ we have $V(z) \leqq 0$, hence $V(z) \leqq 0$ in $E(T_{B_1})$.

The envelope of holomorphy of a tube domain is well known (Stein [22], Bochner [4], Hitotumatu [12], Bremermann [8]). $E(T_{B_1})$ is the tube that has the convex envelope of B_1 as its base. The convex envelope $C(B_1)$ is the set $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| < 4 \wedge |x_2| < 4\}$. Therefore we should have $V(z) \leqq 0$ in $T_{C(B_1)}$, and because $B_2 \subset C(B_1)$ we should have in particular $V(z) \leqq 0$ in T_{B_2}.

This contradicts the definition of $V(z)$. Therefore $V(z)$ cannot be a Hartogs function. Therefore conjecture 1 is not true for the tube domain T_B. That proves theorem 1.

Remark. In this proof the theorem of Behnke-Stein can be avoided and thus the proof can be conducted in a more elementary way if we determine the envelope of holomorphy of a "truncated tube" directly: or if instead of a tube domain we consider the Reinhardt circular domain $\{(w_1, w_2) \mid (\log|w_1|, \log|w_2|) \in B\}$, where B is the domain defined above and w_1, w_2 are two complex variables. Even the notion of "envelope of holomorphy" can be avoided and for the particular objectives of this proof be replaced by "analytic completion".

5. Proof of Conjecture 1a

While conjecture 1 is wrong for arbitrary domains it holds for domains of holomorphy.

Theorem 2. *Let D be a domain of holomorphy (pseudo-convex domain). Then every in D plurisubharmonic function is a Hartogs function in D.*

Proof. Let $V(z)$ be plurisubharmonic in D, let w be a complex variable. Then we consider in the space C^{n+1} of the $n+1$ variables $z_1, \ldots, z_n, w$ the Hartogs domain:

$$H = \{(z, w) \mid z \in D \wedge |w| < \exp(-V(z))\}.$$

In order to establish that H is a domain of holomorphy we first prove the following

Lemma 4. *Let G be a pseudo-convex domain and let $U(t)$ be plurisubharmonic in G. Then the region*

$$G_M =_{df} \{t \mid t \in G \wedge U(z) < M\}$$

is a pseudo-convex region for every real M.

Remark. Let $\delta_G(t)$ be the euclidean distance of the point t from the boundary of a region G. Then the region G is "pseudo-convex" if and only if the function $-\log\delta_G(t)$ is a plurisubharmonic function in G (Bremermann [7, 10], compare also Lelong [17]).

Proof of the lemma. We consider the lemma to be true when G_M is empty. Let $\delta_G(t)$ be the euclidean distance function of G. Then we take the upper envelope of $-\log\delta_G(t), \log|t_1|, \ldots, \log|t_k|$ and denote it by $\Delta_G(t)$. As $-\log\delta_G(t)$ and $\log|t_1|, \ldots, \log|t_k|$ are plurisubharmonic functions and the upper envelope of a finite family of plurisubharmonic functions is plurisubharmonic, we obtain that $\Delta_G(t)$ is plurisubharmonic in G. $\Delta_G(t)$ goes to infinity everywhere at the boundary of G.

Then we consider $W_N(t) =_{df} \sup\{\Delta_G(t) - N, U(t) - M\}$ (N real); $W_N(t)$ is plurisubharmonic as upper envelope; and we define

$$B_N =_{df} \{t \mid t \in G_M \wedge W_N(t) < 0\}.$$

As $\Delta_G(t)$ goes to infinity everywhere at the boundary of G, we have for every real N: $B_N \Subset G$. And for $N_1 < N_2$ we have $B_{N_1} \subset B_{N_2} \subset G_M$; and $\lim_{N\to\infty} B_N = G_M$.

Now we utilize the fact that our lemma has been proved (for arbitrary domains G) if $G_M \subset G$ (BREMERMANN [10], p. 39). Therefore every region B_N is a pseudoconvex region. The limit of an increasing sequence of pseudo-convex regions is a pseudo-convex region. Therefore G_M is a pseudo-convex region. Our lemma is proved.

In order to apply lemma 4 to H (defined above) we write H in the following form:

$$H = \{(z, w) \mid z \in D \wedge \log|w| + V(z) < 0\}.$$

Let $t =_{df} (z, w)$ and $U(t) =_{df} \log|w| + V(z)$. Then $U(t)$ is a plurisubharmonic function in H. If D is a pseudo-convex domain in the $z_1, \ldots, z_n$-space, then $D^* =_{df} D \times \{w\text{-plane}\}$ is a pseudo-convex domain in the $z_1, \ldots, z_n, w$-space (which is our t-space). With this denotation we can write for H

$$H = \{t \mid t \in D^* \wedge U(t) < 0\}.$$

Applying lemma 4 we obtain that H is a pseudo-convex domain. At this point we make use of OKA's fundamental theorem (OKA [21], NORGUET [19], BREMERMANN [9]). We obtain: H is a domain of holomorphy. That means, there exists a function $F(w, z_1, \ldots z_n)$, holomorphic in and only in H. This function can be developed in a Hartogs series

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z_1, \ldots, z_n)\, w^\nu.$$

For the radius of uniform convergence $R(z)$ of this series we have the formula $V(z) = -\log R(z) = \lim\sup_{z' \to z} \lim\sup_{\nu \to \infty} \{(\log|f_\nu(z')|)/\nu\}$. (See for instance BOCHNER-MARTIN [5], p. 143, BREMERMANN [7], p. 36.) The functions $(\log|f_\nu(z)|)/\nu$ are in the class of Hartogs functions. What about the operation "lim sup"? As one sees immediately by applying the Cauchy integral formula (with respect to w) to $F(w, z_1, \ldots, z_n)$, the family $(\log|f(z)|)/\nu$ is uniformly bounded in every closed subdomain $D' \subset D$. Therefore $\sup_{\nu > \nu_0} \{(\log|f_\nu(z)|)/\nu\}$ exists and is a Hartogs function in every D', because of property 2. of the Hartogs functions. Because of property 3. $\lim_{\nu_0 \to \infty} \sup_{\nu > \nu_0} \{(\log|f_\nu(z)|)/\nu\}$ is a Hartogs function in D' and obviously this expression is equal to $\lim\sup_{\nu \to \infty} \{(\log|f_\nu(z)|)/\nu\}$. The operation $\lim\sup_{z' \to z}$ is operation 4. of the Hartogs functions and the passage from D' to D is operation 5. Therefore $V(z)$ is a Hartogs function. Theorem 2 is proved.

Remark. In the case of one variable conjecture 1 and 1a coincide and the plurisubharmonic functions coincide with the subharmonic functions. For this case conjecture 1a was under additional hypotheses already proved by F. HARTOGS ([11], p. 61) and later by P. LELONG [14] who showed that some of the hypotheses are unnecessary. The methods of these proofs fail for $n > 1$.

6. Continuation of Plurisubharmonic Functions

Conjecture 1 has the following conjecture as a consequence (compare HITOTUMATU [13], p. 188, LELONG [16], p. 197, BREMERMANN [7], p. 62).

Conjecture 2. *Every function that is plurisubharmonic in a domain D possesses a plurisubharmonic continuation into the envelope of holomorphy $E(D)$ of D.*

Lemma 5. *Let $\varphi(z)$ be a Hartogs function in a domain D. Then $\varphi(z)$ possesses a Hartogs continuation into the envelope of holomorphy $E(D)$ of D. If $\varphi(z) \leqq M$ in D, then this inequality holds also in $E(D)$ for any Hartogs continuation of $\varphi(z)$.*

This lemma follows immediately from lemma 3 and property 5. of the Hartogs functions if for $D' \to D$ we have $\lim E(D') = E(D)$. The latter equality follows from the theorem of Behnke-Stein in exactly the same way as the corresponding equality for tube domains in section 4.

Now it is easy to see how conjecture 2 follows from conjecture 1. If conjecture 1 would be true, then a plurisubharmonic function would be a Hartogs function, as a Hartogs function it would have a Hartogs continuation into the envelope of holomorphy and thus a plurisubharmonic continuation.

We now proceed to disprove conjecture 2 (and thus obtain a second disprove of conjecture 1 which is not as elementary, however, as the direct disprove given above).

Lemma 6. *Let $V(z)$ be plurisubharmonic in D and smaller or equal to M in D. Then any plurisubharmonic continuation of $V(z)$ into $E(D)$ is smaller or equal to M in $E(D)$.*

Let $V^*(z)$ be a plurisubharmonic continuation of $V(z)$ into $E(D)$. Then $V^*(z)$ is a Hartogs function in $E(D)$ according to theorem 2. Therefore lemma 5 applies and $V^*(z) \leqq M$ in $E(D)$.

Theorem 3. *Conjecture 2 is wrong.*

The plurisubharmonic function $V(z)$ constructed in section 4 would violate the lemma 6 if it had a continuation into the envelope of holomorphy of T_B. (T_B the tube domain constructed in section 4.) Suppose $V(z)$ would have a plurisubharmonic continuation $V^*(z)$ in $E(T_B)$. In T_{B_1} we have $V^*(z) = 0$. Therefore we should have according to lemma 6 $V^*(z) \leqq 0$ in $E(T_{B_1})$. Now $E(T_{B_1})$ is the same as $E(T_B)$, it is the tube that has the convex envelope of B_1 as its base. Part of this convex envelope is B_2. Therefore we should have $V^*(z) \leqq 0$ in T_{B_2}. But we have by definition $V^*(z) = V(z) > 0$ in T_{B_2}. That is a contradiction. $V(z)$ cannot possess a plurisubharmonic continuation into the envelope of holomorphy of its domain of definition. Therefore $V(z)$ is a counterexample to conjecture 2.

7. Problems

We have seen that the conjectures 1 and 2 are wrong for certain domains which are not domains of holomorphy. Here the question arises: *If conjecture 1 is true for a domain D is then D a domain of holomorphy?* The same problem arises also for conjecture 2. Closely related with the second problem is the following question: *Does to every domain exist a plurisubharmonic function that does not possess a plurisubharmonic continuation into a larger domain?* Finally we obtain a problem from the following

Theorem 4. *Let D be a domain of holomorphy and let S, T be a pair of point sets in D such that 1. $S \cup T \Subset D$ and 2. for any function $f(z)$ that is holomorphic in D the equality* $\sup_{z\in\bar T}|f(z)| = \sup_{z\in\overline{S\cup T}}|f(z)|$ *holds. Then if a function $V(z)$ is plurisubharmonic in D we have also for $V(z)$ the equality* $\sup_{z\in\bar T}V(z) = \sup_{z\in\overline{S\cup T}}V(z)$. For the proof we observe that because D is a domain of holomorphy $V(z)$ is a Hartogs function. Then the result follows similarly as in lemma 3.

The (analogue of) theorem 4 does in general not hold if D is not a domain of holomorphy, as the counterexample of theorem 3 shows. Therefore the problem arises: *If the (analogue of) theorem 4 holds for arbitrary sets S, T that satisfy 1. and 2. and for arbitrary in D plurisubharmonic functions, is then D a domain of holomorphy?*

Recently H. GRAUERT and R. REMMERT [10b] have shown, and that is of interest in connection with the problems indicated here: A function that is plurisubharmonic in a domain with the exception of a $(n-1)$-dimensional analytic set and that is bounded from above in the neighborhood of every point of the analytic set can be continued as a plurisubharmonic function into the exceptional set. If the exceptional set is an analytic set of lower dimension than $(n-1)$ the function can be continued even without the assumption that it is bounded. The result holds for domains in general complex spaces.

Bibliography

[1] BEHNKE, H., and K. STEIN: Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität. Math. Ann. **116**, 204—216 (1938). — [2] BEHNKE, H., and K. STEIN: Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche. Ann. di Mat. ser. 4, **28**, 317—326 (1949). — [3] BEHNKE, H., and P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. **3**, Nr. 3 (1934). — [4] BOCHNER, S.: A theorem on analytic continuation of functions in several variables. Ann. of Math. **39**, 14—19 (1938). — [5] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several Complex Variables. Princeton 1948. — [6] BONNESEN, T., and W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Erg. Math. **3**. Nr. 1 (1934). — [7] BREMERMANN, H. J.: Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Dissertation Münster, Schriftenreihe d. Math. Instituts Münster Nr. 5 (1951). — [8] BREMERMANN, H. J.: Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete. Math. Ann. **127**, 406—423 (1954). — [9] BREMERMANN, H. J.: Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **128**, 63—91 (1954). — [10] BREMERMANN, H. J.: Complex Convexity. Navy Report no. 38, Stanford 1954. Also to appear in Transact. Am. Math. Soc. 1956. — [10a] DENY, J., and LELONG, P.: Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, Bull. Soc. Math. France **75**, 89—112 (1947). — [10b] GRAUERT, H., and R. REMMERT: Zur Theorie der plurisubharmonischen Funktionen. To appear 1956. — [11] HARTOGS, F.: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Ann. **62**, 1—88 (1906). — [12] HITOTUMATU, S.: Note on the envelope of regularity of a tube domain. Proc. Japan. Acad. **26**, 21—25 (1950). — [13] HITOTUMATU, S.: On some conjectures concerning pseudo-convex domains. J. Math. Soc. Japan **6**, 178—195 (1954). — [14] LELONG, P.: Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **58**, 83—177 (1941). — [15] LELONG, P.: Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Scient Éc. Norm. Sup. **62**, 301—338 (1945). — [16] LELONG, P.:

La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. J. de Math. 31, 191—219 (1952). — [17] Lelong, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. J. Anal. Jérus. 2, 178—208 (1952). — [18] Lelong, P.: Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles 1953, pp. 21—40.— [19] Norguet, F.: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (Passage du local au global.) Bull. Soc. Math. France 82, 137—159 (1954). — [20] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI, Domaines pseudoconvexes. Tohoku Math. J. 49, 15—52 (1942). — [21] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX, Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. of Math. 23, 97—155 (1953). — [22] Stein, K.: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 114, 543—569 (1937).

(Eingegangen am 26. Mai 1955)

HEEGNER, K.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 87—140 (1956)

Reduzierbare Abelsche Integrale und transformierbare automorphe Funktionen

Von
KURT HEEGNER in Berlin

Kürzlich habe ich an dem Beispiel der elliptischen Modulfunktion die Verwendbarkeit der transformierbaren automorphen Funktionen zur Lösung diophantischer Fragestellungen nachgewiesen[1]). Bei diesen Untersuchungen wurde mehrfach von der Reduktion Abelscher Integrale Gebrauch gemacht. Die vorliegende Arbeit soll dazu dienen, eine der mannigfachen Beziehungen beider Theorien zueinander darzulegen.

Einem allgemeineren Zusammenhange[2]) entnehme ich das algebraische Gebilde vom Geschlechte $g = 3$

$$\sqrt{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}\;\sqrt[4]{\alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma}\,. \tag{1}$$

An diesem Gebilde kann für jeden Reduktionsgrad der Fall eintreten, daß die zugehörigen Integrale ein lemniskatisches Integral enthalten. Für die Reduktion vom Grade 2 ist dies unmittelbar einzusehen. Alsdann reproduziert sich (1) durch eine lineare Transformation von der Periode 2. Da (1) linear unabhängig angesetzt ist, kann man $x' = -x$ wählen, also a, c, β zu Null annehmen:

$$\sqrt{b\,x^2 + d}\;\sqrt[4]{\alpha\,x^2 + \gamma}\,. \tag{2}$$

Das lemniskatische Integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{b\,y + d}\;\sqrt[4]{(\alpha\,y + \gamma)^3}}\,, \qquad y = x^2 \tag{3}$$

ist sodann unter den Integralen erster Gattung von (2) enthalten. Die restlichen Integrale sind durch

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(b\,y + d)}\;\sqrt[4]{(\alpha\,y + \gamma)^\nu}} \qquad (\nu = 1, 3) \tag{4}$$

gegeben. Diese gehören der Theorie der hypergeometrischen Funktion an und definieren die Dreiecksfunktion mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0$. Da die Dreiecksteilung mit der Modulteilung commensurabel ist, lassen sich die Integrale vom Geschlechte $g = 2$ in (4) durch die Summe zweier elliptischer Integrale ausdrücken (Abschn. 10).

Für jeden Reduktionsgrad n gibt es eine Reduktionsmöglichkeit, für $n \equiv 1 \pmod{4}$ sogar zwei. Die restlichen Integrale definieren eine transformierbare

[1]) Diophantische Analysis und Modulfunktionen. Math. Z. **56**, 227—253 (1952).
[2]) Vgl. den letzten Abschnitt.

automorphe Funktion, deren Gruppe nur in dem Falle mit der elliptischen Modulgruppe commensurabel wird, wenn n ein Quadrat oder in die Summe zweier Quadrate zerlegbar ist.

Die Integrale von (1) geben das einfachste Beispiel einer nichtreduziblen transformierbaren automorphen Funktion in zwei Veränderlichen. Der niederste Transformationsgrad ist in Abschn. 18 behandelt. Die letzten drei Abschnitte geben einige Hinweise über die weitere Entwicklung.

1. Der algebraische Ansatz

Die reellen und komplexen Multiplikationen des lemniskatischen Integrals

$$\int \frac{dy}{\sqrt[4]{y^3(y-1)^2}} \tag{1}$$

sind durch rationale Funktionen gegeben, die mit den reduzierenden rationalen Funktionen zusammengesetzt sein können. Daher sei die spezielle Aufgabe der Transformation im voraus behandelt.

Das Integral (1) besitzt eine lineare Transformation in sich:

$$y' = y^{-1} \tag{2}$$

und eine quadratische Transformation

$$1 - y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \qquad \int \frac{(1+i)\,dx}{\sqrt[4]{x^3(x-1)^2}}\,. \tag{3}$$

Die damit zusammengesetzten transformierenden oder reduzierenden Funktionen werden im folgenden nicht aufgezählt. Bei den Transformationen ungeraden Grades gilt für den Grad n die Bedingung $n \equiv 1 \pmod{4}$. Setzen wir $n = 4\nu + 1$, so fallen bei $y = 0, \infty$ vier Zweige ν-mal zusammen und bei $y = 1$ zwei Zweige 2ν-mal, woraus die rationalen Funktionen bestimmt werden können. Aus dem Additionstheorem ergibt sich, daß die Anzahl der Lösungen gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in die Summe zweier Quadrate ist. Für $n = 21$ tritt zum erstenmal der Fall ein, daß keine Lösung existiert. Um die Ausrechnung für den niedersten Fall $n = 5$ zu vollziehen, setzen wir unter Berücksichtigung von (2)

$$y = \frac{x^4(x+a)}{ax+1}\,. \tag{4}$$

$y = 1$ ergibt $x = 1$ und die restliche Gleichung

$$x^4 + (a+1)(x^3 + x^2 + x) + 1 = 0 \tag{5}$$

oder

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(a+1)\,x + 1]^2 - \tfrac{1}{4}\,x^2(a^2 - 2a + 5) = 0,$$

die für $a = 1 + 2i$ in ein Quadrat übergeht. Die von ABEL aus dem Additionstheorem gefundene Formel ergibt sich aus dieser nach einer Umnormierung.

Das Verzweigungsschema der rationalen Funktionen in den Punkten $y = 0, \infty, 1$ läßt sich folgendermaßen notieren:

$$n = 4\nu + 1 \qquad (4\cdot\nu + 1),\ (4\cdot\nu + 1),\ (2\cdot 2\nu + 1). \tag{6}$$

Zu den Schemata der reduzierenden Funktionen des algebraischen Gebildes nach Einl. 1 gelangt man, wenn einer der Verzweigungspunkte frei beweglich angenommen wird. Für den Grad $n = 4\nu + 1$ werden zwei Schemata erhalten, nämlich:

(6a) $(4\cdot\nu + 1),\ (4\cdot\nu + 1),\ (2\cdot(2\nu - 1) + 1 + 1 + 1)$

(6b) $(4\cdot\nu + 1),\ (4\cdot(\nu - 1) + 2 + 2 + 1),\ (2\cdot 2\nu + 1).$

Für die anderen Werte von n existiert nur ein Schema:

$$\begin{array}{lll} & n = 4\nu & (4\cdot\nu),\ (4\cdot(\nu-1) + 2 + 1 + 1),\ (2\cdot(2\nu - 1) + 1 + 1) \\ (7) & n = 4\nu + 2 & (4\cdot\nu + 2),\ (4\cdot\nu + 1 + 1),\ (2\cdot 2\nu + 1 + 1) \\ & n = 4\nu + 3 & (4\cdot\nu + 2 + 1),\ (4\cdot\nu + 2 + 1),\ (2\cdot(2\nu + 1) + 1). \end{array}$$

Die Koeffizienten der rationalen Funktionen hängen für die niedersten Grade von einem Parameter ab und im allgemeinen von zwei Parametern, unter denen eine algebraische Gleichung besteht. Die Ausrechnung für $n = 4$ ergibt

(8) $y = x^4 - 2(t+1)\,x^3 + (3t+1)\,x^2, \quad y - t = (x-1)^2(x^2 - 2tx - t),$

(9) $$\int \frac{dy}{\sqrt[4]{y^3(y-t)^2}} = 2\int \frac{(2x-3t-1)\,dx}{\sqrt{x(x^2-2tx-t)}\,\sqrt[4]{[(x-1)^2-2tx+3t]^3}}.$$

In anderen Fällen läßt sich das algebraische Gebilde leicht angeben. So findet man für $n = 3$

(10) $$\sqrt{x(x^2 + tx + t)}\ \sqrt[4]{(x-2)^2 + 2tx}\,,$$

für $n = 5$, Schema (6a)

(11) $$\sqrt{x^3 + 5x^2 + tx + t}\ \sqrt[4]{(x-t)^2 - 16t}\,,$$

für $n = 5$, Schema (6b)

(12) $$\sqrt{x^2 - t^2 - 1}\ \sqrt[4]{(2x - 2t + 1)(2x + t^2 + 2)}\,.$$

An dem algebraischen Ansatz lassen sich Reduzibilitäten nachweisen, indem die Zusammensetzung einer Transformation nach (6) mit einer reduzierenden Funktion dasselbe Schema ergibt. Der erste Fall dieser Art ist $n = 10$. Daß andere Reduzibilitäten nicht auftreten, wird erst in Abschn. 17 unter Heranziehung des Klassenzahlsatzes über indefinite Hermitesche Quadriken bewiesen.

2. Der transzendente Raum

Das in Einl. (1) genannte algebraische Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ erweist sich als hyperelliptisch, sobald die Quadratwurzel

(1) $$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

rationalisiert wird. Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ und $x = z^2$, so ergibt sich

(2) $$\sqrt{z(a z^6 + b z^4 + c z^2 + d)}\,.$$

Im allgemeinen geht ein hyperelliptisches Gebilde $g = 3$ bei nichtunimodularen Transformationen der Perioden nicht wieder in ein solches über. Das vorliegende beansprucht schon deswegen Interesse, weil nichtunimodulare

Periodentransformationen existieren, bei denen dasselbe Gebilde erhalten wird.

Die Integrale erster Gattung seien zunächst durch die drei linearunabhängigen

(3) $$\int \frac{z^\nu dz}{\sqrt{z(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)(z^2-z_3^2)}} \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

repräsentiert. Diese nehmen bei der Substitution

(4) $$z' = -z$$

den Faktor $\pm i$ für $\nu = 0$ u. 2 und $\mp i$ für $\nu = 1$ an[3]). Alsdann läßt sich in bekannter Weise eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit sechs Periodenquerschnitten konstruieren. Die näheren Einzelheiten sind in Fig. 1 angegeben. Die ganz im ersten Blatte verlaufenden Periodenquerschnitte erzeugen die Perioden p_1, q_2, p_3 und die teilweise im zweiten Blatt verlaufenden die Perioden q_1, p_2, q_3. Hierbei ist die Überschreitung von dem mit + bezeichneten Rande aus vorzunehmen. Es besteht

(5) $$q_2 = \oint_{(-z_1,-z_2)} = \pm i \oint_{(z_1,z_2)} = \mp i\, p_1,$$

und zwar ist der Umlauf gemäß (4) zu übertragen. Ferner wird

(6) $$p_2 = \oint_{(-z_2,\, z_3)} = \pm i \oint_{(z_2,z_3)} = \pm i\, q_1 .$$

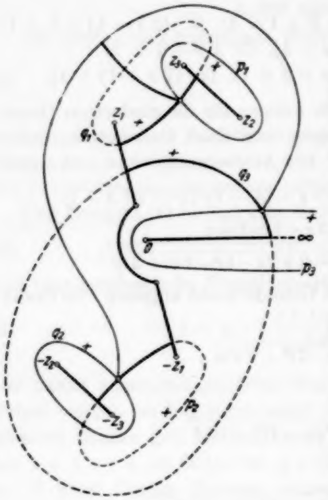

Fig. 1

Zur Überprüfung der Vorzeichen hat man

(7) $$\oint_{(-z_1,-z_3)} = p_2 + q_2 = \pm i \oint_{(z_1,z_3)} = \pm i(q_1 - p_1).$$

Weiterhin besteht

(8) $$\oint_{(0,-\infty)} = 2\,p_3 - q_3 = \pm i \oint_{(0,\infty)} = \pm i\, q_3,$$

(9) $$q_3 = (1 \mp i)\, p_3 .$$

Zur Überprüfung des Vorzeichens hat man etwa

(10) $$\oint_{(0,-z_1)} = p_3 + p_2 = \pm i \oint_{(0,z_1)} = \pm i(q_1 + q_3 - p_3).$$

Als Periodenschema für die Integrale (3) erhält man daher

(11) $$p_1, p_2, p_3;\ \mp i\, p_2, \mp i\, p_1, (1 \mp i)\, p_3 .$$

---

[3]) Die endgültige Wahl des Vorzeichens hängt von der Erfüllung der Ungleichheit (16) ab.

Der letzte Periodenwert läßt sich vereinfachen, indem man den dritten Periodenwert p_3 zum Abzug bringt. Als volles Periodenschema für die Integrale kann man daher ansetzen:

$$\begin{array}{lllllll} & \nu = 0 & p_1, p_2, p_3; & i\,p_2, & i\,p_1, & i\,p_3 \\ (12) & \nu = 1 & t_1,\ t_2,\ t_3; & -i\,t_2, & -i\,t_1, & -i\,t_3 \\ & \nu = 2 & p_1'\,p_2', p_3'; & i\,p_2', & i\,p_1', & i\,p_3'. \end{array}$$

Die Relation unter den Perioden des ersten und dritten Integrals ist identisch erfüllt. Aus den anderen Kombinationen erhält man

$$(13) \qquad \begin{aligned} t_1 p_2 + t_2 p_1 + t_3 p_3 &= 0\,, \\ t_1 p_2' + t_2 p_1' + t_3 p_3' &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$(14) \qquad t_1 : t_2 : t_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_1' & p_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_3' & p_2' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ p_2' & p_1' \end{vmatrix}.$$

Die Integrale für $\nu = 0$ u. 2 lassen sich durch lineare Kombinationen ersetzen, die durch eine transzendente Normierung gegeben sind, indem Periodenwerte verschwinden. Unter Verwendung von (14) gelangt man so zu einem *Schema, das nur von $t_1 : t_2 : t_3$ abhängt*:

$$\begin{array}{lllllll} & 0, & t_3, & -t_1; & i\,t_3, & 0, & -i\,t_1 \\ (15) & t_3, & 0, & -t_2; & 0, & i\,t_3, & -i\,t_2 \\ & t_1, & t_2, & t_3; & -i\,t_2, & -i\,t_1, & -i\,t_3. \end{array}$$

Für die Perioden $\omega_1 \ldots \omega_6$ eines beliebigen Integrals erster Gattung und ihre konjugierten Werte $\overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_6$ gilt

$$(16) \qquad \tfrac{1}{2} \sum i\,(\omega_\mu\, \overline{\omega}_{3+\mu} - \overline{\omega}_\mu\, \omega_{3+\mu}) > 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3).$$

Aus dieser Bedingung läßt sich der Geltungsbereich der automorphen Funktion ableiten, indem die Perioden der normierten Integrale in (15) mit beliebigen komplexen Größen x, y, z multipliziert und die Summen der Elemente in den Spalten in (16) eingetragen werden. Dies ergibt eine ternäre Hermitesche Form in x, y, z

$$(17) \qquad (x\,t_1 + y\,t_2)\,(\bar{x}\,\bar{t}_1 + \bar{y}\,\bar{t}_2) + t_3\bar{t}_3(x\,\bar{y} + \bar{x}\,y) - H\,z\,\bar{z},$$

wobei H eine ternäre Hermitesche Form in t_1, t_2, t_3 bedeutet:

$$(18) \qquad H = t_1\bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2 + t_3\bar{t}_3.$$

Die Diskriminante von (17) berechnet sich zu $t_3\bar{t}_3 \cdot H^2$, so daß (17) für

$$(19) \qquad H < 0$$

eine positiv-definite Form wird und die Bedingung (16) stets erfüllt ist. Daraus folgt der Satz, daß (19) *den Geltungsbereich der automorphen Funktion bezeichnet.*

Bei unimodularen Transformationen der Perioden, die das Schema (15) in sich transformieren, bleibt die Bedingung (19) für alle Funktionswerte erhalten. Daraus ergibt sich die Folgerung, daß diese sich in Automorphismen

von H umsetzen. Beachtet man ferner, daß in den Relationen (13) die Ersetzung der p durch die entsprechenden $\bar{t}$ die Form H ergibt, so folgt weiterhin, daß die p in (12) die konjugierten Substitutionen durchlaufen, wenn die t den Automorphismen von H unterworfen werden, und die Umschreibung der ternären Substitutionen, die H in sich transformieren, zu Substitutionen in sechs Variabeln t und $-i\,t$ mit reellen Koeffizienten ergeben die gesuchten Riemannschen Matrizen, ein Sachverhalt, der nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Nur das Integral (3), $\nu = 1$ hat die Eigenschaft, daß die Perioden sämtlicher Integrale durch die Perioden dieses einen ausgedrückt werden können. Dasselbe werde als Hauptintegral bezeichnet, da es zur Definition der automorphen Funktion in zwei Veränderlichen vollständig ausreicht. Die Darstellung an dem algebraischen Gebilde in Einl. (1) ist gegeben durch:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a x^3 + b x^2 + c x + d}\,\sqrt[4]{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}\,. \tag{20}$$

3. Einfache Reduzierbarkeit

Die quadratische Reduktion auf ein lemniskatisches Integral wurde in Einl. (2), (3) algebraisch behandelt. Zur Untersuchung im transzendenten Raum geben wir dem hyperelliptischen Gebilde von Abschn. 2, (2) die Gestalt

$$\sqrt{z(z^2+1)\,(a z^4 + b' z^2 + a)}, \tag{1}$$

das nicht nur durch die Substitution von Abschn. 2, (4), sondern auch durch

$$z = \frac{1}{z'} \tag{2}$$

in sich transformiert wird. Das Hauptintegral geht bei (2) bis auf das Vorzeichen in sich über. Die Nebenintegrale ($\nu = 0, 2$) werden miteinander vertauscht und wechseln das Vorzeichen. Die Differenz als reduzierbares Integral geht jedoch genau in sich über. Auf der Riemannschen Fläche verteilen sich bei der Annahme $z_3 = i$ die Punkte $z_2 = -z_1^{-1}$, z_1, $-z_2$, $-z_1$ auf die vier Quadranten. Die in Abb. 1 konstruierte Fläche verändert sich hierbei nicht wesentlich, und es ist

$$\oint_{(z_1,\, i)} = p_1 = \oint_{(-z_2,\, -i)} = \pm p_2\,. \tag{3a}$$

$$\oint_{(-z_1,\, 0)} = p_2 + p_3 = \oint_{(z_2,\, \infty)} = \pm (p_1 - p_3)\,. \tag{3b}$$

Für das Hauptintegral ist in beiden Fällen das negative Vorzeichen zu wählen, da die Gleichungen in Übereinstimmung zu bringen sind. Es ist daher

$$t_1 - t_2 = 0\,. \tag{4}$$

Für das reduzierbare Integral gelten alsdann die entgegengesetzten Vorzeichen, und man erhält die Periodenwerte

$$1,\ 1,\ 0;\ i,\ i,\ 0\,. \tag{5}$$

Die Einsetzung der Werte in die Ungleichheit von Abschn. 2, (16) ergibt links den Reduktionsgrad zwei.

Bei der allgemeinen Überlegung ist eine lineare Relation

$$c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 = 0 \tag{6}$$

anzusetzen, in der c_1, c_2, c_3 ganze Zahlen aus $K(i)$ ohne gemeinsamen Teiler bedeuten. Werden die Perioden der Nebenintegrale in Abschn. 2, (15) mit c_1 bzw. c_2 multipliziert und die lineare Kombination durch Addition gebildet, so ergibt die Anwendung von (6) unter Fortlassung des Faktors t_3 die Perioden

$$c_2, c_1, c_3;\ i\,c_1, i\,c_2, i\,c_3. \tag{7}$$

Aus der Ungleichheit von Abschn. 2, (16) ergibt sich die Einschränkung

$$c_1 \bar{c}_2 + c_2 \bar{c}_1 + c_3 \bar{c}_3 > 0, \tag{8}$$

so daß im Geltungsbereich der Funktion, der in Abschn. 2, (19) zu $H(t) < 0$ bestimmt war, nur Werte von c_1, c_2, c_3 zulässig sind, für die $H(c) > 0$ ist. Unter dieser Einschränkung hat das Bestehen einer Relation (6) zur Folge, daß in der linearen Schar der Nebenintegrale des algebraischen Gebildes vom Geschlechte $g = 3$ sich ein lemniskatisches Integral befindet. Die positive ganze Zahl $H(c)$ bedeutet nichts anderes als den Grad der reduzierenden rationalen Funktion[4]). Bei unimodularen Periodentransformationen bleibt dieser Wert konstant. Denn substituiert man in (6) $\bar{t}_2$, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_3$ anstelle von c_1, c_2, c_3, so erhält man die Invariante H, so daß c_2, c_1, c_3 die konjugierten Automorphismen von H durchlaufen. *Die transzendente Theorie der einfachen Reduzierbarkeit ist daher auf die Aufgabe der Darstellung einer positiven natürlichen ganzen Zahl durch die Form H zurückgeführt.*

Bei vorgegebenen c gibt es eine Untergruppe der Automorphismengruppe von H, die die lineare Relation (6) in sich transformiert, die Gruppe der automorphen Funktion einer Veränderlichen, die durch das Parametersystem der rationalen reduzierenden Funktion definiert wird. Um diese Untergruppe zu charakterisieren, lösen wir (6) arithmetisch durch

$$\begin{aligned} t_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y, & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 &= c_1 \\ t_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y, & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 &= c_2 \\ t_3 &= \alpha_3 x + \beta_3 y, & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &= c_3 \end{aligned} \tag{9}$$

auf, wobei die α und β ganze Zahlen aus $K(i)$ bedeuten, und erhalten durch Einsetzen der Werte in die Form $H(t)$ eine binäre Form

$$\begin{gathered} A\,x\bar{x} + B\,x\bar{y} + \bar{B}\,\bar{x}y + C\,y\bar{y}, \\ A = H(\alpha),\ B = \alpha_1\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_1 + \alpha_3\bar{\beta}_3,\ C = H(\beta) \end{gathered} \tag{10}$$

mit der Diskriminante

$$D = B\bar{B} - A\,C = H(c) = n. \tag{11}$$

Daraus folgt der Satz:

Die Gruppe der automorphen Funktion, die durch das Parametersystem einer reduzierenden rationalen Funktion n-ten Grades nach Abschn. 1 definiert wird,

[4]) Krazer: Thetafunktionen. Leipzig: Teubner 1903, Kap. 11, Satz IV, S. 476.

ist Untergruppe der reproduzierenden Gruppe einer indefiniten binären Hermiteschen Form mit der Diskriminante n.

Sobald nachgewiesen ist, daß die Untergruppe durch Kongruenzen definiert ist, folgt daraus *die Eigenschaft der Transformierbarkeit der automorphen Funktionen*. Weiterhin ergibt der durch (9) indizierte Zusammenhang mit der Darstellung binärer Hermitescher Formen durch H den Satz über die Anzahl der Darstellungen der positiven ganzen Zahl n durch H (Abschn. 17).

4. Die Automorphismengruppe von H

Die Auffindung der unimodularen Transformationen des Periodenschemas wurde in Abschn. 2 auf die der Automorphismen der Hermiteschen Form H zurückgeführt, die nunmehr in den Veränderlichen u, v, w angesetzt wird:

$$H = u\bar v + \bar u v + w\bar w . \tag{1}$$

Ersichtlich geht H durch die Substitutionen

$$V_1;\ u = v',\ v = u' \qquad (V_1^2 = 1) \tag{2}$$

$$V_2(m);\ u = u' + i\,m\,v \qquad (m \text{ ganz rational}) \tag{3}$$

in sich über. V_1 und V_2 erzeugen eine erweiterte elliptische Modulgruppe. Denn es ist

$$(V_1 V_2(1))^3 = V_0;\ u = i\,u',\ v = i\,v' \tag{4}$$

und $V_1 V_2(1)$ von der Periode 12. Es ist aber V_0 mit sämtlichen Substitutionen der Modulgruppe vertauschbar. Zu einer dritten Substitution gelangt man, wenn in (1)

$$w = w' + c\,v \tag{5}$$

eingesetzt wird:

$$u\bar v + v\bar u + (w + c\,v)(\bar w + \bar c\,\bar v). \tag{6}$$

Aus der Umformung

$$(u + \tfrac12 c\,\bar c\,v + \bar c\,w)\,\bar v + \overline{(\text{———})}\,v + w\,\bar w \tag{7}$$

und (5) ergibt sich, daß die Form (1) reproduziert wird durch

$$V_3(c),\quad \begin{array}{l} u = u' - \tfrac12 c\,\bar c\,v' - \bar c\,w' \\ v = v' \\ w = c\,v' + w' . \end{array} \tag{8}$$

Die Koeffizienten werden ganzzahlig, wenn für c eine ganze durch $1 + i$ teilbare Zahl aus $K(i)$ eingesetzt wird. V_3 ist ersichtlich mit V_2 in (3) vertauschbar. Ferner gilt

$$V_0^{-1} V_3(c)\,V_0 = V_3(i\,c) . \tag{9}$$

Die Wiederholung der Transformation ergibt

$$V_0^2\,V_2(c)\,V_0^2 = V_3(-c) = V_3^{-1}(c) , \tag{10}$$

so daß $V_3(c)\, V_0^2$ von der Periode zwei ist. Aus der Additionsformel

$$V_3(c_1+c_2) = V_3(c_1)\, V_3(c_2)\, V_2\left[\tfrac{i}{2}(c_1\bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2)\right] \tag{11}$$

folgt alsdann, daß jedes $V_3(c)$ aus V_0, $V_2(1)$, $V_3(1+i)$ zusammengesetzt ist.

Daß durch V_1, $V_2(1)$, $V_3(1+i)$ die Gruppe vollständig erzeugt wird, ist aus der Darstellungstheorie in Abschn. 5 zu beweisen. Die Gruppe ist zwar erweiterungsfähig vermöge einer Substitution zweiter Art

$$W;\ u = \overline{u}',\ v = \overline{v}',\ w = \overline{w}', \tag{12}$$

indessen ist diese geometrisch nicht mehr als Spiegelung zu deuten und das elementare Verfahren, den Diskontinuitätsbereich durch Aufstellung von Spiegelungen zu bestimmen, im Gebiete zweier Veränderlicher nicht anwendbar.

Die gefundenen Substitutionen erweisen sich als Transformationen des Periodenschemas von Abschn. 2, (15) sobald sie in Riemannsche Matrizen umgesetzt werden. Für $V_3(1+i)$ erhält man die Determinante

$$\begin{array}{r|rrrrrr|} & u' & v' & w' & -i\,v' & -i\,u' & -i\,w' \\ u & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ v & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -i\,v & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i\,u & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -i\,w & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\ , \tag{13}$$

die eine Riemannsche Matrix darstellt. Das Hauptintegral von Abschn. 2, (20) wird stets in sich transformiert, während bei den Nebenintegralen lineare Kombinationen gebildet werden müssen, um das Schema auf dieselbe Normierung zu bringen.

5. Darstellung positiver Zahlen, Ergänzung zu Abschn. 4, Entartungen

Abschn. 3 führte auf die Aufgabe, eine positive ganze Zahl n durch die Hermitesche Form H darzustellen. Wir setzen

$$n = a\,\bar{b} + \bar{a}\,b + c\,\bar{c} \tag{1}$$

und schreiben für die lineare Relation in Abschn. 3, (6)

$$a\,u + b\,v + c\,w = 0. \tag{2}$$

Ferner sei der Winkel, den die komplexen Größen a und b miteinander bilden, mit φ bezeichnet, so daß besteht:

$$a\,\bar{b} = |a\,b|\, e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Alsdann lassen sich aus den Substitutionen V_1, V_2, V_3 von Abschn. 4 folgende Reduktionen ableiten. Aus dem Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe, die durch V_1, V_2 erzeugt wird, gewinnt man die Beschränkungen

$$|b| \leqq |a|,\quad |a\,\bar{b} - \bar{a}\,b| \leqq |b|^2. \tag{4}$$

Die zweite Ungleichheit läßt sich nach (3) auch schreiben:

$$2\,|\sin\varphi|\,|a| \leqq |b|\,, \tag{5}$$

und vermöge der ersten folgt

$$2\,|\sin\varphi| \leqq 1\,. \tag{6}$$

Somit kann φ nur Werte von Null bis $\pm\frac{\pi}{6}$ oder von π bis $\pm\frac{5\pi}{6}$ annehmen, je nachdem die reelle Zahl $a\,\bar{b} + \bar{a}\,b$ positiv oder negativ ausfällt. Im zweiten Falle läßt sich eine weitere Reduktion vermittels V_3 ausführen. Dazu ist (1) in

$$|c|^2 - n = 2\cos(\pi - \varphi)\,|a\,b| \tag{7}$$

umzuformen. Indem $2\cos(\pi - \varphi)$ stets größer als eins ist, folgt vermöge der ersten Ungleichheit in (4)

$$|b| < |c|\,. \tag{8}$$

Die Substitution $V_3(1 + i)$ in Abschn. 4, (8) liefert alsdann

$$\begin{aligned} b' &= b \\ c' &= (1 + i)\,b + c. \end{aligned} \tag{9}$$

Indem für c auch $i\,c$, $-c$, $-i\,c$ gesetzt werden kann, läßt sich der Winkel zwischen $(1 + i)\,b$ und c im allgemeinen unter $\frac{\pi}{4}$ herabdrücken. In Fig. 2 hat der Winkel den maximalen Wert $\frac{\pi}{4}$ und es ist $|c'| < |c|$, wenn (8) erfüllt ist. Das Verfahren läßt sich fortsetzen, bis $|c| \leqq |b|$ geworden ist. Nunmehr läßt sich die Reduktion nach (4) wiederholen und, falls noch $|c|^2 > n$ ist, auch die Reduktion durch (9). Die Fortsetzung des Verfahrens führt schließlich auf eine Darstellung, für die $|c|^2 \leqq n$ ist. Von den Darstellungen, in denen $a\,\bar{b} + \bar{a}\,b$ positiv ist, gibt es zufolge (4) nur eine endliche Anzahl. Ist aber $n = c\,\bar{c}$, so wird $a : b$ rein-imaginär und liegt auf dem Grenzkreis der Modulgruppe. Für diesen Fall kann man $b = 0$ setzen, und die Substitution $V_3(1 + i)$ ergibt für a die Reduktionsformel

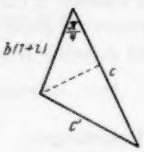

Fig. 2. $|c'| < |c|$

$$\begin{aligned} a' &= a - (1 - i)\,c \\ c' &= c. \end{aligned} \tag{10}$$

Wie in (9) schließt man auf ein $|a| \leqq |c|$, wodurch auch die Anzahl dieser Darstellungen beschränkt wird.

Die Anwendung des Reduktionsverfahrens auf den Fall $n = 0$ gibt den noch fehlenden Beweis, *daß die ternäre Gruppe durch V_1, $V_2(1)$, $V_3(1 + i)$ vollständig erzeugt wird*. Da nur eine durch $a = 1$, $b = c = 0$ vertretene Klasse vorhanden ist, läßt sich jede Relation (2) auf $u = 0$ und durch V_1 auf $v = 0$ transformieren. Die $v = 0$ reproduzierende Untergruppe wird aber durch V_0, V_2, V_3 vollständig erzeugt. Der Beweis läßt sich durch Verallgemeinerung des Ansatzes (5) in Abschn. 4 elementar führen. Bedeutet V eine beliebige

Substitution der reproduzierenden Gruppe von H, so kann man $v = 0$ durch V transformieren und die erhaltene Relation durch das Reduktionsverfahren mittels V_1, V_2, V_3 wiederum auf $v = 0$ transformieren, so daß V sich durch V_1, V_2, V_3 ausdrücken läßt.

Bei $n > 0$ hat die Aufgabe, die Äquivalenz der reduzierten Darstellungen bzw. Relationen (2) zu beweisen, ihre naturgemäßen Schwierigkeiten. Die algebraische Analyse in Abschn. 1 zeigt, daß bei $n \equiv 1 \pmod{4}$ wenigstens zwei Klassen auftreten. Eine Einteilung ist dadurch gegeben, daß ein gemeinsamer Teiler $1 + i$ von a und b bei Anwendung von V_1, V_2, V_3 in den Darstellungen erhalten bleibt. Insbesondere gibt es bei $n = 1$ zwei Klassen. Der Reduktionsprozeß führt in beiden Fällen auf nur eine Relation, nämlich:

(11) $$w = 0\,,$$

(12) $$u + w = 0\,.$$

Im algebraischen Raum stellt $n = 1$ *die Entartungen* des algebraischen Gebildes vom Geschlechte $g = 3$ dar. (11) bleibt bei der durch V_1, V_2 erzeugten Modulgruppe unverändert. Diesem Fall ist daher ein erststufiges elliptisches Gebilde zuzuordnen, das durch die Entartung $\alpha = \beta = 0$ in der allgemeinen Gestalt des Gebildes nach Einl. 1 gegeben ist. Die Gruppe von (12), deren Herleitung im folgenden Abschnitt nachgeholt wird, ist durch die Dreiecksfunktion mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0 gegeben, und es ist ihr die Entartung auf ein Gebilde vom Geschlechte $g = 2$ zugeordnet, die durch das Verschwinden der Koeffizienten in den höchsten Potenzen ($a = 0$, $\alpha = 0$) erhalten wird.

6. Dreiecksgruppen

Bei vorgegebener Zahl n ist die Äquivalenz der reduzierten linearen Relationen untereinander leicht nachzuweisen, solange ihre Anzahl klein ist. Zudem läßt sich die Konstruktion des Diskontinuitätsbereiches der zugehörigen Grenzkreisgruppe in einfachster Weise ausführen, da die einzelnen Relationen Erzeugende der Gruppe in Evidenz setzen. Einige Beispiele werden dies erläutern. Verschwindet der erste Koeffizient a in der Relation

(1) $$a\,u + b\,v + c\,w = 0,$$

so bleibt diese bei Anwendung der parabolischen Substitution V_2 ungeändert. Die Grenzkreisgruppe ist mit der Modulgruppe commensurabel, und es treten außer dem lemniskatischen Integral noch andere elliptische Integrale auf. Verschwindet der letzte Koeffizient c, so läßt die Substitution V_0 von der Periode 4 die Relation ungeändert. Das gleiche gilt für V_1 von der Periode 2, wenn $a = b$ ist. Bei $a = c$ ist die Substitution von der Periode 2

(2) $$V_3(2)\,V_0^2, \qquad \begin{aligned} u + w &= u' + w' \\ v &= v' \\ v - w &= -(v' - w') \end{aligned}$$

heranzuziehen. Sobald die letzte Gleichung durch

$$(3) \qquad v - w = i(v' - w')$$

ersetzt wird, resultiert eine Verdopplung des Periodengrades, und zwar stellt sich die Substitution durch $V_2(1)\, V_3(1-i)\, V_0^{-1}$ dar. Bei der Substitution von der Periode zwei

$$(4) \qquad V_3(1+i)\, V_0^2, \qquad \begin{aligned} (1+i)\, u + w &= (1+i)\, u' + w' \\ v &= v' \\ v - (1-i)\, w &= -[v' - (1-i)\, w'] \end{aligned}$$

führt das Verfahren nicht mehr auf eine unimodulare Substitution.

Bei dem zweiten Fall der Entartung in Abschn. 5, (12)

$$(5) \qquad u + w = 0, \quad n = 1$$

ergibt sich die binäre Gruppe unmittelbar daraus, daß (2) und

$$(6) \qquad V_1\, V_2(1)\, V_1, \quad v = v' + i\, u$$

die Relation ungeändert lassen. Setzt man $w = -u$, $v/u = \omega$, so geht (2) bzw. (3) über in

$$(7) \qquad \frac{\omega + 1}{\omega} = i\, \frac{\omega' + 1}{\omega'} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\omega'}{(i-1)\,\omega' + i}$$

und (6) in

$$(8) \qquad \omega = \omega' + i.$$

Die Zusammensetzung ergibt eine Substitution von der Periode zwei, so daß die *Gruppe des Dreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$ *erzeugt wird*. Die Substitution W in Abschn. 4, (12) liefert die Erweiterung $\omega = \overline{\omega}'$ durch Spiegelungen.

Die ternäre Gruppe hat dieselbe Eigenschaft wie die Modulgruppe in Abschn. 4, (4), mit einer zyklischen Gruppe vertauschbar zu sein. Wird (2) bzw. (3) durch $V_1\, V_0^2$ transformiert, indem die u und v unter Vorzeichenwechsel vertauscht werden, so erhält man eine Substitution von der Periode 4, die (5) ungeändert läßt, aber beim Übergang zur binären Gruppe in die Identität übergeht. Die ternäre Gruppe ist daher umfassender, und man zeigt leicht, daß diese Substitution mit (3) und (6), also mit der gesamten Dreiecksgruppe vertauschbar ist[5]).

Eine mit der ternären Gruppe vertauschbare zyklische Gruppe tritt auch noch im Falle der quadratischen Reduktion auf. An beiden reduzierten Relationen

$$\begin{aligned} &(9) & v &= (1-i)\, w \\ &(10) & u + v &= 0 \end{aligned} \Bigg\} \; n = 2$$

wird dies ersichtlich. (9) wird durch die vertauschbaren Substitutionen V_2 und (4) nicht geändert, (10) durch die vertauschbaren Substitutionen V_1 und V_0. Bei (9) hat (4) und bei (10) $V_1\, V_0^2$ die Eigenschaft, beim Übergang zur binären

---

[5]) Eine unmittelbare Einsicht erhält man durch Übergang in die orthogonale Form nach Abschn. 13, (14).

Gruppe sich auf die Identität zu reduzieren. Da nun (10) durch $V_3(1+i)\,V_1$ in (9) transformiert wird, muß unter den Elementen der ternären Gruppe die Relation

$$V_1 V_0^2 = V_3(1+i)\,V_1 \cdot (V_3(1+i)\,V_0^2) \cdot V_1 V_3(-1-i) \tag{11}$$

bestehen, die nach Anwendung einiger Beziehungen aus Abschn. 4 sich auf $(V_1 V_3(1+i))^3 = 1$ reduziert [Abschn. 13, (9)].

Die Herleitung der binären Gruppe ergibt sich folgendermaßen. Um (9) zu erfüllen, setzen wir $u = \omega$, $v = 1 - i$, $w = 1$ und V_2 stellt sich dar:

$$\omega = \omega' + 1 + i. \tag{12}$$

Desgleichen setzen wir zufolge (10) $u = -1$, $v = 1$, $w = \tau$, und V_0^{-1} geht über in

$$\tau = i\,\tau'. \tag{13}$$

Die Beziehung zwischen ω und τ ergibt sich durch entsprechende Einsetzung der Werte in die transformierende Substitution $V_3(1+i)\,V_1$

$$\tau = 1 + i + \frac{1}{\omega}. \tag{14}$$

Nunmehr ist (13) durch (14) zu transformieren:

$$\omega = \frac{\omega'}{-2\omega' + i}. \tag{15}$$

Die Zusammensetzung von (12) und (15) gibt wiederum eine Substitution von der Periode 4, so daß *die Gruppe des Dreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0$ vorliegt, ein Resultat, das bereits aus den Integralen in Einl. (4) gefolgert wurde. Aus (7) und (8) gehen die Substitutionen durch

$$\omega = (1+i)\,\omega' \tag{16}$$

hervor. Alsdann erhält (8) die Determinante $2i$, und nur die Hälfte aller Substitutionen des Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$ fällt unimodular aus. Aus (11) ist noch zu folgern:

Die Substitution $V_3(1+i)\,V_0^2$ von der Periode 2 ist mit der gesamten ternären Gruppe für $n = 2$ vertauschbar, da sie mit den beiden Erzeugenden vertauschbar ist.

7. Viereeksgruppen

Der folgende Reduktionsgrad $n = 3$ beansprucht schon deswegen Interesse, weil die Gruppe nicht mehr mit der Modulgruppe commensurabel ist. Nur eine reduzierte Relation wird erhalten:

$$u + v + w = 0, \qquad n = 3. \tag{1}$$

Diese bleibt bei V_1 ungeändert und bei der Substitution von Abschn. 6, (2) bzw. (3). Da (1) reelle Koeffizienten hat, ist auch die Erweiterung W heranzuziehen. Wenn

$$w = -u - v, \quad u : v = \omega \tag{2}$$

gesetzt wird, ergeben sich daraus die Spiegelungen

(3) $$\omega' = \overline{\omega}, \quad \omega' = \frac{1}{\overline{\omega}}, \quad \omega' = i\,\overline{\omega} - 2\,(1 - i)$$

und bei Aufteilung von ω in den reellen und imaginären Anteil ξ und η die Koinzidenzen

(4) $$\eta = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi - \eta + 2 = 0\,.$$

Der Grenzkreis, der die Symmetrielinien senkrecht durchschneidet, hat den Schnittpunkt der Geraden zum Mittelpunkt und den Radius $\sqrt{3}$ (gestrichelter Kreis in Fig. 3). Die Symmetrielinien bilden kein geschlossenes Polygon. Indem aber (1) durch

(5) $$v = v' + i\,u$$

transformiert wird, gelangt man zu einer Relation, die nach Abschn. 6, (4) bei $V_3(1 + i)\,V_6^2$ ungeändert bleibt. Daraus leitet man eine vierte unimodulare Spiegelung

(6) $$\overline{\omega}' = \frac{(1 + 2\,i)\,\omega + 2}{-2\,\omega - 1 + 2\,i}$$

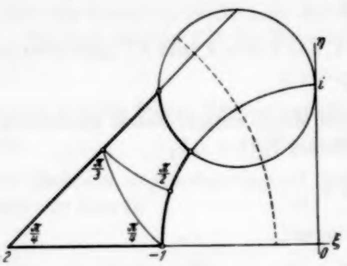

Fig. 3. Polygon für $n = 3$

ab, deren Symmetriekreis durch

(7) $$\xi(\xi + 1) + (\eta - 1)^2 = 0$$

gegeben ist. Da die Ordinaten in $\xi = 0, -1$ Tangenten sind, erkennt man sofort, daß *ein Viereck mit den Winkeln* $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ *vorliegt*.

Die Gruppe ist erweiterungsfähig durch Substitutionen, deren Determinante die Faktoren 2 und 3 enthält. Zu diesen Erweiterungen gelangt man durch Verdoppelung des Periodengrades von $\omega' = 1/\omega$. Dies führt auf die Spiegelung mit der Determinante 2

(8) $$\overline{\omega}' = \frac{\omega + i}{i\,\omega + 1}$$

und den Symmetriekreis

(9) $$\xi^2 + \eta^2 - 2\,\eta - 1 = 0,$$

der die mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ ansteigende Gerade unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ trifft (Fig. 3). Über den Schnittpunkten errichtet man den Halbkreis

(10) $$\xi^2 + \eta^2 + \xi - 3\,\eta + 1 = 0,$$

der die Spiegelung mit der Determinante $-3\,i$

(11) $$\overline{\omega}' = \frac{(1 - 2\,i)\,\omega - (1 + i)}{(1 + i)\,\omega + (2 - i)}$$

erzeugt und den Einheitskreis senkrecht trifft. Durch Zusammensetzung von (8) bzw. (11) mit den angrenzenden Spiegelungen in (3) ergibt sich der Beweis und das Resultat:

Das aus $n = 3$ *abgeleitete Viereck* $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ *wird durch* (11) *in zwei Vierecke* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, *durch* (8) *in drei Dreiecke* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ *und durch* (8) *und* (11) *in sechs Dreiecke* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ *aufgeteilt.*

Im Falle $n = 4$ gibt es drei reduzierte Relationen

(12) $\quad u = 2\,w,$

(13) $\quad u + 2\,v = 0,$

(14) $\quad u + v = (1 + i)\,w.$

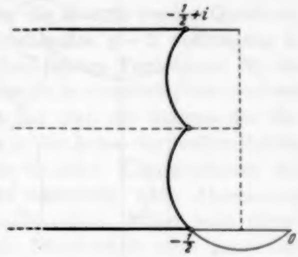

Fig. 4. Polygon für $n = 4$

Es werden (13) und (14) durch $V_3(2)$ bzw. $V_3(1 + i)\ V_2(2)$ in (12) transformiert. (12) ist bei $u = 2$, $v = \omega$, $w = 1$ erfüllt und $v' = v + i\,u$ geht über in die Substitution

(15) $\quad \omega' = \omega + 2\,i,$

die nunmehr unimodular aufteilbar ist. Zur Ermittlung des Diskontinuitätsbereiches genügt es daher, die Erzeugende V_0 von (13) heranzuziehen. Daraus ergibt sich die Spiegelung

(16) $$(2 - 2\,i)\,\omega'\,\overline{\omega} + \omega' - i\,\overline{\omega} = 0$$

mit dem Symmetriekreis

(17) $$2\,(\xi^2 + \eta^2) + \xi - \eta = 0$$

und nach Fig. 4 *das aus zwei Dreiecken* $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ *zusammengesetzte Viereck* $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Bei $n = 5$ hat man nach Abschn. 1 zwei Fälle. Die reduzierten Relationen des ersten Falles sind

(18) $$(1 + i)\,(u + v) + w = 0,$$

(19) $$(1 + i)\,u + (1 \pm 2\,i)\,w = 0.$$

Durch $V_3(-1 + i)\ V_2(-1)$ und $V_3(1 - i)\ V_2(1)$ wird (18) in die Relationen von (19) transformiert. (18) bleibt bei V_1 ungeändert und nach Abschn. 6, (4) auch bei $V_3(1 + i)\ V_0^2$. Die Erweiterung W läßt sich nicht verwenden, da die Koeffizienten in (18) und (19) komplexe Werte haben. Die Substitution

(20) $$u = \overline{u}', \quad v = \overline{v}', \quad w = i\,\overline{w}'$$

führt aber (18) in sich über und vertauscht die beiden Gleichungen (19) miteinander. Wird daher (18) zugrunde gelegt und $u : v = \omega$ gesetzt, so erhält man die Spiegelungen

(21) $$\omega' = \overline{\omega}, \quad \omega' = \frac{1}{\overline{\omega}}, \quad \omega' = -\overline{\omega} - 3,$$

aus denen sich der Grenzkreis mit dem Mittelpunkt $\omega = -1{,}5$ und dem Radius $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$ bestimmt (Fig. 5). Das Polygon ist noch nicht geschlossen und

daher eine der parabolischen Substitutionen von (19) heranzuziehen, die sich zu

(22) $$\omega' = \frac{(1+2i)\omega + 4 + 2i}{(1-2i)\omega - 1 - 4i}$$

berechnet und deren Fixpunkt $\omega = -1 + i$ auf dem Grenzkreis liegen muß. (22) geht in sich über, wenn auf ω' und ω die zweite bzw. dritte Spiegelung von (21) ausgeübt wird. Dieselbe Eigenschaft zeigt die Spiegelung von der Determinante -5

(23) $$\omega' = \frac{\overline{\omega} + 4}{\overline{\omega} - 1},$$

so daß die Zusammensetzung von (22) und (23) Spiegelungen ergibt, die das Polygon abschließen (Fig. 5). Wird das Polygon an der Achse des Reellen gespiegelt, so geht *der Bereich des Transformationsmodul fünften Grades der elliptischen Funktionen* hervor. Indessen ist der wesentliche Umstand zu beachten, daß die reellen Werte dieses Moduls bei der Herleitung aus der Transformationstheorie auf den Symmetriekreis von (23) und die angrenzenden Randlinien abgebildet werden, die reellen Werte des Parameters der reduzierenden Funktion jedoch auf die Achse des Reellen und die angrenzenden Randlinien (Abschn. 15). Das Viereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$ gehört der durch Spiegelungen erweiterten Gruppe *der symmetrischen Funktionen aus den ineinander transformierbaren Moduln*[6]) an und das dem Grenzkreis einbeschriebene Viereck mit verschwindenden Winkeln der entsprechenden Gruppe *des Periodenfünfteilungsmoduls*.

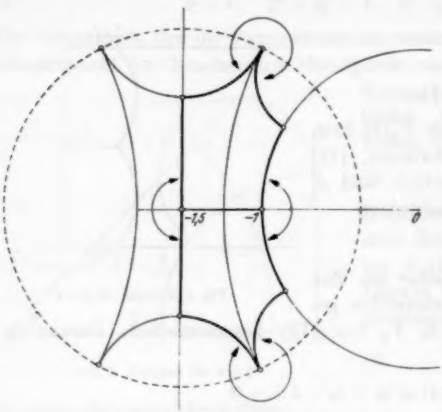

Fig. 5. Polygon für $n = 5$, erster Fall

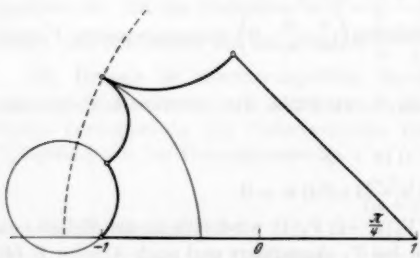

Fig. 6. Polygon für $n = 5$, zweiter Fall

Ähnliche Verhältnisse treten im zweiten Falle $n = 5$ auf. Die reduzierten Relationen sind

(24) $$u + 2v + w = 0,$$

(25) $$u + (2 \pm i)\, w = 0.$$

[6]) R. Fricke: Elliptische Funktionen, Bd. 2, S. 390, Abb. 15.

Wird (24) zugrunde gelegt und $w : v = \omega$ gesetzt, so geht Fig. 6 hervor. Das Polygon ist in derselben Weise wie in Fig. 5 aus *vier Vierecken* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ *zusammengesetzt*, insbesondere sind Grenzkreis und Halbierungskreis in vertauschter Bedeutung dieselben wie in Fig. 5.

8. Die Reduktionsgrade in den commensurablen Fällen

Ist der Reduktionsgrad n ein Quadrat oder die Summe zweier Quadrate, so zerfällt das algebraische Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ vollständig in elliptische Integrale. Um die Grade der reduzierenden Funktionen für die von einem Modul abhängigen elliptischen Integrale zu ermitteln, hat man auf das Periodenschema zurückzugehen. Vorerst hat man die Gruppe des Moduls so zu transformieren, daß der Grenzkreis in die Achse der reellen Zahlen übergeht. Bei dieser Normierung haben die linearen Kombinationen des Schemas, welche die reduzierbaren Integrale darstellen, nach Abtrennung eines Faktors nur reelle Zahlkoeffizienten aufzuweisen. Führt man diesen Ansatz im einzelnen durch, so ergibt sich die Möglichkeit einer generellen Lösung, wenn man von der Relation

$$(1 + i)\, u = c\, w \tag{1}$$

ausgeht, in der die ganze Zahl c aus $K(i)$ keiner Einschränkung unterliegt, also auch den Teiler $1 + i$ haben darf.

Zur Lösung setzt man in das Periodenschema (15) von Abschn. 2

$$t_1 = u = c, \quad t_2 = (\omega - i)/i\,\bar{c}, \quad t_3 = w = 1 + i \tag{2}$$

ein und erhält

$$\begin{matrix} 0, & 1+i, & -c; & -1+i, & 0, & -i\,c \\ (1+i)\,i\,\bar{c}, & 0, & -\omega+i; & 0, & -(1+i)\,\bar{c}, & -1-i\,\omega \\ i\,c\,\bar{c}, & \omega-i, & -(1-i)\,\bar{c}; & -1-i\,\omega, & c\,\bar{c}, & (1+i)\,\bar{c}. \end{matrix} \tag{3}$$

Alsdann ist die erste Zeile mit $\omega + i/1 + i$ zu multiplizieren und die zweite mit $c/1 + i$ und die Differenz zu bilden:

$$-c\,\bar{c}\,i, \quad \omega + i, \quad -(1+i)\,c; \quad -1 + i\,\omega, \quad c\,\bar{c}, \quad (1-i)\,c. \tag{4}$$

Die dritte Zeile in (3) unterscheidet sich von (4) dadurch, daß die Zahlkoeffizienten konjugierte Werte haben. Daher führt Summe und Differenz bei Trennung von Reellem und Imaginärem

$$c = a + b\,i, \quad \bar{c} = a - b\,i \tag{5}$$

auf Linearfunktionen in ω mit reellen Zahlkoeffizienten

$$\begin{matrix} 0, & \omega, & -a+b; & -1, & a^2+b^2, & a+b \\ a^2+b^2, & -1, & a+b; & -\omega, & 0, & a-b. \end{matrix} \tag{6}$$

Die linearen Kombinationen mit ganzrationalen zueinander primen Koeffizienten μ und ν geben die Periodenwerte sämtlicher reduzierbaren Integrale. Aus der in Abschn. 3 zitierten Regel für den Reduktionsgrad findet man den Wert

$$(a^2 + b^2)\,(\mu^2 + \nu^2). \tag{7}$$

Formel (7) enthält aber auch reduzierende Funktionen, die mit einer Transformation des elliptischen Integrals zusammengesetzt sind, da das Schema (6) durch nichtunimodulare Transformation von ω und Bildung linearer Kombinationen in andere übergeführt werden kann, für die (7) gültig bleibt. Unmittelbar wird dies aus (4) ersichtlich. Ist δ ein komplexer Teiler von c, der keinen reellen Teiler hat, so gibt es ein ganzrationales ξ, so daß $\xi + i$ durch δ teilbar ist. Wird nunmehr

$$\omega = \delta\,\bar{\delta}\,\omega' + \xi \tag{8}$$

substituiert, so läßt sich aus (4) der Faktor δ und aus der dritten Zeile in (3) der Faktor $\bar{\delta}$ heraussetzen, und man gelangt wiederum zu einem konjugierten System, aus dem sich ein Schema wie in (6) herleiten läßt, für das die Formel (7) gilt. Daraus ergibt sich, daß für *den niedersten Reduktionsgrad*

$$a^2 + b^2 = c\,\bar{c} \tag{9}$$

die Anzahl der reduzierenden Funktionen gleich dem Doppelten der um eins vermehrten Anzahl der komplexen Teiler δ von c ist. Für $n = 5$ gibt es im ersten Falle $c = 1 + 2\,i$ vier reduzierende Funktionen fünften Grades und im zweiten Falle $c = 1 + 3\,i$ acht Funktionen zehnten Grades.

Die dem Hauptintegral zugehörigen Periodenwerte der dritten Zeile in (3) stellen eine lineare Verbindung von (6) mit den Koeffizienten 1 und i dar. Daraus folgt, daß das Hauptintegral zwar aus zwei reduzierbaren Integralen zusammengesetzt, aber *selbst nicht reduzierbar ist.* Weiterhin folgt, daß die lineare Verbindung mit den Koeffizienten 1 und $-i$ in (4) *für die Grenzkreisgruppe ein zweites Hauptintegral liefert.*

Es ist anzumerken, daß für jedes n zwei Hauptintegrale erhalten werden. Die Verallgemeinerung des Verfahrens ist dadurch gegeben, daß in der dritten Zeile von (3) Spiegelungen von ω am Grenzkreis und Übergang zu konjugierten Werten vorzunehmen ist, um die gesuchte lineare Verbindung aus der ersten und zweiten Zeile zu erhalten.

9. Abels Transformationsformel

Dem Gange der Untersuchung in Abschn. 1 folgend setzen wir eine Entwicklung über Abels Formel, betreffend den fünften Transformationsgrad des lemniskatischen Integrals, voran, die den Ausführungen von Abschn. 10 entspricht. Die Gleichung von Abschn. 1, (4)

$$x^5 + a\,x^4 - a\,y\,x - y = 0 \tag{1}$$

ist für den Wert $a = 1 + 2\,i$ eine metazyklische. Die Beziehung unter zwei ihrer Wurzeln stellt daher ein Galoissystem dar, das durch die Fünfteilung einer Periode des lemniskatischen Integrals gegeben ist. Eine Darstellung gewinnt man aus dem Ansatz

$$\frac{x^4(x+a)}{a\,x+1} = \frac{x'^4(x'+a)}{a\,x'+1}\,, \qquad a = 1 + 2\,i\,. \tag{2}$$

Nach Entfernung des Teilers $x - x'$ und Einführung der symmetrischen Grundfunktionen von x und x' gelangt man zu einer Beziehung vom

Geschlechte $g = 0$. Es ist aber zweckmäßig, die Periodenhalbierung durch Ausübung der Substitution

$$x' = \frac{1}{x''} \tag{3}$$

einzubeziehen. Dies ergibt die in x und x'' symmetrische Gleichung

$$(x\,x'')^4 (x + a)\,(x'' + a) = (a\,x + 1)\,(a\,x'' + 1). \tag{4}$$

Setzt man

$$x + x'' = u, \quad x\,x'' = v, \tag{5}$$

so ergibt sich eine Gleichung

$$v^4 (v + a\,u + a^2) = a^2 v + a\,u + 1, \tag{6}$$

die in u linear ist. Wendet man (3) auf beide Variabeln an, so geht sowohl (2) als auch (4) in sich über und (6) wird durch

$$u = \frac{u'}{v'}, \quad v = \frac{1}{v'} \tag{7}$$

in sich transformiert. Setzt man noch

$$v + v^{-1} = 2\,w, \tag{8}$$

so ergibt die Ausrechnung der Wurzel von (1)

$$x = \frac{-w^2 + (1-2i)w + (1-i) + (w+1-i)\sqrt{w^2 + 2(1-i)w + 1}}{(1+2i)w(w+1+\sqrt{w^2-1})}. \tag{9}$$

Zähler und Nenner haben dieselbe Norm $2(1 + 2\,i)^2 w^2 (w + 1)$, so daß (9) bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel der Quadratwurzeln in den reziproken Wert von x übergeht. Findet indessen der Vorzeichenwechsel nur im Nenner statt, so wird eine zweite Wurzel der Gl. (1) erhalten. Daher ist die Quadratwurzel im Zähler zu rationalisieren. Mit EULER setzt man

$$w^2 + 2(1 - i)\,w + 1 = (w - t)^2, \tag{10}$$

$$w = \frac{t^2 - 1}{2(t + 1 - i)} \tag{11}$$

und erhält aus (9)

$$x = -2(1 + 2\,i)\,\frac{t+1}{t-1}\sqrt{\frac{t-i}{t+2+i}}\;\frac{1}{\sqrt{(t-i)(t+2+i)} + \sqrt{t^2 - 2t - 3 + 2i}}. \tag{12}$$

In x und t hat (12) den Grad 2 bzw. 4. Die Abhängigkeit von y zufolge (1) stellt *die Galoisresolvente 20. Grades in t* dar, die durch ihre Verzweigung bei $y = 0, \infty, 1$ bestimmt ist. Bei $y = 0$ verschwindet x vierfach. Die fünfte Wurzel $x = -1 - 2\,i$ gibt, in (12) eingesetzt, die Gleichung

$$[t^2 - t(1 - i) - (4 + i)]\sqrt{t - i} + (t - 1)\sqrt{(t + 2 + i)(t^2 - 2t - 3 + 2i)} = 0, \tag{13}$$

die fünffach $t = \infty$ liefert. Damit ist bereits der Zusammenhang mit *der Periodenfünfteilung* erwiesen. Zufolge (13) ist

$$x_* = \frac{(1 + 2\,i)\,x + 1}{x + 1 + 2\,i} \tag{14}$$

eine ganze Funktion von t und stellt sich bis auf einen Zahlfaktor als Quadrat dar:

$$(15)\qquad (4+8\,i)\,x_* = \left[(t^2-1) + \sqrt{(t^2-1)^2 - 4(t+1-i)^2}\right]^2,$$

da die Ausrechnung von t die zyklische Irrationalität

$$(16)\qquad \sqrt[4]{x_*(x_*-1)^2/(1+2\,i)}$$

erfordert. Durch die Substitutionen

$$(17)\qquad x_* = \frac{s^2}{1+2\,i}, \quad t = \frac{2(1+i)}{-t'-1} + i$$

geht (15) in die symmetrische durch fünf Elemente geschlossene *Fermat*-Kette

$$(18)\qquad (s\,t + s + t - 1 - 2\,i)^2 + 8\,i\,s\,t = 0$$

über[7]). *Das einer Wurzel von* (1) *zugehörige* s *erzeugt aus* (18) *die entsprechenden Werte der anderen Wurzeln.*

10. Die algebraischen Ausführungen zu $n = 2, 3, 4$

Die in der Einleitung gegebene Entwicklung für den Reduktionsgrad $n = 2$ ist zu vervollständigen. Die Integrale in (4) aus der Theorie der hypergeometrischen Funktion sind die beiden Hauptintegrale. Um dieselben durch elliptische Integrale auszudrücken, ist die hyperelliptische Gestalt von Abschn. 3, (1) heranzuziehen. Indem wir setzen

$$(1)\qquad z(z^2+1)\,[(z^2+1)^2 - 4\,t\,z^2] = P,$$

$$(2)\qquad z + z^{-1} = 2\,u,$$

stellt sich das lemniskatische Integral dar durch

$$(3)\qquad \int \frac{du}{\sqrt{2\,u\,(u^2-t)}} = \int \frac{(z^2-1)\,dz}{\sqrt{P}}$$

und die Hauptintegrale durch

$$(4)\qquad \int \frac{du}{\sqrt{2\,u\,(u^2-1)\,(u^2-t)}} = \int \frac{2\,z\,dz}{\sqrt{P}},$$

$$(5)\qquad \int \frac{u\,du}{\sqrt{2\,u\,(u^2-1)\,(u^2-t)}} = \int \frac{(z^2+1)\,dz}{\sqrt{P}}.$$

Die Substitution

$$(6)\qquad z = \frac{i\,z'+1}{z'+i}$$

transformiert u in u^{-1} und (3) bis auf einen Faktor in sich, wenn zugleich die Substitution

$$(7)\qquad t = \frac{1}{t'}$$

ausgeführt wird. Hingegen werden (4) und (5) miteinander vertauscht. Die bezüglich (7) invariante Funktion

$$(8)\qquad s : s - 1 : 1 = 4\,t : (t+1)^2 : -(t-1)^2$$

---

[7]) Durch weitere Wurzelziehung vereinfacht sich (18) zu

$$(r\,r' - i)^2 + (r + r')^2 = 2\,i.$$

gibt den Modul[8]) der Dreiecksfunktion mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 0.

Zur weiteren Reduktion des Gebildes $g = 2$ in (4) und (5) setzen wir

$$(9) \qquad t = r^2, \qquad u + \frac{r}{u} = 2v.$$

Der Modul r stellt eine Viereckfunktion $\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ dar, die aus sechs Dreiecken der elliptischen Modulteilung zusammengesetzt ist. In der Variabel v erhält man die elliptischen Integrale

$$(10) \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{(v \pm \sqrt{r})\,[4v^2 - (r+1)^2]}} = \int \frac{(z^2 \mp 2\sqrt{r}\,z + 1)\,dz}{\sqrt{P}},$$

die bei $v = -v'$ bis auf den Faktor i ineinander übergehen. Daher stellt sich für die Gesamtheit der reduzierbaren Integrale nach Abschn. 8, (6) das quadratische Polynom im Zähler dar:

$$(11) \qquad \mu(z^2 - 2\sqrt{r}\,z + 1) + i\,\nu(z^2 + 2\sqrt{r}\,z + 1)\,.$$

Durch die Substitution $r = -r'$, die t ungeändert läßt, gehen *zwei weitere Integrale vom Reduktionsgrad vier* hervor, deren quadratische Polynome notwendig in (11) enthalten sind. In der Tat ergibt $\mu = 1$, $\nu = \pm 1$

$$(12) \qquad (1 \pm i)\,(z^2 \pm 2\,i\sqrt{r}\,z + 1)\,.$$

Nach Abschn. 8, (8) ist diesen Integralen der Teiler $\delta = 1 + i$ zuzuordnen, und man zeigt leicht, daß bei quadratischer Transformation des elliptischen Integrals in (10) r in $-r$ übergeht. Die Hauptintegrale gehen, wie erforderlich, durch $\mu = 1$, $\nu = \pm i$ hervor.

Im Falle $n = 3$ treten keine weiteren reduzierbaren Integrale auf. Die Bestimmung des zweiten Hauptintegrals gehört aber den Ausführungen an. Das Integral

$$(13) \qquad \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x(x^2+tx+t)}\,\sqrt[4]{[(x-2)^2+2tx]^3}}$$

ist durch die Korrespondenz (1,3)

$$(14) \qquad y = (x-1)^2\left(1 + \frac{2t}{x}\right)$$

auf ein lemniskatisches Integral reduzierbar. Aus

$$(15) \qquad (x_1 - 1)^2\left(1 + \frac{2t}{x_1}\right) = (x_2 - 1)^2\left(1 + \frac{2t}{x_2}\right)$$

ergibt sich nach Abspaltung des Faktors $x_1 - x_2$ eine Korrespondenz (2,2), die (13) in sich transformiert. Dieser Umstand läßt sich benutzen, um auch andere Integrale des Gebildes durch diese Korrespondenz zu transformieren.

---

[8]) Zu einer rationalen Einführung dieses Moduls in das Polynom von (1) gelangt man, wenn P linear in

$$P' = (z^4 - 6z^2 + 1)\,[(z^2+1)^2 + 4z(z^2-1)/\sqrt{1-s}]$$

transformiert und durch

$$z = z'/\sqrt{1-s}$$

substituiert wird.

Für das Hauptintegral ist das in x_2 angesetzte Differential von (13) mit

$$\sqrt{(x_1-2)^2+2\,t\,x_1}\,/(x_1-1) \tag{16}$$

zu multiplizieren und (16) durch x_2 auszudrücken. Aus (15) ergibt sich

$$2x_2+x_1+2t-2=\sqrt{(x_1-2)^2+2\,t\,x_1}\,\sqrt{1+\frac{2t}{x_1}}. \tag{17}$$

Mittels (17) und (15) läßt sich (16) umformen zu

$$2\,x_2+x_1+2\,t-2\Big/(x_2-1)\,\sqrt{1+\frac{2t}{x_2}}. \tag{18}$$

Die vollständige Elimination von x_1, die nach (17) unter Vertauschung von x_1 und x_2 durchgeführt werden kann, ergibt die halbe Summe oder Differenz aus zwei Integralen, dem Hauptintegral und einem weiteren Integral

$$\int\frac{(3x+2t-2)\,dx}{\sqrt{(x+2t)(x^2+tx+t)}\,\sqrt[4]{[(x-2)^2+2tx]^3}}, \tag{19}$$

das erst nach Ausübung der Substitution

$$x=\frac{x'+2t}{x'-1} \tag{20}$$

in ein dem algebraischen Gebilde zugehöriges übergeht:

$$\int\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x(x^2+tx+t)}\,\sqrt[4]{[(x-2)^2+2tx]^3}}. \tag{21}$$

Dasselbe verhält sich gegenüber der Korrespondenz (2,2) wie das Hauptintegral und ist daher *das zweite Hauptintegral der Grenzkreisgruppe.*

Der Modul der Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ ist zufolge Abschn. 7, (8), (11) in Transformationsgrößen der sechsten Stufe enthalten, läßt sich aber auch aus dem Vorstehenden gewinnen. Die Wurzelausdrücke

$$\sqrt{t(t-4)},\quad \sqrt[4]{2t+1} \tag{22}$$

sind Kongruenzmoduln. Der erste zerfällt die quadratischen Polynome in x, der zweite tritt als Faktor auf bei der Transformation des Integrals (19) durch (20). Die Verzweigungsstellen entsprechen den Ecken des Polygons (Abschn. 15). Die kubische Funktion

$$\varrho:1-\varrho:1=27\,t^2:(2\,t+1)\,(t-4)^2:\,2(t+2)^3 \tag{23}$$

hat diese zu Nullstellen bei $\varrho=0$ u. 1 und stellt den Modul der Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ dar. Durch

$$\sigma=4\,\varrho(1-\varrho)=\frac{27\,t^2(t-4)^2\,(2t+1)}{(t+2)^6} \tag{24}$$

steigen wir zu dem gesuchten Modul auf.

Im Falle $n=4$ ist die Reduktionsformel für das lemniskatische Integral bereits in Abschn. 1, (8), (9) vollständig mitgeteilt. Wie in (15) läßt sich aus

der reduzierenden Funktion zunächst eine symmetrische Korrespondenz (3,3) herleiten. Alsdann vermitteln die Grundfunktionen

(25) $$x_1 + x_2 = u, \quad x_1 x_2 = v$$

eine Korrespondenz (2,3), die gestattet, das algebraische Gebilde in andere zu transformieren. Wir erhalten

(26a) $$2\,v(u - t - 1) = u^3 - 2(t+1)\,u^2 + (3\,t+1)\,u$$

(26b) $$v = x(u - x).$$

Die Variable y des lemniskatischen Integrals von Abschn. 1, (8) u. (9) stellt in Abhängigkeit von u und v eine Resolvente 6. Grades der Gleichung 4. Grades in x dar und wird, da (26a) in v linear ist, eine rationale Funktion von u. Aus der Umformung von (26)

(27) $$(x - u)^2(u - 2\,t - 2) + u\,[x^2 - 2(t+1)\,x + (3\,t+1)] = 0$$

gewinnt man die Darstellung

(28) $$y = -\frac{u - 2t - 2}{u} \cdot v^2.$$

Die Resolvente besitzt eine Transformation in sich:

(29) $$u + u' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\,(t+1).$$

Vermöge

(30) $$u^2 - 2(t+1)\,u = w$$

gelangt man zur kubischen Resolvente

(31) $$y = -\frac{w \cdot (w + 3t + 1)^2}{4\,[w + (t+1)^2]},$$

die das lemniskatische Integral in

(32) $$\int \frac{[2\,w + (t+1)(3\,t+1)]\,d\,w}{\sqrt{(w + 4\,t)(w + 3\,t + 1)}\;\sqrt[4]{w^3\,[w + (t+1)^2]^3}}$$

transformiert. (32) unterscheidet sich von (13), $n = 3$ durch Normierung und Modul und dient nur dazu, um andere Integrale des Falles $n = 4$ zu transformieren. Nach Abschn. 1, (9) ist das Differential von (32) mit

(33) $$\sqrt{x^2 - 2(t+1)\,x + (3t+1)}/2\,x - 3\,t - 1$$

zu multiplizieren, um das Hauptintegral zu transformieren, und (33) durch u bzw. w auszudrücken. Aus (27) leitet man die Gleichungen ab:

(34) $$\frac{1}{x - u}\sqrt{x^2 - 2(t+1)\,x + (3\,t+1)} = i\sqrt{\frac{u - 2t - 2}{u}}$$

(35) $$x - u = \frac{1}{2}\left(-u + i\sqrt{\frac{u\,(u-2)\,(u - 3t - 1)}{u - t - 1}}\right)$$

(36) $$\frac{2\,w + (t+1)(3\,t+1)}{2\,x - 3\,t - 1} = u - t - 1 - i\sqrt{\frac{u\,(u-2)(u - t - 1)}{u - 3\,t - 1}},$$

deren Produkt zu bilden ist. Das Resultat stellt sich wiederum als halbe Summe oder Differenz zweier Integrale dar, von denen das erste sich vollständig in w ausdrücken läßt[9]):

$$(37) \qquad i(t-1)\int \frac{dw}{\sqrt{(w+4t)(w+3t+1)}\,\sqrt[4]{w\,[w+(t+1)^2]^3}}.$$

Dasselbe erweist sich als eines der beiden Hauptintegrale für $n = 2$. Aus dem in u rationalen Teil von (36)

$$(38) \qquad u - t - 1 = \sqrt{w + (t+1)^2}$$

wird ersichtlich, daß

$$(39) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-2tx-t)}\,\sqrt[4]{[x^2-2(t+1)x+(3t+1)]^3}}$$

das andere Hauptintegral für $n = 2$ als Teilintegral[9]) enthält und somit *das zweite Hauptintegral für* $n = 4$ darstellt. Der Vergleich der Integrale in (4) und (5) mit dem in (37) gibt den Zusammenhang der Moduln für $n = 2$ und 4:

$$(40) \qquad \sqrt{1-t_2} = \frac{t_4+1}{2t_4}.$$

Im Hinblick auf den nächsten Abschnitt ist anzumerken, daß bei $g = 2$ die Korrespondenztheorie allgemein anwendbar ist. Enthält die lineare Schar der Integrale erster Gattung ein elliptisches Integral vom Reduktionsgrad n, so existiert nach dem Picardschen Restsatz[10]) noch ein zweites. Auf rein algebraischem Wege läßt sich dieser Satz dadurch nachweisen, daß aus der reduzierenden rationalen Funktion zunächst eine symmetrische Korrespondenz $(n-1,\ n-1)$ hergeleitet wird und durch Einführung der symmetrischen Grundfunktionen eine Korrespondenz $(2, n-1)$, aus der sich das zweite elliptische Integral ergibt.

11. Die algebraischen Ausführungen zu dem ersten Fall $n = 5$

Die transzendente Theorie hatte in Abschn. 8 zu dem Ergebnis geführt, daß das Gebilde $g = 3$, wenn es durch eine rationale Funktion fünften Grades nach erster Art auf ein lemniskatisches Integral reduzierbar ist, vier weitere Reduktionen dieses Grades auf elliptische Integrale besitzt. Durch die rationale Funktion ist das Gebilde bestimmt. Es ist aber nicht zu ersehen, wie auf rein algebraischem Wege die Existenz der anderen Funktionen erschlossen werden kann. Die Ermittlung dieser Funktionen läßt sich daher nur so vornehmen, daß die Existenz derselben vorausgesetzt wird. Man gelangt auf diesem Wege zu einem überbestimmten Gleichungssystem, das für derartige Untersuchungen charakteristisch ist.

[9]) Das zweite gehört dem Gebilde vom Geschlechte $g = 4$

$$\sqrt{(u-2t)(u-3t-1)[u^2-2(t+1)u+(3t+1)]}\;\sqrt[4]{\frac{u-2t-2}{u}}$$

an, das eine lineare Schar elliptischer Integrale enthält.

[10]) E. Picard: Bull. S. M. F. 11, 47 (1882).

Das geschilderte Versagen der algebraischen Geometrie steht aber nicht am Rande der Theorie der algebraischen Funktionen, sondern am Anfang einer arithmetischen Theorie, die diejenigen Transzendenten zur Grundlage hat, die die algebraischen Funktionen von selber darbieten. Der abzuleitenden Formel möchte ich daher eine ähnliche Stellung in der Theorie der algebraischen Funktionen zuweisen, wie sie die Abelsche Transformationsformel in Abschn. 9 für die Zahlentheorie besitzt.

Die reduzierende Funktion für das lemniskatische Integral ist durch die Identität

$$\begin{aligned}(x-1)^2\,[x^3-(\tau-2)\,x^2-(2\,\tau-3)\,x-(3\,\tau-4)]\\ = x^4(x-\tau)+[(4\,\tau-5)\,x-(3\,\tau-4)]\end{aligned} \tag{1}$$

gegeben, und aus dieser leitet man das Gebilde

$$\frac{\sqrt{x^3-(\tau-2)\,x^2-(2\,\tau-3)\,x-(3\,\tau-4)}}{\sqrt[4]{(x-\tau)\,[(4\,\tau-5)\,x-(3\,\tau-4)]}} \tag{2}$$

ab. Zur Auffindung der weiteren Reduktionen ist der Übergang zur hyperelliptischen Gestalt erforderlich. Dies wird durch die Substitution

$$\frac{(4\tau-5)\,x-(3\tau-4)}{x-\tau}=-z^2 \tag{3}$$

bewirkt. Bezeichnen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\xi^3-(\tau-2)\,\xi^2-(2\,\tau-3)\,\xi-(3\,\tau-4)=0, \tag{4}$$

so werden zufolge (1) die Werte $x=\xi_1, \xi_2, \xi_3$ in $z=\pm\xi_1^2, \pm\xi_2^2, \pm\xi_3^2$ transformiert und (2) geht über in

$$\sqrt{z\,(z^2-\xi_1^4)\,(z^2-\xi_2^4)\,(z-\xi_3^4)}\,. \tag{5}$$

Die gesuchten reduzierenden Funktionen sind nunmehr gegenüber der Substitution $z=-z'$ variant, so daß je zwei Funktionen durch diese miteinander verknüpft sind. In dem Ansatz

$$\frac{(z-\xi_1^2)\,(z^2+\omega_1\,z+\varrho\,\xi_2\,\xi_3)^2}{(z-\xi_2^2)\,(z^2+\omega_2\,z+\varrho\,\xi_1\,\xi_3)^2} \tag{6}$$

sind $\omega_1, \omega_2, \varrho$ vom Modul τ abhängige Parameter. Bei $z=\xi_1^2, \xi_2^2$ fallen je zwei koordinierte Zweige zusammen. Zudem nimmt die Funktion bei $z=0, \infty$ den Wert 1 an. Indem dies auch für die weiteren Nullstellen des Polynoms in (5) $z=-\xi_1^2, -\xi_2^2, -\xi_3^2$ erfüllt sein soll, erhält man Bedingungen zur Bestimmung von $\omega_1, \omega_2, \varrho$. Die Verzweigung der reduzierenden Funktion ist jedoch erst durch symmetrische Ausgestaltung des Ansatzes (6) bzgl. ξ_1, ξ_2, ξ_3 definiert. Hierzu werde ω als Zahl im kubischen Körper $K(\xi)$ aufgefaßt:

$$\omega=\lambda\,\xi^2+\mu\,\xi+\nu \tag{7}$$

und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als zueinander konjugierte Werte angenommen. Nunmehr haben wir es mit vier unbestimmten Größen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zu tun. Indessen liefert jede Beziehung für ξ_1 bzw. ξ_2, ξ_3 drei Bedingungen.

Setzt man in die rationale Funktion (6) den Wert

$$z = -\xi_1^2 \tag{8}$$

ein, so läßt sich der nichtquadratische Faktor vermöge (4) in ein negatives Quadrat umsetzen:

$$\frac{z-\xi_1^2}{z-\xi_2^2} = -\frac{\xi_1^2(\xi_3+1)^2}{(\tau-1)^2}. \tag{9}$$

Da (6) bei (8) den Wert 1 annehmen soll, so erhält man eine in $K(i)$ zerlegbare Bedingung, so daß *durch Übergang zu konjugiert-komplexen Größen und Anwendung der Substitution $z = -z'$ sämtliche vier reduzierenden Funktionen gefunden werden.* Es ergeben sich die Gleichungen

$$\xi_1^4 - \omega_1\xi_1^2 + \varrho\,\xi_2\xi_3 = i\,\frac{\tau-1}{\xi_3+1}(\xi_1^3 - \omega_2\,\xi_1 + \varrho\,\xi_3), \tag{10}$$

$$\xi_1^4 - \omega_1\xi_1^2 + \varrho\,\xi_2\xi_3 = i\,\frac{\tau-1}{\xi_2+1}(\xi_1^3 - \omega_3\,\xi_1 + \varrho\,\xi_2). \tag{11}$$

Die Differenz führt auf eine Gleichung in ξ_1

$$\xi_1^3 - \xi_1\frac{\omega_2' - \omega_3'}{\xi_2 - \xi_3} - \varrho = 0, \tag{12}$$

in der

$$\omega' = (\xi+1)\,\omega = \lambda'\,\xi^2 + \mu'\,\xi + \nu' \tag{13}$$

bedeutet. Die Reduktion von (12) auf ein quadratisches Polynom in ξ_1 mittels (4) und Nullsetzung der Koeffizienten ergibt

$$\varrho = 3\tau - 4, \quad \lambda' = -\tau + 2, \quad \mu' = (\tau-1)^2. \tag{14}$$

μ und ν in (7) lassen sich durch λ und τ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mu &= 1 - (\tau-1)(\lambda+1) \\ \nu &= (\lambda-1) + (\tau-1)(\tau-\lambda). \end{aligned} \tag{15}$$

Eine zweite Gleichung in ξ_1 von hinreichender Einfachheit wird folgendermaßen erhalten. Aus (4) und (14) ergibt sich

$$\varrho = \xi_1\,\xi_2\,\xi_3. \tag{16}$$

Nach Einsetzung in (10) und (11) kann der Faktor ξ_1 entfernt werden. Die Beseitigung der Nenner in (10) und (11) und Differenzbildung ergibt sodann

$$\xi_1^3 - \omega_1\xi_1 + \xi_2^2\,\xi_3^2 = i(\tau-1)\left(\frac{\omega_2-\omega_3}{\xi_2-\xi_3} + \xi_2\,\xi_3\right). \tag{17}$$

Die Reduktion beider Seiten auf quadratische Polynome in ξ_1 und die Gleichsetzung der Koeffizienten der höchsten Potenz ergibt

$$\lambda - 1 = i(\tau-1). \tag{18}$$

Die Gleichsetzung der anderen Koeffizienten bestätigt dies Ergebnis nur, wodurch die Überbestimmtheit des Gleichungssystems zum Ausdruck gelangt.

Der Modul τ steht mit dem Parameter t in Abschn. 1, (11) in der Beziehung

$$t = \left(\frac{3\tau-5}{\tau-1}\right)^2, \tag{19}$$

und es ist t der Transformationsmodul und τ der Periodenteilungsmodul, an deren Normierung jedoch der Zahlkörper $K(i)$ gemäß den Angaben in Abschn. 7 Fig. 5 eingeht.

12. Mehrfache Reduzierbarkeit

Bestehen unter den transzendenten Moduln zwei lineare Relationen

$$\begin{aligned} \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_3 &= 0, \\ \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \alpha, \beta \text{ aus } K(i), \tag{1}$$

so lassen sich durch Bildung linearer Kombinationen mit Koeffizienten aus $K(i)$ unendlich viele Relationen ableiten. Diese stellen jedoch mehrfache Reduzierbarkeit nur dar, wenn jeder Relation eine positive Zahl als Reduktionsgrad entspricht. Die Berechnung der Reduktionsgrade führt auf denselben algebraischen Zusammenhang von Abschn. 3, (9)—(11), so daß die Gesamtheit aller Reduktionsgrade durch eine binäre Hermitesche Form (A, B, C) dargestellt wird, die nunmehr auf positiv-definite Formen einzuschränken ist, so daß die Diskriminante $H(c)$ nach Abschn. 3, (11) einen negativen Wert erhält. Die Relationen (1) lassen sich so auswählen, daß die c keinen gemeinsamen Teiler haben. Da die Moduln t den Zahlen c aus $K(i)$ proportional sind, ergibt sich, daß *auch das Hauptintegral auf ein lemniskatisches Integral reduzierbar ist*. Der Reduktionsgrad m berechnet sich nach Abschn. 2, (16) zu

$$m = -H(c) = |D|, \tag{2}$$

ist also durch den absoluten Wert der Diskriminante der positiven Hermiteschen Form gegeben, die die Reduktionsgrade der unendlich vielen reduzierbaren Nebenintegrale darstellt.

Zur Gesamtheit aller reduzierbaren Integrale gelangt man durch Bildung linearer Kombinationen aus allen drei Zeilen des Periodenschemas. Die Reduktionsgrade lassen sich nach Abschn. 2, (17) durch eine definite ternäre Hermitesche Form

$$A\,x\,\bar{x} + B\,x\,\bar{y} + \bar{B}\,\bar{x}\,y + C\,y\,\bar{y} - D\,z\,\bar{z} \tag{3}$$

darstellen. Zu bemerken ist, daß nur in der hyperelliptischen Gestalt des Gebildes sämtliche Reduktionen durch rationale Funktionen vermittelt werden.

13. Darstellung negativer Zahlen, endliche Gruppen

Abschn. 5 bedarf einiger Ergänzungen, wenn auch die Darstellung negativer Zahlen $-m$ durch die Form H in Betracht gezogen wird. Indem die Bezeichnung von Abschn. 5 wieder aufgenommen wird bis auf die Zahl m, die nach Abschn. 12, (2) den Reduktionsgrad des Hauptintegrals bezeichnet, bleibt nunmehr $a\,\bar{b} + \bar{a}\,b$ stets negativ und der in Abschn. 5, (3) eingeführte Winkel φ bewegt sich zwischen π und $\frac{5\pi}{6}$. Anstelle von Abschn. 5, (7) hat man

$$|c|^2 + m = 2\cos(\pi - \varphi)\,|a\,b|, \tag{1}$$

so daß c in der angegebenen Weise nicht mehr zu reduzieren ist, wenn $|c|$ wesentlich kleiner als $\sqrt{m}$ wird. Bei

$$|c| = \sqrt{2\,m} \tag{2}$$

gilt aber für das nach Abschn. 5, (4) reduzierte b, da $2\cos(\pi - \varphi)$ den Wert $\sqrt{3}$ nicht unterschreiten kann,

$$|b| \leq \sqrt[4]{3}\,\sqrt{m}, \tag{3}$$

und da $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ ist,

(4)
$$|b| < |c|,$$

so daß eine Reduktion nach Abschn. 5, (9) bei $|c| \geqq \sqrt{2\,m}$ immer ausführbar ist. Daraus folgt, daß *die Anzahl der reduzierten Darstellungen von* $-m$ *durch* H *endlich ist.*

Es folgt eine Tabelle dieser Darstellungen von $m = 1$ bis 12. In der letzten Spalte ist die nach Abschn. 12 zugehörige definite Hermitesche Form (A, B, C) angegeben.

(5)	m,	a,	b,	c,	$(A,$	$B,$	$C)$
	1	-1	1	1	$(1,$	$0,$	$1)$
	2	-1	1	0	$(1,$	$0,$	$2)$
	3	-2	1	1	$(1,$	$0,$	$3)$
		$-1-i$	$1+i$	1	$(2,$	$1,$	$2)$
	4	-2	1	0	$(1,$	$0,$	$4)$
		$-2-i$	$1+i$	$1+i$			
	5	-3	1	1	$(1,$	$0,$	$5)$
		$-2-i$	$1+i$	1	$(2,$	$1,$	$3)$
	6	-3	1	0	$(1,$	$0,$	$6)$
		$-2-i$	$1+i$	0			
		$-2-i$	2	$1+i$	$(2,$	$0,$	$3)$
	7	-4	1	1	$(1,$	$0,$	$7)$
		$-2-2i$	$2+i$	$2+i$			
		$-2-2i$	$1+i$	1	$(2,$	$1,$	$4)$
		-2	2	1			
		$-2-i$	2	1	$(3,$	$1+i,$	$3)$
	8	-4	1	0	$(1,$	$0,$	$8)$
		$-2-i$	2	0			
		$-2-3i$	$1+i$	$1+i$			
		-3	2	2			
		$-1\mp 2i$	$1\pm 2i$	$1+i$	$(2,$	$1+i,$	$5)$
	9	-5	1	1	$(1,$	$0,$	$9)$
		$-1\mp 3i$	$1\pm 2i$	$1\pm 2i$			
		$-2-3i$	$1+i$	1	$(2,$	$1,$	$5)$
		$-1\mp 2i$	$1\pm 2i$	1			
	10	-5	1	0	$(1,$	$0,$	$10)$
		$-2-3i$	$1+i$	0			
		-3	2	$1+i$	$(2,$	$0,$	$5)$
		-3	$2\pm i$	$1+i$	$(3,$	$1+i,$	$4)$
	11	-6	1	1	$(1,$	$0,$	$11)$
		-4	$2\pm i$	$2\pm i$			
		$-3-3i$	$1+i$	1	$(2,$	$1,$	$6)$
		$-2-2i$	$2+2i$	$2\pm i$			
		-3	2	1	$(3,$	$1,$	$4)$
		$-2\pm 2i$	$2\mp i$	1			
		$-3-i$	2	1	$(4,$	$2+i,$	$4)$
	12	-6	1	0	$(1,$	$0,$	$12)$
		$-3+i$	2	0			
		-3	$2\pm i$	0			
		$-4-3i$	$1+i$	$1+i$			
		$-4-i$	2	2			
		$-4\pm i$	$3\pm i$	$3\pm i$			
		$-3\pm i$	$2\mp i$	$1+i$	$(4,$	$2+2i,$	$5)$

Die einfachste Definition der Form (A, B, C) ist durch

(6) $$H(u, v, w), \quad a u + b v + c w = 0$$

gegeben. Die arithmetische Auflösung der linearen Relation führt auf die Koeffizienten von Abschn. 12, (1) zurück. Die Automorphismen von H, die die Relation in sich überführen, bilden nunmehr eine *endliche Gruppe*. Diese läßt sich in der gleichen Weise wie bei den indefiniten Formen ermitteln. Der Form (2, 1, 2) ist die lineare Relation

(7) $$(1 + i)(u - v) = w$$

zugeordnet, die nach Abschn. 6 durch die Substitutionen von der Periode 2

(8) $$V_1 V_0^2, \quad V_0^2 V_3(1 + i)$$

in sich transformiert wird. Die Zusammensetzung ergibt eine Substitution von der Periode 3

(9) $$V_1 V_3(1 + i),$$

die bereits in Abschn. 6, (11) aufgetreten ist. Die Substitutionen (8) erzeugen also eine Diedergruppe von der Ordnung 6, die für die genannte Form bestimmend ist (Abschn. 17).

Für die Form (1, 0, 1) läßt sich zunächst in gleicher Weise verfahren. Die lineare Relation

(10) $$u - v = w$$

bleibt bei

(11) $$V_1 V_0^2, \quad V_0^2 V_3(2)$$

ungeändert. Die zweite Substitution läßt eine Verdopplung des Periodengrades

(12) $$V_0^{-1} V_2(1) V_3(1 + i)$$

zu und diese mit der ersten zusammengesetzt ergibt eine Substitution

(13) $$V_0 V_1 V_2(1) V_3(1 + i)$$

von der Periode 8. Eine bessere Übersicht über diese Gruppe ergibt sich aber, wenn man H durch

(14) $$\begin{aligned} u &= x + z \quad &, \quad x &= v + w \\ v &= \quad y - z, \quad & y &= u \quad - w \\ w &= x - y + z, \quad & z &= u - v - w \end{aligned}$$

in die orthogonale Form

(15) $$x \bar{x} + y \bar{y} - z \bar{z}$$

transformiert. Diese bleibt ungeändert, wenn eine der Veränderlichen mit dem Faktor i versehen wird. Die gesuchte Gruppe in $u : v : w$, die $z = 0$ ungeändert läßt, ergibt sich alsdann als eine der Ordnung 32.

Das Verschwinden von x oder y stellt nach (14) den zweiten Fall der Entartung dar (Abschn. 6) und die Existenz einer mit der Gruppe vertauschbaren Substitution von der Periode 4 ist unmittelbar ersichtlich. Auch erkennt man an der Orthogonalform, daß die Automorphismengruppe von H außer der

durch V_0 gegebenen Klasse noch vier weitere Klassen von zyklischen Gruppen der Periode 4 aufzuweisen hat.

Das Periodenschema läßt sich beim Übergang zur Orthogonalform nach (14) für das Hauptintegral reduzieren auf

(16) $$x,\ y, z;\quad -i\,x,\quad -i\,y,\quad i\,z$$

und für die Nebenintegrale ergänzen zu

(17) $$\begin{matrix} 0, & z, & y; & 0, & i\,z, & -i\,y \\ z, & 0, & x; & i\,z, & 0, & -i\,x. \end{matrix}$$

14. Algebraische Ausführungen zu Abschn. 12 u. 13

Die Fälle mehrfacher Reduzierbarkeit sind bereits durch die Reduktion des Hauptintegrals auf ein lemniskatisches Integral bestimmt. Es ist also

(1) $$\int \frac{d\,y}{\sqrt[4]{y^3(y-1)^2}}$$

durch eine rationale Funktion $y = r(x)$ in

(2) $$\int \frac{d\,x}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\ \sqrt[4]{(x-x_4)(x-x_5)}}$$

zu transformieren. Die hierbei möglichen Verzweigungsschemen lassen sich wie in Abschn. 1, (6), (7) notieren:

	m	$y = 0$	∞	1
	$4\,\mu$	$4\,\mu,$	$4\,(\mu-2)+2+3+3,$	$2\cdot(2\,\mu-1)+1+1$
	$4\,\mu+1$	$4\,(\mu-1)+2+3,$	$4\,(\mu-1)+2+3,$	$2\cdot 2\,\mu+1$
(3)	$4\,\mu+2$	$4\,\mu+2,$	$4\,(\mu-1)+3+3,$	$2\cdot 2\,\mu+1+1$
	$4\,\mu+3$	$4\,\mu+3,$	$4\,\mu+3,$	$2\cdot 2\,\mu+1+1+1$
		$4\,\mu+3,$	$4\,(\mu-1)+2+2+3,$	$2\cdot(2\,\mu+1)+1.$

Aus diesen Schemen gehen numerisch bestimmte Funktionen hervor, da die Verzweigungsstellen bei $y = 0, \infty, 1$ erschöpft sind.

Den resultierenden Werten für die Moduln von (2) entsprechen im transzendenten Raum die Darstellungen von m in der Tabelle von Abschn. 13, (5) bis auf die Fälle der Entartung des Gebildes, denen die Form $(1, 0, m)$ zugeordnet ist. Da aber das Integral (2) bei $x_5 = x_4$ oder $x_5 = x_3$ seine Gattung nicht ändert, lassen sich auch für die Fälle der Entartungen reduzierende Funktionen angeben:

$x_5 = x_3,$	$m,$	$y = 0,$	∞	1
	$4\,\mu$	$4\,\mu,$	$4\,(\mu-1)+3+1,$	$2\cdot(2\,\mu-1)+1+1$
(4)	$4\,\mu+1$	$4\,\mu+1,$	$4\,(\mu-1)+3+2,$	$2\cdot 2\,\mu+1$
	$4\,\mu+3$	$4\,\mu+3,$	$4\,\mu+2+1,$	$2\cdot(2\,\mu+1)+1.$

$x_5 = x_4$

(5)	$4\,\mu$	$4\,\mu,$	$4\,(\mu-1)+2+2,$	$2\cdot(2\,\mu-1)+1+1$
	$4\,\mu+2$	$4\,\mu+2,$	$4\,\mu+2,$	$2\cdot 2\,\mu-1+1.$

Die letzteren sind zusammengesetzt aus $y = x^2$ und einer Transformation des lemniskatischen Integrals, die keine komplexe Multiplikation liefert, so daß x_1, x_2, x_3, x_4 nicht mehr harmonisch liegen. An diesem extremen Fall wird das Auftreten von Ringklassenkörpern der Ordnung $m/2$ von $K(i)$ bei geradem m in den algebraischen Ausrechnungen unmittelbar ersichtlich [Abschn. 17, (18)].

Für die Induktion in der diophantischen Analysis sind die Fälle von Interesse, bei denen *die Polynome unter den Wurzeln in* (2) *rationale Koeffizienten erhalten*. Einzelne Fälle sind als solche algebraisch erkennbar wie $m = 3$ in (3)

$$(6) \qquad y = x^3, \quad \int \frac{3\,dx}{\sqrt{x^3-1}\,\sqrt[4]{x}}.$$

Da es sich um Diederpolynome handelt, ist (2, 1, 2) die zugehörige Form[11]). Eine hinreichende Bedingung ist, daß es nur eine reduzierte Darstellung von m durch H gibt, zu der die definite Form (A, B, C) gehört, oder zufolge Abschn. 13, (6) nur eine Darstellung von (A, B, C) durch H. Bei $m \equiv 0 \pmod{4}$ kann jedoch der Fall eintreten, daß es zwei Darstellungen gibt, von denen jede eine Lösung der vorgelegten Aufgabe erzeugt. An der Form (1, 0, 4) wird dies ersichtlich, deren Darstellungen verschiedene Entartungen des algebraischen Gebildes betreffen. Aus der Tabelle von Abschn. 13, (5) ergeben sich als Lösungen die Fälle $m = 2, 3, 4, 5$ ferner (2, 0, 3), $(3, 1 + i, 3)$, (2, 0, 5), $(4, 2 + i, 4)$. Darüber hinaus finden sich noch (3, 0, 5) und die beiden Darstellungen von (4, 0, 5). Die Begründung gibt die Darstellungstheorie von (A, B, C) durch H (Abschn. 17). Die Besonderheit des Falles $(2, 1 + i, 5)$ ist unter (13) vermerkt.

Für die Entartungen hat man[12]):

$$(7) \qquad (1, 0, 3),\ y = \frac{1}{4}\,x^2(x+3), \quad \int \frac{6\,dx}{\sqrt[4]{4x^2(x-1)^2(x+3)^3}}$$

$$(8) \qquad (1, 0, 4),\ y = -\frac{1}{27}\,x^3(x+4), \quad \int \frac{12\,dx}{\sqrt[4]{-3(x^2-2x+3)^2\,x(x+4)^3}}$$

$$(9) \qquad (1, 0, 4),\ y = x^2(x+2)^2, \quad \int \frac{4\,dx}{\sqrt{x(x+2)(x^2+2x-1)}}$$

$$(10) \qquad \begin{gathered} (1, 0, 5),\ y : y-1 : 1 = 4x^3(x-5)^2 : (x-6)(2x^2-4x-3)^2 : 27(5x+2), \\ \int \frac{60\,dx}{\sqrt[4]{12(x-5)^2(x-6)^2\,x(5x+2)^3}}. \end{gathered}$$

Die Fälle der quadratischen Reduktion lassen sich darauf zurückführen, da nach Einl. (4), $\nu = 1$ das Hauptintegral durch quadratische Reduktion in den Fall $x_5 = x_3$ übergeht. Wird in (7) und (10) x' statt x gesetzt, so hat man:

$$(7\text{a}) \qquad (2, 1, 2), \quad -x' = x + 1 + \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x^3-1} \quad \sqrt[4]{-4x}$$

$$(7\text{b}) \qquad (2, 0, 3), \quad \frac{x'+3}{x'} = x^2, \quad \sqrt{x(x^2-4)} \quad \sqrt[4]{12(x^2-1)}$$

[11]) Die Reduzierbarkeit dieses Gebildes ist bereits loc. cit. 1 unter (30b) erörtert.

[12]) Integrale dieser Art finden sich bereits in der Leidener Diss. von W. C. Post, 1917, Over de Reduktie van Abelsche integralen tot elliptische.

$$(10\text{a})\qquad (2,1,3),\ \frac{x'-6}{5x'+2} = -\frac{1}{27}(2x+1)^2,\ \sqrt{x(x+1)}\ \sqrt[4]{-4(x-4)(x+5)}$$

$$(10\text{b})\qquad (2,0,5),\ \frac{x'-5}{5x'+2} = -\frac{5}{32}x^2,\qquad \sqrt{5x^2+1}\ \sqrt[4]{-\frac{1}{5}(x^2-16)}\,.$$

Für (2, 1, 2) wurde bereits die kubische Reduktion in (6) gegeben. Bei der Herleitung aus (7) und (7a) ist die quadratische Transformation des lemniskatischen Integrals von Abschn. 1, (3) mit dieser zusammengesetzt. Entsprechend findet man für (2, 1, 3) aus (10) und (10a) die Reduktion fünften Grades

$$(11)\qquad y : 1 : y-1 = x^2(x+5)^3 : (x+1)^2(x-4)^3 : (5x^2+5x+8)^2.$$

(7a) und (7b) stellen dasselbe hyperelliptische Gebilde dar, indem der Parameter t von Abschn. 10, (1) zueinander reziproke Werte annimmt:

$$(7\text{c})\qquad t = \frac{3}{4}\ \text{bzw.}\ \frac{4}{3}\,.$$

Dasselbe gilt für (10a) und (10b):

$$(10\text{c})\qquad t = \frac{80}{81}\ \text{bzw.}\ \frac{81}{80}$$

und allgemein für je zwei Darstellungen der Formen $(2, 1, \nu)$ u. $(2, 0, 2\nu-1)$ und ihre Gebilde. Der Substitution $t' = t^{-1}$ entspricht nämlich zufolge Abschnitt 6, (12)

$$(12)\qquad \begin{aligned} \omega' &= \omega + \frac{1+i}{2} \\ u' &= (1+i)u + i\,w = (1+i)\left(u + i\,\frac{v}{2}\right) \\ v' &= (1+i)\,v \\ w' &= (1+i)\,w\,, \end{aligned}$$

eine Substitution, die $m = -H$ in den zweifachen Wert transformiert.

Aus (8) läßt sich auf den Fall $(2, 1+i, 5)$ schließen und die Berechnung des Parameters von Abschn. 10, (8) und des Polynoms nach Anm. 8 ergibt

$$(13)\qquad s = \frac{81}{32}\,,\ P' = (z^4 + 12z^2 + 4)(z^2 - z + 2)(z^2 + 8z + 2),$$

so daß beiden Darstellungen dasselbe hyperelliptische Gebilde zugrunde liegt.

Bei $(3, 1+i, 3)$ ist das zweite Schema für $m = 7$ in (3) zur Aufstellung der reduzierenden Funktion heranzuziehen, und man hat den Ansatz

$$(14)\qquad c\,y = (x+1)^3(x^2+a\,x+b)^2/x^3.$$

Die Differentiation ergibt die noch fehlenden Verzweigungsstellen

$$(15)\qquad 4x^3 + (2a+1)x^2 - a\,x - 3b = 0,$$

die gemäß dem Schema an derselben Stelle $y = 1$ liegen. Also besteht

$$(16)\quad (x+1)^3(x^2+a\,x+b)^2 - c\,x^3 = \frac{1}{16}\,[4x^3 + (2a+1)x^2 - a\,x - 3b]^2\left(x + \frac{16}{9}\right).$$

Durch Vergleich der Potenzen x^6 und x findet man eindeutig

$$(17)\qquad a = -\frac{13}{18}\,,\quad b = \frac{32}{81}$$

und nach Ausübung der Substitution $x = (7\,x' - 2)/9$ das Resultat

$$y : 1 : y - 1 = (x+1)^3 (2x^2 - 3x + 2)^2 : \frac{1}{16}(7x-2)^3 : (x+2)\left(2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$(18) \qquad (3, 1+i, 3), \quad \sqrt{(2x^2 - 3x + 2)(x+2)}\;\sqrt[4]{(x+1)(7x-2)}\,.$$

Der Fall $(4, 2+i, 4)$ geht aus dem ersten Schema für $m = 11$ in der Weise hervor, daß die drei voneinander verschiedenen Nullstellen bei $y = 0$ nicht mit denen bei $y = \infty$ in Involution liegen. Eine Ableitung nach einer diophantischen Methode wird im übernächsten Abschnitt gegeben.

15. Polygonecken und Randpunkte aus $K(i)$ mit rationalen Parameterwerten

Für die Lösung der vorgelegten Aufgabe von Abschn. 14 läßt sich auch die mehrfache Reduzierbarkeit des Gebildes auf lemniskatische Integrale heranziehen. Sobald der Reduktionsgrad n nur einmal in der Form (A, B, C) darstellbar ist, kann man schließen, daß das Parametersystem der reduzierenden Funktion rationale Werte annimmt. In den letztgenannten Fällen der Formen $(3, 1+i, 3)$ und $(4, 2+i, 4)$ existieren derartige Zahlen n nicht, da die Formen eine Transformation der Periode 2 bzw. 3 in sich besitzen, deren Fixpunkte nicht in $K(i)$ liegen. Indessen haben die weiteren Fälle der Formen $(3, 0, 5)$ und $(4, 0, 5)$ zwei Zahlen n der verlangten Art aufzuweisen. Zudem werden die Darstellungen von $m = 15$ und 20 durch $-H$, denen die Formen zugeordnet sind, in bereits bekannte Fälle transformiert, wenn man die Spiegelungen am Halbierungskreise der Polygone von Abschn. 7, Fig. 3, 5, 6 in Anwendung bringt. Der Parameter der reduzierenden Funktion ist hierbei einer linearen Substitution in rationalen Koeffizienten unterworfen, die den gesuchten rationalen Wert liefert. Das bereits im vorigen Abschnitt bei $n = 2$ angewendete Verfahren werde an der Form $(3, 0, 5)$ näher ausgeführt.

Bei $n = 3$ hat man als reduzierende Funktion

$$(1) \qquad y : 1 : y - 1 = x^2(x - \tau - 2) : -(2\tau + 1)\,x + \tau : (x-1)^2(x-\tau)$$

und das Gebilde

$$(2) \qquad \sqrt{x(x-\tau)}\;\sqrt[4]{(x - \tau - 2)\,[(2\tau+1)\,x - \tau]}.$$

Durch die simultanen Substitutionen

$$(3) \qquad y' = y^{-1}, \; x' = x^{-1}, \; \tau' = \tau^{-1}$$

werden (1) und (2) in sich transformiert. Der in Abschn. 10 benutzte Modul t ist bei (3) invariant und daher durch

$$(4) \qquad t = \frac{(\tau+1)^2}{\tau}$$

gegeben. Die Substitution von t, die der Spiegelung am Halbierungskreise von Abschn. 7, (11) entspricht, läßt sich bereits den Entwicklungen in Abschnitt 10, (23), (24) entnehmen:

$$(5) \qquad \bar{t}' = \frac{-t+4}{2t+1} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\tau}' = -\frac{\tau+2}{2\tau+1}\,.$$

Für den Fixpunkt $\tau = 1$ von (3) enthält das Gebilde (2) auch eine Reduktion vom Grade $n = 2$. Nach Abschn. 14, (7b) ist (2, 0, 3) die zugehörige Form. Ein zweites Gebilde von dieser Eigenschaft ergibt sich, wenn die Verzweigungsstelle $x = \infty$ in (2) zum Fixpunkt einer Involution gemacht wird. Wenn $-\tau x$ für x gesetzt wird, berechnet sich die Involution und der Parameter zu

$$x = -x' - 1, \quad \tau = -\tfrac{2}{5}. \tag{6}$$

Nach Abschn. 14, (10a) ist (2, 1, 3) die zugehörige Form. Der Wert τ von (6) in (5) eingesetzt, ergibt $\tau = -8$ und das gesuchte Gebilde

$$(3, 0, 5), \quad \sqrt{x(x+1)}\,\sqrt[4]{(3+4x)(1-15x)}. \tag{7}$$

Die Einzelheiten sind aus nachfolgender Tabelle zu ersehen:

$$n = 3, \quad u + v + w = 0, \quad u : v = \omega$$

	u,	v,	w,	$(A,\ B,\ C)$,	τ
(8)	-1,	1,	0	$(1,\ 0,\ 2)$,	-1
	-2,	1,	1	$(1,\ 0,\ 3)$,	-2
	$-1+i$,	1,	$-i$	$(1,\ 0,\ 1)$,	0
	$-2-i$,	$1+2i$,	$1-i$	$(2,\ 0,\ 3)$,	1
	$-1+2i$,	$1-i$,	$-i$	$(2,\ 1,\ 3)$,	$-2/5$
	$-1+4i$,	$2-2i$,	$-1-2i$	$(3,\ 0,\ 5)$,	-8.

Die drei Entartungen und der vierte Wert geben *die Ecken des Polygons* von Fig. 3, die zwei folgenden liegen *auf dem Rande desselben* und gehen durch die Substitution von Abschn. 7, (11) ineinander über.

Auf dieselbe Weise gewinnt man Tabellen für die Polygone in Fig. 5 und 6.

$$\text{I. Fall} \quad n = 5, \quad (1+i)(u+v) + w = 0,$$
$$u : v = \omega, \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega+4}{\omega-1}, \quad \bar{t}' = \frac{5^3}{t}.$$

	u,	v,	w	$(A,\ B,\ C)$,	t
(9)	$-1 \pm i$,	1,	$\pm(1-i)$	$(1,\ 0,\ 0)$,	$11 \pm 2i$
	-1,	1,	0	$(1,\ 0,\ 2)$,	∞
	-3,	2,	$1+i$	$(2,\ 0,\ 5)$,	0
	$-2-i$,	$1+i$,	$1+i$	$(1,\ 0,\ 4)$,	9
	$-3-2i$,	$2+3i$,	2	$(4,\ 0,\ 5)$,	$\frac{125}{9}$.

Die beiden letzten Werte sind Randpunkte und gehen durch die oben angegebene Spiegelung am Halbierungskreise ineinander über. Aus der Formel von Abschn. 1, (11) erhält man das Resultat

$$(4, 0, 5), \quad \sqrt{9x^2 + 32}\,\sqrt[4]{x^2 - 7x + 1}. \tag{10}$$

Für das Polygon von Fig. 6 ergibt sich die Tabelle

$$\text{II. Fall} \quad n = 5, \quad u + 2v + w = 0,$$
$$w : v = \omega, \quad \bar{\omega}' = -\frac{3\omega+2}{2\omega+3}, \quad \bar{t}' = \frac{-3t+4}{4t+3}. \tag{11}$$

u,	v,	w	$(A,\ B,\ C)$,	t
$-1 \mp i$,	1,	$-1 \pm i$	$(1,\ 0,\ 0)$,	$\pm i$
-1,	1,	-1	$(1,\ 0,\ 1)$,	∞
-3,	1,	1	$(1,\ 0,\ 5)$,	$-3/4$
-2,	1,	0	$(1,\ 0,\ 4)$,	-1
$-2-i$,	1,	i	$(1,\ 0,\ 3)$,	0
$-2+i$,	$1-i$,	i	$(2,\ 1,\ 3)$,	$2+2\,i/1-2\,i$
-4,	3,	-2	$(4,\ 0,\ 5)$,	-7
$-4+i$,	$3-2\,i$,	$-2+3\,i$	$(3,\ 0,\ 5)$,	$4/3$.

Aus dem vorletzten Wert für t erhält man nach Abschn. 1, (12) das Resultat

$$(12) \qquad (4, 0, 5), \quad \sqrt{x^2+16\,x+14}\,\sqrt[4]{(2\,x+1)\,(2\,x-35)}$$

und aus dem letzten Wert eine Kontrolle für (7). Der Wert $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$, dem die Form (2, 1, 3) angehört, ist kein Randpunkt des Polygons, liegt aber auf dem Halbierungskreise. Den Parameterwert kann man aus dem Additionstheorem der lemniskatischen Funktion

$$(13) \qquad \sqrt[4]{y} = \frac{\sqrt[4]{y_1(y_2-1)^2}+\sqrt[4]{y_2(y_1-1)^2}}{\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}}$$

herleiten, indem die reduzierenden Funktionen für $n = 3$ und 2 folgendermaßen eingesetzt werden:

$$(14) \qquad \sqrt{y_1} = 2\,x\sqrt{\frac{x-4}{-5(x+5)}}\,,\ \sqrt{y_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-4)(x+5)}{-5}}\,.$$

Daraus ergibt sich die reduzierende Funktion für $n = 5$

$$(15) \qquad \begin{gathered} y : 1 : y-1 = 4\,(x+5)\,(x-2-i)^4 : -5(x-4)\,(x+1)^2\,(2+i)^4 : \\ x\,[2\,x^2-(3+4\,i)\,x-29+28\,i]^2 \end{gathered}$$

und aus dieser der Wert von t.

Das Polygon für $n = 4$ wurde bisher nicht in Betracht gezogen. Dasselbe ist aber in einfachster Weise aus Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0$ zusammengesetzt und die Fälle der komplexen Multiplikation in $K(i)$, für die ein rationaler Wert des Parameters in Frage kommt, sind aus Abschn. 14, (7c), (10c) bekannt. Daraus gewinnt man folgende Tabelle

$$n = 4,\ u = 2\,w,\ v : w = \omega,$$

(16)

u,	v,	w	$(A,\ B,\ C)$,	t
0,	1,	0	$(1,\ 0,\ 0)$,	-1
-4,	1,	-2	$(1,\ 0,\ 4)$,	1
-4,	$1-2\,i$,	-2	$(1,\ 0,\ 4)$,	$-1/3$
$-2-2\,i$,	1,	$-1-i$	$(1,\ 0,\ 2)$,	0
-2,	1,	-1	$(1,\ 0,\ 3)$,	∞
-2,	$1-i$,	-1	$(2,\ 1,\ 2)$,	$-1/2$
-4,	3,	-2	$(4,\ 0,\ 5)$,	$-9/7$
-4,	$3-2\,i$,	-2	$(4,\ 0,\ 5)$,	$-9/11$.

Die Zerlegung des Polygons in zwei Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0$ wird zufolge Fig. 4 und Abschn. 10, (40) durch die Substitutionen

$$\bar{\omega}' = \omega - i, \quad t' = \frac{-t}{2t+1} \tag{17}$$

vermittelt. Bis auf die Koinzidenzen $\omega = \infty, -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ werden je zwei Werte in (16) durch (17) ineinander übergeführt, insbesondere die beiden Werte, denen die Form (4, 0, 5) angehört[13]). Diese gestatten eine Kontrolle von (10) und (12).

16. Einführung der Invarianten

Bei den bereits erwähnten Formen $(3, 1+i, 3)$ und $(4, 2+i, 4)$ gibt es auch für den niedrigsten Reduktionsgrad $n = 3$ bzw. 4 mehrfache Parameterwerte. Die Ermittlung der Polynome gelingt durch die bei linearer Transformation invarianten Größen, die rationale Werte erhalten, wenn dies für die Koeffizienten des quadratischen und kubischen Polynoms gilt. Die Polynome werden wie zuvor mit

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d, \quad \alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma \tag{1}$$

bezeichnet. Die vier geraden Invarianten, aus denen zwei absolute Invarianten gebildet werden können, stellen sich nach G. Salmon dar[14]):

$$D(4,0) = b^2c^2 - 4\,a\,c^3 - 4\,b^3d + 18\,a\,b\,c\,d - 27\,a^2d^2$$

$$\Delta(0,2) = \frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma \qquad R(2,3) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}. \tag{2}$$

$$J(2,1) = \begin{vmatrix} 3a & b & c \\ b & c & 3d \\ \alpha & \frac{1}{2}\beta & \gamma \end{vmatrix}$$

---

[13]) Dem rationalen Vorkommnis liegen allgemeinere Gesetzmäßigkeiten zugrunde. Wird die Gruppe der Dreiecksfunktion mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0$ durch $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erzeugt, so sind durch die Substitutionen mit der Determinante 2 je zwei der h Formenklassen eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers, die modulo 4 oder 8 entgegengesetzte Charaktere haben, einander zugeordnet, indem es unter den die Formen darstellenden Punkten ineinander transformierbare gibt. Der Wert von s in Abschn. 10, (8) gehört alsdann einem Unterkörper des Klassenkörpers vom Grade $h/2$ an. Für diese Zahlen lassen sich Sätze aufstellen, die die Sätze über die singulären Werte wesentlich ergänzen. So gibt es für die imaginär-quadratischen Grundkörper $K(i\sqrt{p})$, wenn $p \equiv 5 \pmod{8}$ und eine Primzahl ist, eine ganze Zahl ξ aus dem Unterkörper ungeraden Grades des Klassenkörpers, für die

$$s = -4\,\xi^4 \quad \text{und} \quad p(4\,\xi^4 + 1) = \text{Quadrat}$$

erfüllt ist. Sodann ist die Gleichung für jedes p in rationalen Zahlen lösbar und es folgt der loc. cit. 1 oberhalb der Tab. 7 genannte Satz. Zum Beweise läßt sich auch der Grundkörper $K(i\sqrt{2p})$ heranziehen. Da jedes Geschlecht der Zahlkörper $i\sqrt{5}, i\sqrt{13}, i\sqrt{37}$, und $i\sqrt{10}, i\sqrt{58}$ nur eine Klasse hat, werden die in der Tabelle angegebenen Lösungen sogar unmittelbar erzeugt.

Bemerkenswert ist ein dritter Beweis, bei welchem nur $K(i)$ zugrunde gelegt und der Ringklassenkörper der Ordnung p eingeführt wird. Um an den Modul t in (16) oben anzuknüpfen, so liegen die Wurzeln $\sqrt{t(3t+1)}$, $\sqrt{-2t(t+1)}$, $\sqrt{p\,t(t-1)}$ im Unterkörper ungeraden Grades. Die Rationalisierung $t = \frac{-(\eta^2+2)^2}{3\eta^4 - 4\eta^2 + 12}$ ergibt $p(\eta^4 + 4) = \text{Quadrat}$.

[14]) Vorles. über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearb. v. W. Fiedler, 2. Aufl. S. 243, Leipzig: Teubner 1877.

Nach Abschn. 1, (10) findet man für $n = 3$

(3) $$\frac{J}{\sqrt{D\Delta}} = 1 - \frac{3}{t}, \quad \frac{R}{\Delta\sqrt{D\Delta}} = \frac{4}{t^2}\left(2 + \frac{1}{t}\right).$$

Die Annahme, daß die Invarianten rationale Werte haben und der Parameter einer quadratischen Gleichung genügt, führt zu dem Ansatz

(4) $$1 - \frac{3}{t} = \sqrt{r},$$

in welchem r als rationale nichtquadratische Zahl gedacht ist. Daraus folgt

(5) $$\frac{27}{4}\,\frac{R}{\Delta\sqrt{D\Delta}} = \left(1 - \sqrt{r}\right)^2\left(7 - \sqrt{r}\right) = 7 + 9\,r - \sqrt{r}\;(15 + r).$$

Indem der rationale Anteil verschwinden muß, erhält man als einzige Lösung

(6) $$r = \frac{J^2}{D\Delta} = -\frac{7}{9}, \quad \frac{R}{JD} = -\frac{2^9}{3^5}.$$

Diese Werte ergeben sich auch aus den in Abschn. 14, (18) für die Form $(3, 1 + i, 3)$ erhaltenen Polynomen.

Weniger einfach gestaltet sich die Auffindung der Polynome für die Form $(4, 2 + i, 4)$. Dennoch darf die nähere Ausführung in methodischer Hinsicht Interesse beanspruchen. Man hat bei $n = 4$

(6) $$r = \frac{J^2}{D\Delta} = \frac{(14t^2 + 16t + 3)^2}{4t^2(t^2 - 1)}.$$

Das gesuchte r ist eine rationale Zahl und t genügt einer kubischen Gleichung. Da t in (6) bis zum vierten Grade ansteigt, gibt es noch einen rationalen Wert von t, der r erzeugt. Der kubische Zahlkörper ist auch durch die kubische Resolvente von (6) gegeben. Als solche[15]) findet man

(7) $$\xi^3 + 2\,\xi^2 + r'\,\xi - r' = 0, \qquad r + 3 = 16\,r'.$$

Daß der kubische Körper zyklisch über $K(i)$ ist, läßt sich bereits daraus schließen, daß nicht nur $n = 4$, sondern auch $n = 6$ durch die Form nur dreimal dargestellt wird, also derselbe Körper auftritt, während bei der Herleitung der reduzierenden Funktionen aus dem Additionstheorem nach Abschnitt 15, (13) auch Zahlen aus $K(i)$ eingehen. Daher ist die Diskriminante von (7) das -1-fache einer Quadratzahl und man hat die diophantische Gleichung

(8) $$r'(4\,r'^2 + 59\,r' - 32) = \text{Quadrat}.$$

Diese hat eine Grundlösung $r' = -\frac{1}{2}$, aus der sich eine Kette unendlich vieler Lösungen ableiten läßt. Außer den Kubaturen, bei denen (7) reduzibel wird, erzeugen diese denselben Körper, der sich als kubischer Unterkörper des Ringklassenkörpers der Ordnung 11 von $K(i)$ herausstellt. Die einfachsten Lösungen sind

(9) $$r' = -\frac{1}{2},\ 16,\ \frac{9}{4},\ -\frac{32}{9} \quad \text{bzw.} \quad r = -11,\ 11\cdot 23,\ 33,\ -\frac{11\cdot 7^2}{9},$$

---

[15]) Am einfachsten ergibt sich diese aus der Verwandtschaft

$$(t^2 - 1)\,s^2 + (14\,t^2 + 16\,t + 3)\,s + r\,t^2 = 0,$$

indem man nach t ausrechnet und das kubische Polynom unter der Wurzel durch $s = 4\,\xi - 1$ substituiert.

aber erst der vierte Wert ist durch einen rationalen Wert $t = -\frac{1}{10}$ in (6) erzeugbar. Die Seltenheit dieses Vorkommnisses leuchtet ein, wenn man in die Bedingung (8) den Parameter t einführt, wodurch ein hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ erhalten wird. Daher ist die Annahme berechtigt, daß dieser Wert der gesuchte ist. Zunächst ergibt sich aus (6)

$$8 \cdot 7^2 t^3 + 4 \cdot 7 \cdot 13\, t^2 + 2 \cdot 3^3 t + 3^4 = 0. \tag{10}$$

Die Annahme findet darin ihre Bestätigung, daß auch die zweite absolute Invariante rational ausfällt:

$$\frac{J\Delta}{R} = \frac{t^2(t-1)(14t^2+16t+3)}{3t+1} = -\frac{11 \cdot 3^5}{14^3}, \tag{11}$$

und den vier Invarianten in (2) sind die Werte

$$D = -4 \cdot 11^2,\ \Delta = 11 \cdot 3^4,\ J = -11^2 \cdot 42,\ R = 11^2 \cdot 14^4 \tag{12}$$

zu erteilen. Die Bestimmung der Polynome aus einer der typischen Darstellungen[16]) ist numerisch weitläufig. Ein arithmetisches Verfahren ist vorzuziehen. Als kubisches Polynom läßt sich nach (7) u. (9), $(r' = 16,\ \xi = -2x)$

$$x^3 - x^2 + 4x + 2 \tag{13}$$

ansetzen. Für dasselbe gilt

$$\equiv (x-4)^3 \qquad (\text{mod. } 11), \tag{14}$$

$$\equiv (x-2)(x^2+x-1) \qquad (\text{mod. } 7). \tag{15}$$

Vermöge (14) hat man für das quadratische Polynom den Ansatz

$$u\,x^2 - 2(4u + 11v)\,x + 5u + 11w, \tag{16}$$

in welchem u, v, w ganze natürliche Zahlen bedeuten. Aus (16) und (13) folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= 11(u^2 + 8uv + 11v^2 - uw) = 11 \cdot 3^4 \\ J &= 11^2(u + 2v + w) = -11^2 \cdot 42 \\ 3(u + 2v - 7)^2 &- (u + v - 42)^2 = -3 \cdot 2^9. \end{aligned} \tag{17}$$

Die letzte Gleichung hat als einfachste ganzzahlige Lösungen

$$\begin{aligned} u + 2v - 7 &= \pm 16 \\ u + v - 42 &= \pm 48. \end{aligned} \tag{18}$$

Aus (15), (16), (17) ergibt sich $u \equiv v$ (mod. 7) und in (18) sind gleiche Vorzeichen zu wählen. Das negative entfällt, da u, v, w durch 3 teilbar werden. Somit verbleibt das quadratische Polynom

$$157\,x^2 + 218\,x + 70, \tag{19}$$

das $\equiv x^2(x-2)^2(2x+3)^2$ ist, wenn (13) als Modul genommen wird, also die Norm R in (12) hat. Das Endresultat

$$(4, 2 + i, 4), \quad \sqrt{3x^3 + 16x^2 + 15x + 4}\ \sqrt[4]{x^2 - 60x + 9} \tag{20}$$

---

[16]) A. Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen, § 97. Leipzig: Teubner 1872.

ist auch leicht zu verifizieren. Denn es ist

$$(21)\qquad 3x^3 + 16x^2 + 15x + 4 \equiv 22\,(3x-1)^2 \quad (\text{mod. } x^2 - 60x + 9).$$

17. Darstellung binärer Hermitescher Formen durch H

Die Darstellungstheorie ganzer Zahlen durch H findet dadurch ihren Abschluß, daß auch die Darstellung binärer Hermitescher Formen durch H in Betracht gezogen wird. Nach Abschn. 3, (9)—(11) entspricht jeder Darstellung von n eine Darstellung einer binären Hermiteschen Form (A, B, C) mit der Determinante $D = n$. Dieser Satz ist nur eine Ausdehnung des Gaußschen Satzes über ternäre Formen auf die spezielle Hermitesche Form H. Als Grundlage der Untersuchung dient der Satz, daß jede ternäre indefinite Hermitesche Form mit der Determinante -1 äquivalent mit H ist[17]). Stellt eine solche Form die binäre Form (A, B, C) eigentlich dar, so läßt sie sich in

$$(1)\qquad A\,x\,\bar{x} + B\,x\,\bar{y} + \bar{B}\,\bar{x}\,y + C\,y\,\bar{y} + P\,x\,\bar{z} + \bar{P}\,\bar{x}\,z + Q\,y\,\bar{z} + \bar{Q}\,\bar{y}\,z + R\,z\,\bar{z}$$

transformieren und es besteht

$$(2)\qquad D\,R + A\,Q\,\bar{Q} - B\,Q\,\bar{P} - \bar{B}\,\bar{Q}\,P + C\,P\,\bar{P} = 1.$$

Da (1) mit H äquivalent ist, vermittelt $z = 0$ auch eine eigentliche Darstellung von (A, B, C) durch H. Zufolge (2) hat (A, B, C) keinen Teiler. Die Form kann man reduziert ansetzen, die Reduktionen von P und Q sind durch die Substitutionen

$$(3)\qquad x = x' + \eta\,z, \quad y = y' + \vartheta\,z$$

gegeben, in denen η und ϑ ganze Zahlen aus $K(i)$ bedeuten. Es ist

$$(4)\qquad \begin{aligned} P' &= P + A\,\bar{\eta} + B\,\bar{\vartheta} \\ Q' &= Q + \bar{B}\,\bar{\eta} + C\,\bar{\vartheta}, \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$(5)\qquad A\,Q' - \bar{B}\,P' \equiv A\,Q - \bar{B}\,P \equiv \xi \quad (\text{mod. } D).$$

Bei Aufstellung der Kongruenz für ξ darf A prim zu D angenommen werden, und man erhält aus (2)

$$(6)\qquad \xi\,\bar{\xi} \equiv A \quad (\text{mod. } D).$$

Umgekehrt zeigt man, daß jeder Lösung von (6) äquivalente Formen in (1) zugeordnet sind. Ferner folgt aus der Substitution

$$(7)\qquad z = i\,z',$$

daß auch die den Lösungen

$$(8)\qquad \xi,\ i\,\xi,\ -\xi,\ -i\,\xi$$

zugeordneten Formen untereinander äquivalent sind. Unter Berücksichtigung von (8) ergibt sich aus der Kongruenz (6) als Darstellungsanzahl von (A, B, C)

[17]) Ein elementarer Beweis ist durch Übertragung der Ausführungen bei C. F. Gauss, Dis. Arith. Abschn. V, § 272—277 auf Hermitesche Formen gegeben.

durch H bei $D \equiv 0 \pmod{4}$ die Ringklassenzahl der Ordnung D von $K(i)$ und bei $D \equiv 1 \pmod{2}$ und $D \equiv 2 \pmod{4}$ die Hälfte dieser Zahl[18]). Bei $D = \pm 2$ tritt die Besonderheit ein, daß je zwei Lösungen von (8) zusammenfallen. Eine weitere Reduktion der Darstellungsanzahl tritt dadurch ein, daß nicht jeder Automorphismus von (A, B, C) sich zu einem solchen für die Form (1) ergänzen läßt. In diesem Falle ist die genannte Anzahl durch den Index der Untergruppe der ergänzungsfähigen Automorphismen zu dividieren, um die endgültige *Anzahl der Darstellungen von* (A, B, C) *durch* H zu erhalten.

Bei indefiniter Form (A, B, C) ist die bereits in Abschn. 3 erwähnte Untergruppe zu ermitteln. Die Reduktion der Formen ist durch den Klassenzahlsatz[18]) gegeben. Bei $D = n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$ existiert nur eine Klasse, und die Form läßt sich auf

$$x\,\bar{x} - n\,y\,\bar{y} \tag{9}$$

reduzieren. Bei $n = 4\nu + 1$ treten die Formen zweiter Art hinzu, die nur gerade Zahlen darstellen. Als reduzierte Form hat man

$$2x\,\bar{x} + x\,\bar{y} + \bar{x}\,y - 2\nu\,y\,\bar{y}. \tag{10}$$

Um die Ableitung an (9) zu vollziehen, setzen wir die Formel für die reproduzierende Gruppe

$$\begin{aligned} x &= T x' + n\,\bar{U}\,y' \\ y &= U x' + \bar{T} y', \end{aligned} \qquad T\bar{T} - n\,U\bar{U} = 1 \tag{11}$$

in (1) ein, wobei die Spezialisierung

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -n \tag{12}$$

vorzunehmen ist. Alsdann erhält man

$$Q' = n\,P\,\bar{U} + Q\,\bar{T} \tag{13}$$

und aus (5) und (13)

$$Q \equiv \xi, \; \xi' \equiv \xi\,\bar{T} \pmod{n}. \tag{14}$$

Vermöge (3) läßt sich (11) zu einem Automorphismus von (1) nur dann ergänzen, wenn dieselbe Kongruenzwurzel erhalten wird. Für die gesuchte Untergruppe gilt daher

$$T \equiv 1 \pmod{n}, \tag{15}$$

hingegen für die vollständige reproduzierende Gruppe von (9) zufolge (11)

$$T\,\bar{T} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{16}$$

Nach dem Satz über das Grundproblem der Kongruenzgruppen[18]) existieren auch für jede Kongruenzwurzel von (16) reproduzierende Substitutionen, so

[18]) Eine Behandlung der Kongruenz (6) findet sich in meiner Arbeit: Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen, Math. Z. **43**, 161—204 (1937) und 321—352, ferner **44**, 555—567 (1938), und zwar in Teil I, Abschn. 3. Die folgenden Zitate aus dieser Arbeit betreffend das Grundproblem der Kongruenzgruppen und den Klassenzahlsatz der binären indefiniten Hermiteschen Formen findet sich in Teil I, Abschn. 7 bzw. 10 und in Teil II, Abschn. 7. Die Voraussetzungen bei den Beweisen sind jedoch daselbst teilweise andere.

daß ξ' in (14) sämtliche Wurzeln von (6) durchläuft. Daraus ergibt sich der Satz:

Die indefinite Hermitesche Form $(1, 0, -n)$ *hat nur eine Darstellung durch* H; und der angekündigte Satz:

Sämtliche Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $n \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$ *durch* H *sind untereinander äquivalent.*

Bei $n \equiv 1 \pmod 4$ treten die durch den algebraischen Ansatz nach Abschnitt 1 indizierten zwei Klassen auf, die den Formen (9) und (10) entsprechen.

Im Falle der definiten Formen ergibt die Substitution nach (3), die P und Q zum Verschwinden bringt, daß (A, B, C) stets positiv ist. Zur Bestimmung der reproduzierenden Gruppe von (A, B, C) ist der Diskontinuitätsbereich der binären unimodularen Gruppe in $K(i)$ im Halbraum heranzuziehen[19]). Metazyklische Gruppen treten auf, wenn der repräsentierende Punkt der Form mit einer der drei im Endlichen liegenden Ecken des Tetraeders äquivalent ist. Die beiden Fälle der diedrischen Ecken sind in Abschnitt 13, (7)—(15) diskutiert. Die oktaedrische Ecke repräsentiert eine Form $(2, 1+i, 2)$ mit dem Teiler $1+i$, die durch H nicht dargestellt wird. Der Fall der zyklischen Gruppe ist gegeben, wenn der repräsentierende Punkt der Form (A, B, C) auf einer Kante des Tetraeders zu liegen kommt. Entsprechend den sechs Kanten findet man folgende Tabelle

		$(A,$	$B,$	$C)$	Periode
	a)	$(\lambda,$	$0,$	$\mu)$	4
	b)	$(2\lambda,$	$(1+i)\lambda,$	$\mu)$	4
(17)	c)	$(2\lambda,$	$\lambda + i\mu,$	$2\lambda)$	3
	d)	$(2\lambda,$	$\lambda,$	$\mu)$	2
	e)	$(\lambda,$	$\mu,$	$\lambda)$	2
	f)	$(\lambda,$	$(1+i)\mu,$	$\lambda)$	2,

in der λ und μ reell und die Formen reduziert anzunehmen sind. Der oben erwähnte Index ist im allgemeinen gleich der Periode der zyklischen Gruppe. Im Fall a) bei $\lambda = 2$ und im Falle b) bei $\lambda = 1$ erniedrigt er sich auf den Wert 2 und im Falle a) und d) bei $\lambda = 1$ auf den Wert 1. Nach diesen Angaben läßt sich die Anzahl der wesentlich verschiedenen Darstellungen einer definiten Form durch H in jedem Falle berechnen.

Der Zusammenhang dieser Theorie mit dem Auftreten der Ringklassenkörper von $K(i)$ bei mehrfacher Reduzierbarkeit ist durch die Betrachtung sämtlicher reduzierbaren Integrale nach Abschn. 12, (3) gegeben, und zwar hat, wenn $m = -D$ nach Abschn. 12, (2) definiert ist, der Ring die Ordnung m oder $m/2$, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Bei dem Beweise geht man von einem Periodenschema aus, das die Perioden sämtlicher reduzierbaren Integrale ohne Teiler erzeugt. Bei ungeradem m genügt das der ternären Form von Abschn. 12, (3) zugehörige Periodenschema der Forderung, bei

[19]) R. Fricke u. F. Klein: Automorphe Funktionen, Bd. 1. Leipzig: Teubner 1897. Die Picardsche Gruppe, S. 77—90.

geradem m ist der Teiler 2 zu entfernen. Alsdann sind die Determinanten zweiten Grades in der Matrix

$$\frac{i}{2}\begin{vmatrix}\omega_1 \dots \omega_s \\ \overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_s\end{vmatrix} \tag{18}$$

auf gemeinsame Teiler zu untersuchen. Bei jedem Integral, dessen Periodendeterminanten (18) einen gemeinsamen Teiler aufzuweisen haben, ist die reduzierende rationale Funktion mit einer Transformation des lemniskatischen Integrals vom Grade des Teilers zusammengesetzt, die das Auftreten von Ringklassenkörpern begründet. Die Analyse des durch (18) gegebenen Kongruenzsystems führt zu dem oben genannten Resultat, daß der Teiler in m bzw. $m/2$ aufgehen muß.

Die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (6) ist bei ungeradem m durch die halbe Ringklassenzahl gegeben. Für die Teilschar der Nebenintegrale ergibt sich daraus, daß bei der Aufstellung der reduzierbaren Integrale ein Unterkörper dieses Grades aus dem Ringklassenkörper hinreichend ist. Bei geradem m findet für die Nebenintegrale derartiges nicht statt, indem der Ringklassenkörper der Ordnung $m/2$ auftritt. Bei $m \equiv 0$ (mod. 4) beträgt zwar die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (6) das Doppelte. Jedoch gilt nach (6) $n \equiv 1$ (mod 4) für die durch (A, B, C) dargestellten ungeraden Zahlen n, und es treten Reduzibilitäten auf, die bereits aus dem algebraischen Ansatz nach Abschn. 1, (6a, b) erkennbar sind.

18. Die Transformation modulo $(1 + i)$

Bei den binären Hermiteschen Formen von der Determinante $D = -2$ und dem Teiler $1 + i$ ist die reproduzierende Gruppe oktaedrisch. Zufolge des Teilers sind diese durch H nicht darstellbar. Es steht aber nichts im Wege, eine ternäre Form anzuschreiben, die eine solche Form darstellt und in H durch lineare Transformation mit Koeffizienten aus $K(i)$ übergeht. So wird die Orthogonalform von Abschn. 13, (15) durch

$$x = (1 + i)\, x' + y \tag{1}$$

transformiert in

$$2\, x\, \overline{x} + (1 + i)\, x\, \overline{y} + (1 - i)\, \overline{x}\, y + 2\, y\, \overline{y} - z\, \overline{z}. \tag{2}$$

Für die Automorphismengruppe von (2) definiert $z = 0$ eine erweiterte oktaedrische Untergruppe der Ordnung 96. Die Form (2) ist mit

$$H_2 = (1 + i)\, x\, \overline{y} + (1 - i)\, \overline{x}\, y + z\, \overline{z} \tag{3}$$

äquivalent. H_2 läßt sich in derselben Weise arithmetisch untersuchen wie H, und man gelangt zu demselben Ergebnis, daß die reproduzierende Gruppe von H_2 durch drei Substitutionen erzeugt werden kann:

$$\begin{array}{llll} & x' = y\,, & x + (1 + i)\, y, & x - y + i\, z \\ \text{(4a, b, c)} & y' = i\, x, & y\,, & y \\ & z' = z\,, & z\,, & (1 + i)\, y + z. \end{array}$$

Bei den nachfolgenden Ausführungen wird neben der binären Oktaedergruppe die bereits in Abschn. 7 aufgetretene Gruppe des Dreiecks $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ herangezogen. Diese Untergruppe ist gegeben, wenn in (2)

$$z = 2\,y \tag{5}$$

gesetzt wird[20]). Vermittels dieser Untergruppen läßt sich die Gruppe (4) in eine Gestalt setzen, die ihre besonderen Eigenschaften als Erweiterung der Transformationsgruppe von H modulo $(1 + i)$ erkennen läßt. Die in Abschn. 7, (8) vorgenommene Erweiterung im binären Gebiet wird auf das ternäre Gebiet übertragen durch die Substitution von der Periode vier und der Determinante $-(1-i)^3$

$$\begin{aligned} u' &= u + i\,v \\ v' &= i\,u + v \\ w' &= (1+i)\,w, \end{aligned} \qquad V_1^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

die sowohl H als auch die Relation

$$u + v + w = 0 \tag{7}$$

bis auf Zahlfaktoren reproduziert. Als zweite Erzeugende der Dreiecksgruppe im ternären Gebiet hat man die unimodulare Substitution der Periode vier von Abschn. 6, (2) und (3)

$$\begin{aligned} u' &= u - (1-i)\,v + (1-i)\,w \\ v' &= v \\ w' &= \phantom{u -{}} (1-i)\,v + i\,w, \end{aligned} \qquad V_3(1-i)\,V_2(1)\,V_0^{-1}, \tag{8}$$

die v und $u + w$ unverändert läßt, also auch

$$u - v + w = 0 \qquad (D = -1). \tag{9}$$

(6), (8) und V_0 werden durch die Substitution

$$u = (1+i)\,x + i\,y, \;\; v = y, \;\; w = z \tag{10}$$

in unimodulare Substitutionen transformiert, die H_2 in (3) reproduzieren. Die Zusammensetzung von (6) und V_0 ergibt eine zweite Substitution, die (9) unverändert läßt. Die Dublikatur $V_0^2\,V_1$ erzeugt mit (8) die Gruppe der Ordnung 32 in Abschn. 13, (10)—(14) und $V_0\,V_1^{\frac{1}{2}}$ selbst die oben genannte Gruppe der Ordnung 96. Aus (4a) läßt sich erschließen, daß die Periode von V_0 innerhalb der Gruppe verdopplungsfähig ist:

$$\begin{aligned} u' &= -u + 3\,i\,v \\ v' &= i\,u + v \\ w' &= (1+i)\,w, \end{aligned} \qquad V_0^{\frac{1}{2}} = V_2(2)\,V_1^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

---

[20]) In $x : y = \omega$ erhält man die unimodularen Spiegelungen

$$\omega' + i\,\overline{\omega} = 0, \;\; \omega' + \overline{\omega} + 1 = 0, \;\; i\,\omega'\overline{\omega} + \omega' - \overline{\omega} = 0.$$

Alsdann ergibt sich aus (4) der Satz:
Die Gruppe von H_2 wird in den Variabeln von H durch $V_2(2)$, (6), (8) vollständig erzeugt und die Transformationsgruppe modulo $(1+i)$ als Untergruppe der unimodularen Substitutionen durch V_0, V_1, $V_2(2)$, (8).

Die Zusammensetzung von (6) und (8) als Erzeugende der Dreiecksgruppe ergibt eine Substitution der Periode drei und der Determinante $(1+i)^3$, ein Vorkommnis, das bei den Erweiterungen der Transformationsgruppen der elliptischen Modulfunktion nicht eintreten kann. Die vorliegende T-Gruppe hat daher bezüglich ihrer Erweiterung mindestens den Index drei. Derselbe Schluß ergibt sich aus der Gruppe der Ordnung 96, von der die T-Gruppe die Untergruppe der Ordnung 32 enthält. Auch die Gruppe von H hat Substitutionen der Periode 3, die nicht in der T-Gruppe enthalten sind, nämlich $V_0 V_1 V_2(1)$ und $V_1 V_3(1+i)$. Zudem hat die Hauptkongruenzgruppe modulo $(1+i)$ für beide Formen H und H_2 den Index 6, wobei die Faktorgruppe diedrisch ist. Andererseits lassen sich in beiden Gruppen Substitutionen nachweisen, die der T-Gruppe angehören und modulo $(1+i)$ sich nicht auf die Einheit reduzieren, nämlich V_1 und die durch (10) transformierte Substitution (8). Daraus folgt, daß die T-Gruppe bezüglich beider Gruppen den Index 3 hat, und weiterhin der Satz:

Die reproduzierenden Gruppen von H und H_2 haben denselben hyperbolischen Inhalt, obschon die zugehörigen Modulfunktionen voneinander verschieden sind.

Die algebraischen Ausführungen knüpfen zunächst an das Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ an. In der Normierung

$$\sqrt{x^2-1}\;\sqrt[4]{x^2+2\sqrt{q}\,x+p} \tag{12}$$

bilden p und q ein Modulsystem der Transformation modulo $(1+i)$. Eine Wurzel des kubischen Polynoms unter der Quadratwurzel liegt bei $x = \infty$. Durch $x = x'\sqrt{q}$ wird eine rationale Gestalt erhalten, so daß die in Abschn. 16, (2) eingeführten Invarianten rationale Funktionen von p und q werden, und es ist

$$\frac{D\Delta}{J^3} = \frac{4(q-p)}{(p+3)^2}, \qquad \frac{DR}{4J^3} = \frac{4q-(p+1)^2}{(p+3)^3}. \tag{13}$$

Daraus ergibt sich die kubische Gleichung in p

$$\frac{DR}{4J^3} = \frac{D\Delta}{J^2(p+3)} - \frac{(p-1)^2}{(p+3)^3}, \tag{14}$$

die durch die lineare Substitution

$$\frac{p-1}{p+3} = \frac{\xi}{J} \qquad \text{oder} \qquad p+3 = \frac{-4J}{\xi - J} \tag{15}$$

in

$$(\xi - J)(\xi^2 - D\Delta) - DR = 0 \tag{16}$$

transformiert wird. Die Diskriminante von (16) ist

$$DM^2(4,3), \tag{17}$$

wobei M die schiefe Invariante der Polynome bedeutet.

Die Abhängigkeit von den Moduln der zu H_2 gehörigen automorphen Funktion stellt sich durch eine entsprechende kubische Gleichung in p oder q dar. Das Galoissystem von (16) geht hervor, wenn für q ein Quadrat gesetzt wird. Das Galoissystem der aufzustellenden kubischen Gleichung kann nur durch eine Quadratwurzel gegeben sein, die bereits im nächsthöheren Galoissystem von (12) enthalten ist. In diesem oktaedrischen System gibt es nur eine Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion in p und q, nämlich:

(18) $$\sqrt{R} = \sqrt{(p+1)^2 - 4q}.$$

Die Rationalisierung wird in homogenen Variabeln

(19) $$p + 1 = (A + C) : B \qquad q = A \cdot C : B^2$$

vorgenommen. Die Vertauschung von A und C stellt einen Automorphismus des gesuchten Galoissystems dar. Jedoch ist es nicht möglich, durch eine Korrespondenz zwischen den Gebilden (12) einen weiteren Automorphismus zu finden. Hierzu bedarf es eines Überganges in das Gebiet zweier Veränderlicher, worüber im letzten Abschnitt einige Andeutungen zu finden sind. Bei der nachfolgenden Herleitung setzen wir voraus, daß der in (2) nachgewiesenen binären Oktaedergruppe im algebraischen Raum modulo 2 ein Oktaedersystem zugeordnet ist, das rational auf den Oktaedermodul der binären Gruppe reduzierbar ist. Eine der Quadratwurzeln, die vom Diedermodul der kubischen Resolvente auf den Oktaedermodul führen, ist alsdann in dem erwähnten zu H gehörigen Oktaedersystem enthalten. Daher ist vorerst dieses System aufzustellen, das dadurch definiert ist, daß jede Wurzel des kubischen Polynoms von (12), eingesetzt in das quadratische Polynom, ein Quadrat ergibt[21]). Bei $x = \pm 1$ nimmt das Polynom die Werte

(20) $$p + 1 \pm 2\sqrt{q} = (\sqrt{A} \pm \sqrt{C})^2 : B$$

an, und für das zu H gehörige Oktaedersystem sind die Wurzelziehungen

(21) $$\sqrt{A} : \sqrt{B} : \sqrt{C}$$

erforderlich. Wählt man $A : C$ als Diedermodul, so erfüllen die Automorphismen

(22) $$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & C & A-C & -A+C & -A & -C \\ B & B & B-C & -A+B & -A+B & B-C \\ C & A & -C & -A & -A+C & A-C \end{array}$$

die Bedingungen, indem

(23) $$\sqrt{A} : \sqrt{A-C} : \sqrt{C}$$

den Oktaedermodul definieren und eine Quadratwurzel aus (21) enthalten. Zur Bestätigung dient der Modul der Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Indem

[21]) Hierdurch werden die Wurzeln des hyperelliptischen Polynoms, die in Involution liegen, rational. Setzt man auch die Wurzeln des quadratischen Polynoms rational an, so wird das Galoissystem modulo 2 von Abschn. 2, (3) erhalten.

die Formel für den dritten Reduktionsgrad in Abschn. 1, (10) auf die Normierung (12) gebracht wird, erhält man

$$(24)\qquad p = -t,\quad q = \tfrac{1}{4}\,t(t-4),\quad \sqrt{R} = \sqrt{2t+1}\,.$$

Die Rationalisierung der Wurzel gibt den Diedermodul der kubischen Funktion von Abschn. 10, (23):

$$(25)\qquad t = 2\lambda(\lambda-1),\quad A:C:A-C = \lambda(\lambda-2):\lambda^2-1:-2\lambda+1,$$

und λ substituiert sich mit $A:C$ diedrisch.

Alsdann hat man, wenn

$$(26)\qquad (X-B)(X-B+A)(X-B+C) = X^3 + K_1X^2 + K_2X + K_3$$

gesetzt wird, *in K_1, K_2, K_3 ein erststufiges Modulsystem der zu H_2 gehörigen Modulfunktion.* Die (13) entsprechenden Gleichungen sind

$$(27)\qquad \frac{K_2}{K_1^2} = \frac{q-2p+1}{(p-2)^2},\qquad \frac{K_3}{K_1^3} = \frac{p-q}{(p-2)^3},$$

womit die Aufstellung *der Transformationsgleichung modulo* $(1+i)$ geleistet ist. Zudem folgt aus (24) und (27), daß für die Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ den Koeffizienten in (26) die Werte erteilt werden können:

$$(28)\qquad K_1 = 6,\quad K_2 = 9,\quad K_3 = 54\,t^2 : (t+2)^3 = 4\,\varrho,$$

wobei ϱ der Modul von Abschn. 10, (23) ist.

Weiterhin läßt sich aus (21) und (22) ein iterativer Algorithmus ableiten. Um (21) zu erfüllen, setzen wir

$$(29)\qquad A = \mathfrak{a}^2,\quad B = \mathfrak{b}^2,\quad C = \mathfrak{c}^2,$$

und der zweite Automorphismus in (22) gewinnt bei rechtsseitigem Zeichenwechsel die Gestalt

$$(30)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \sqrt{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2} \\ \mathfrak{b}_1 &= \sqrt{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{b}^2} \\ \mathfrak{c}_1 &= \mathfrak{c}\,. \end{aligned}$$

Um einen geeigneten Automorphismus aus dem zu H gehörigen Oktaedersystem zu erhalten, schreiben wir anstelle von (12)

$$(31)\qquad \sqrt{x^2-1}\,\sqrt[4]{\mathfrak{b}^2x^2 + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,x + \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}$$

und üben die Substitution

$$(32)\qquad x = \frac{-x'+3}{x'+1}$$

aus, di. ie Wurzeln -1 und ∞ vertauscht. Daraus findet man

$$(33)\qquad \begin{array}{r|l} 2\,\mathfrak{a} & \mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{b} + \mathfrak{c} \\ 2\,\mathfrak{b} & \mathfrak{a} \qquad\;\; - \mathfrak{c} \\ 2\,\mathfrak{c} & \mathfrak{a} + 2\,\mathfrak{b} + \mathfrak{c} \end{array}$$

und den iterativen Algorithmus

$$(34)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \sqrt{\mathfrak{b}\cdot\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}{2}} \\ \mathfrak{b}_1 &= \sqrt{\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}\cdot\frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{b}}{2}} \\ \mathfrak{c}_1 &= \frac{1}{4}\,(\mathfrak{a}+2\,\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \end{aligned}$$

welchem die Elementartransformation[22])

$$u' = u, \quad v' = 2\,v, \quad w' = (1 + i)\,w \tag{35}$$

zugeordnet ist.

19. Verallgemeinerungen

Die Eigenschaft von H_2, durch lineare Transformationen mit Koeffizienten aus $K(i)$ auf H reduzierbar zu sein, hat jede indefinite ternäre Hermitesche Form mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_3 & c_2 \\ \bar{c}_3 & a_2 & c_1 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & a_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} a \text{ aus } K(1) \\ c \text{ aus } K(i). \end{matrix} \tag{1}$$

Durch derartige Formen werden daher nur Gruppen definiert, die mit der von H commensurabel sind, so daß die zugehörigen automorphen Funktionen algebraisch miteinander verknüpft sind. Wesentlich neue Funktionen werden erhalten, wenn ein anderer imaginär-quadratischer Körper gewählt wird.

Für die dritten Einheitswurzeln definiert das Hauptintegral[23])

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + a\,x^2 + b\,x + c}} \tag{2}$$

---

[22]) Jede Transformation mit Koeffizienten aus $K(i)$, die H bis auf einen reellen Zahlfaktor reproduziert, läßt sich durch Automorphismen von H auf die Elementartransformation

$$u' = u, \quad v' = c\,\bar{c}\,v, \quad w' = c\,w, \qquad c \text{ aus } K(i)$$

reduzieren.

Durch die Koincidenzen der Transformationen werden kubische Zahlkörper des natürlichen Zahlbereiches zu $K(i)$ adjungiert. Aber nur die total-reellen Zahlkörper liefern Funktionswerte, so daß „komplexe Multiplikationen" im bisherigen Sinne nicht erzeugt werden.

In diesem Zusammenhange hat mich die Aufstellung der kontinuierlichen Gruppe beschäftigt, die H bis auf einen Faktor reproduziert. Durch V_1, $V_2(m)$ (m reelle kontinuierliche Größe) und die Elementartransformation lassen sich die Imaginärteile der Koeffizienten der ersten Zeile und Spalte der allgemeinen Substitution zum Verschwinden bringen. Für die reduzierte Substitution findet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} -r^2 & s^2 & r\,s\sqrt{2} \\ t^2 - c\,\bar{c} & -s\,t\,(c - \bar{c})/r & -c\,t\sqrt{2} \\ -r\,t\sqrt{2} & c\,s\sqrt{2} & r\,c + s\,t \end{vmatrix} = (r\,c - s\,t)^2\,(r\,\bar{c} - s\,t),$$

in der r, s, t reelle Größen und c eine komplexe Größe bedeutet.

[23]) Bei einfacher Reduzierbarkeit enthält die binäre Schar der Nebenintegrale ein elliptisches Integral vom äquianharmonischen Fall. Für den Reduktionsgrad 2 verschwindet der Koeffizient b. Die Restintegrale stehen wiederum mit der hypergeometrischen Funktion in Beziehung und definieren die Funktion des Dreiecks $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, das in zwei Dreiecke $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ aufteilbar ist. Der durch die Halbierung entstehende Eckpunkt ist durch $b = 0, a^2/c = 8$ bezeichnet, und die restlichen Integrale sind elliptische mit komplexer Multiplikation in $i\sqrt{6}$. Daran erkannte ich, daß das Gebilde (152), loc. cit. 1 vollständig in elliptische Gebilde zerfällt.

eine Modulfunktion, die der untersuchten entspricht. Bei der Ableitung aus der Riemannschen Fläche liegt es nahe, das algebraische Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ auf ein solches vom Geschlechte $g = 4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\Pi(x-x_\mu)}} \qquad \mu = 1, \ldots, 6 \tag{3}$$

zu verallgemeinern. Das Periodenschema bestimmt sich zu

$$\begin{array}{cccccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4; & -\varepsilon t_2 & -\varepsilon t_1 & -\varepsilon t_3 & -\varepsilon t_4 \\ t_4 & 0 & 0 & -t_2; & 0 & -\varepsilon^2 t_4 & 0 & \varepsilon^2 t_2 \\ 0 & t_4 & 0 & -t_1; & -\varepsilon^2 t_4 & 0 & 0 & \varepsilon^2 t_1 \\ 0 & 0 & t_4 & -t_3; & 0 & 0 & -\varepsilon^2 t_4 & \varepsilon^2 t_3 \end{array} \qquad (\varepsilon^3 = 1). \tag{4}$$

Wie in Abschn. 2, (16)—(19) zeigt man, daß die linearen Periodentransformationen durch die Automorphismen einer Hermiteschen Form mit der Signatur 1, 3

$$t_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2 + t_3 \bar{t}_3 + t_4 \bar{t}_4 \tag{5}$$

gegeben sind, und (3) stellt *eine Modulfunktion von drei Veränderlichen* dar.

Es bietet keine Schwierigkeiten, das Periodenschema (4) auf das Geschlecht $g = \nu + 1$ auszudehnen. Dasselbe enthält ν Moduln, und die zugehörige Gruppe reproduziert eine Hermitesche Form mit der Signatur 1, ν. Indessen entsprechen diesen Schemata keine algebraischen Funktionen. Der Fortgang der Sache läßt sich an dem Hauptintegral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\Pi(x-x_\mu)}} \qquad (\mu = 1, \ldots, 8) \tag{6}$$

studieren. Das algebraische Gebilde vom Geschlechte $g = 9$ enthält weitere fünf linear-unabhängige Nebenintegrale, die die vierte Wurzel in dritter Potenz enthalten, und drei linear-unabhängige hyperelliptische Integrale, die die Quadratwurzel aus dem Polynom achten Grades enthalten. Die letzteren sind reduzierte Integrale, deren Perioden einem Modulsystem vom Geschlechte $g = 3$ angehören, und es läßt sich der Restsatz[24]) von Picard und Poincaré anwenden, nach welchem sich sechs linear-unabhängige Restintegrale angeben lassen, deren Perioden aus den Moduln eines Systems vom Geschlechte $g = 6$ linear zusammengesetzt sind, wobei die Koeffizienten der Linearfunktionen natürliche ganze Zahlen sind. Für die Reduzierbarkeit der Nebenintegrale und des Hauptintegrals auf lemniskatische Integrale ergeben sich algebraische Ansätze entsprechend Abschn. 1 und 14, woraus zu schließen ist, daß es sich um die Restintegrale handelt und das zugehörige Modulsystem vom Geschlechte $g = 6$ von der Art (4) ist, also fünf transzendente Moduln besitzt. Da (6) ebensoviele algebraische Moduln hat, ergibt sich, daß das Integral *eine Modulfunktion in fünf Veränderlichen* definiert.

---

[24]) Krazer: Thetafunktionen, Kap. 11, Satz XIII, S. 499. Leipzig: Teubner 1903. Zu bemerken ist, daß die Umkehrung des Satzes XI nicht gilt, so daß das Modulsystem vom Geschlecht $q - p$ im allgemeinen „nichtabelsch" ist. Der Satz XIV von Wirtinger handelt hiervon.

Der einfachste Fall, in dem ein reduzierbares Integral auftritt, wird durch Entartung von (6) gefunden, wenn zweimal zwei Wurzeln des Polynoms einander gleich werden, etwa:

$$x_8 = x_7, \quad x_6 = x_5. \tag{7}$$

Alsdann wird ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $g = 5$ erhalten, das ein elliptisches Integral enthält. Die Restintegrale stellen *eine Modulfunktion von drei Veränderlichen* dar. Wiederum lassen sich an (7) zwei Entartungen feststellen. Das nochmalige Zusammenfallen zweier Wurzeln führt auf die untersuchte Modulfunktion zurück. Hingegen ergibt

$$x_8 = x_7, \quad x_6 = x_5 = x_4 \tag{8}$$

ein Gebilde vom Geschlechte $g = 4$, bei dem das reduzierbare Integral erhalten bleibt. Die restlichen Integrale stellen die in Abschn. 18 aus der Transformation modulo $(1 + i)$ hergeleitete automorphe Funktion in zwei Veränderlichen dar. Einige Angaben hierüber werden die Ausführungen zu (6) besser stützen.

20. Die automorphe Funktion von Abschnitt 18

An dem zuletzt genannten algebraischen Gebilde

$$\sqrt[4]{X^2(X^3 + K_1 X^2 + K_2 X + K_3)} \tag{1}$$

sind die algebraischen Ansätze für die reduzierenden Funktionen niedersten Grades entsprechend Abschn. 1 durch

$$\begin{array}{llll} n, & Y = \infty, & 0, & 1 \\ 3 & (3) & (1+1+1) & (1+2) \\ 4 & (3+1) & (2+1+1) & (2+2) \\ 5 & (4+1) & (3+1+1) & (2+2+1) \\ 6 & (4+1+1) & (3+2+1) & (2+2+2) \end{array} \tag{2}$$

gegeben. Daraus ist zu ersehen, daß für jeden Reduktionsgrad außer dem zweiten ein Schema existiert. Für $n = 3$ hat man

$$\sqrt[4]{Y(Y-4\varrho)^2}\,, \quad Y = X(X+3)^2 + 4\,\varrho \tag{3}$$

$$\sqrt[4]{X^2[X(X+3)^2 + 4\varrho]}\,, \tag{4}$$

und der Vergleich mit Abschn. 18, (26) und (28) legt es nahe, die K_1, K_2, K_3 einander gleichzusetzen. Demnach stellt das Hauptintegral von (4) die Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ dar. Die Bestätigung wird durch das Periodenschema der vierblättrigen Riemannschen Fläche von (1) geliefert:

$$\begin{array}{llll|llll} (1-i)\,x, & 0, & 0, & 0; & (1+i)\,x, & -z, & (1-i)\,z, & z \\ (1-i)\,y, & -z, & -(1+i)\,z, & z; & (1+i)\,y, & 0, & 0, & 0 \\ z, & x, & (1-i)\,x, & -x; & -i\,z, & -i\,y, & -(1-i)\,y, & i\,y \\ 0, & \omega_1, & 0, & \omega_1; & 0, & \omega_2, & 0, & \omega_2. \end{array} \tag{5}$$

Die letzte Zeile enthält die Perioden des reduzierbaren Integrals, die vorletzte die Perioden des Hauptintegrals. Wie in Abschn. 2 leitet man den Geltungsbereich der automorphen Funktion ab:

$$(1 + i)\, x\, \overline{y} + (1 - i)\, \overline{x}\, y + z\, \overline{z} < 0. \tag{6}$$

Auf der linken Seite findet sich die Form H_2 von Abschn. 18, (3) ein. Die Automorphismen von H_2 liefern die das Schema (5) in sich überführenden linearen Periodentransformationen. Die Methode der Aufstellung ist in Abschn. 4, (13) indiziert. Im vorliegenden Falle sind die beiden letzten Zeilen zu addieren und die Substitutionen von Abschn. 18, (4) und die der Modulgruppe in den Zeilenelementen als Variabeln in der Weise zu schreiben, daß die Koeffizienten reelle ganze Zahlen werden, eine Bedingung, die für die Substitutionen beider Gruppen eine Abhängigkeit modulo 2 zur Folge hat, indem den Erzeugenden von Abschn. 18, (4) die Substitutionen

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_2, & \omega_1, & \quad \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_2' &= -\omega_1, & \omega_2, & \quad \omega_2 \end{aligned} \qquad (\text{mod. } 2) \tag{7}$$

beizufügen sind. Die algebraische Deutung ist die, daß der Diedermodul des elliptischen Integrals rational in dem Modulsystem der automorphen Funktion in zwei Veränderlichen enthalten ist. Für den Oktaedermodul besteht derselbe Sachverhalt. Aus dem Schema (5) läßt sich dies aber nicht nachweisen.

Für den Fall der einfachen Reduzierbarkeit besteht eine lineare Relation

$$\alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = 0 \tag{8}$$

mit Koeffizienten aus $K(i)$ ohne gemeinsamen Teiler. Für das reduzierbare Integral ergeben sich aus den zwei ersten Zeilen in (5) die Perioden

$$(1 - i)\, \gamma,\ \beta,\ (1 + i)\, \beta,\ -\beta;\ (1 + i)\, \gamma,\ \alpha,\ -(1 - i)\, \alpha,\ -\alpha \tag{9}$$

mit der Nebenbedingung

$$(1 - i)\, \alpha\, \overline{\beta} + (1 + i)\, \overline{\alpha}\, \beta + 2\, \gamma\, \overline{\gamma} > 0. \tag{10}$$

Die links stehende zu (6) adjungierte Form hat den Teiler $1 + i$ und stellt nur gerade Zahlen dar. Sobald aber α und β durch $1 + i$ teilbar sind, läßt sich in (9) der Teiler $1 + i$ ausscheiden, und (10) stellt das Doppelte einer ungeraden Zahl dar, die den Reduktionsgrad bezeichnet.

Zur Ermittlung der automorphen Funktion, deren Gruppe die lineare Relation (8) ungeändert läßt, bedarf es jedoch keiner neuen Entwicklung, da durch Aufteilung der Elementartransformation von Abschn. 18, (35)

$$(11)\quad \begin{aligned} &\text{a)} & u' &= x, & v' &= (1 - i)\, y, & w' &= z \\ &\text{b)} & x &= u, & y &= (1 + i)\, v, & z &= (1 + i)\, w \end{aligned}$$

ein Übergang zwischen den Formen der beiden automorphen Funktionen hergestellt wird. Durch Einsetzen in die Relationen ergeben sich für die Koeffizienten die Substitutionen

$$(12)\quad \begin{aligned} &\text{a)} & \alpha &= a, & \beta &= (1 - i)\, b, & \gamma &= c \\ &\text{b)} & a &= \alpha, & b &= (1 + i)\, \beta, & c &= (1 + i)\, \gamma. \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, sind bei ungeradem Reduktionsgrad α und β durch $1+i$ teilbar. Alsdann erhalten a, b, c durch (12b) den Teiler $1+i$, nach dessen Entfernung der Reduktionsgrad unverändert bleibt und b den Teiler $1+i$ behält. Ist a prim zu $1+i$, so findet durch (12a) eine Verdopplung des Reduktionsgrades statt. Der Fall, daß a und b den Teiler $1+i$ haben, kann nur bei $n \equiv 1 \pmod{4}$ eintreten und bei Anwendung von (12a) und (12b) läßt sich wiederum der Faktor $1+i$ ausscheiden, so daß der Reduktionsgrad unverändert bleibt, aber a den Faktor $1+i$ verliert.

Bei den algebraischen Ausführungen kann man sich auf die Transformationsgrößen p und q beschränken, durch die eine Wurzel des kubischen Polynoms in (1) rationalisiert wird:

$$\sqrt[4]{X^2(X-1)\,[(X-1)\,(X+p)+q]}\,. \tag{13}$$

Jedem Fall einfacher Reduzierbarkeit entspricht in der Normalform von Abschn. 18, (12) ein Fall einfacher Reduzierbarkeit von gleichem oder halbem Reduktionsgrad. Für $n = 4$ werden p und $\sqrt{q}$ lineare Funktionen des Parameters. Man hat

$$Y = 1 + \frac{(X^2+\tau X-2\tau)^2}{4\tau^2(X-1)}\,, \tag{14}$$

$$\sqrt[4]{X^2(X-1)\,[(X+\tau)^2-4\tau]}\,, \tag{15}$$

$$p = 2\tau+1,\quad \sqrt{q} = \pm(\tau-1). \tag{16}$$

Die Werte von p und q sind in Abschn. 18, (12) mit negativem Vorzeichen der Wurzel einzusetzen. Durch eine Umgruppierung der Nullstellen unter der Quadratwurzel vermöge der Substitution von Abschn. 18, (32) gelangt man sodann zu

$$\sqrt{X^2-1}\,\sqrt[4]{\tau X^2-\tau+4}\,. \tag{17}$$

Da $n = H = 2$ vorliegt, gehört der Modul τ der Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ an und steht mit dem von Abschn. 10, (1) in der Beziehung

$$\tau = 4(1-t_2)\,. \tag{18}$$

Nach Abschn. 10, (40) ergibt die Wurzelausziehung in (18) den Modul für $n = H = 4$. Dadurch werden sämtliche Nullstellen des kubischen Polynoms in (15) rationalisiert, und durch eine Umgruppierung derselben erhält man die zugehörigen Werte p und q. In dieser Weise kann man fortfahren und gelangt zu einer Kette von Werten p, q, für die beim Übergang nach (13) der Grad n ständig sich verdoppelt. Im besonderen werden die Nullstellen unter der Quadratwurzel in Abschn. 1, (9) durch

$$\sqrt{t(t+1)} \tag{19}$$

rationalisiert, und (19) liefert den Modul für (13), $n = 8$.

Die Kette läßt sich noch eine Stufe abwärts verfolgen. In (17) ist $q = 0$, und dies liefert eine Entartung von (13), die lediglich durch die Entartung

des zusätzlichen reduzierbaren Integrals bedingt ist. Das Periodenschema (5) hat bei

$$z = y, \quad n = 2 \tag{20}$$

keine Besonderheiten aufzuweisen, da $\omega_1 : \omega_2$ als unabhängige Größe auftritt. Bei der Entartung

$$z = 0, \quad n = 1, \quad q = p \tag{21}$$

hingegen bleibt das zusätzliche Integral erhalten.

Bei dem bereits in (3) und (4) verwendeten Fall $n = 3$ ist eine Wurzel zu rationalisieren, um zu Werten von p und q zu gelangen. Diese sind in Abschn. 18, (24) angegeben und wurden aus $n = H = 3$ gewonnen. Entsprechend (19) läßt sich aus Abschn. 1, (10) entnehmen, daß

$$\sqrt{t(t-4)} \tag{22}$$

den Modul für (13), $n = 6$ liefert. Zu bemerken ist, daß der Modul in (3) den Anfang der Kette bildet, da zufolge der Symmetrie der Nullstellen der kubischen Gleichung keine wesentlich neuen Funktionen für p und q abgeleitet werden können.

Die Analyse der transzendenten Beziehungen in (12) läßt bereits erkennen, daß bei $n = 5$ andere Resultate erhalten werden. Man hat

$$Y = 1 - \frac{(X - t - 1)(X^2 + 2X + 2t)^2}{X^4(X - t + 3)} \tag{23}$$

$$\sqrt[4]{(X - t - 1)^2 (X - t + 3)\,[(t^2 + 1)X^2 + t(t+2)X + t^2(t+1)]}. \tag{24}$$

Die Formel liefert unmittelbar Werte für p und q, und der Übergang zu der Normalform von Abschn. 18, (12) ergibt den zweiten Fall $n = H = 5$. Der Modul stimmt mit dem von Abschn. 1, (12) überein, und die Fortsetzung der Kette ergibt, daß

$$\sqrt{t^2 + 1} \tag{25}$$

den Modul für (13), $n = 10$ liefert. Scheinbar läßt sich die Kette auch nach der anderen Seite fortsetzen. Indessen ergibt die Rationalisierung der Nullstellen in (24)

$$\sqrt{-4t - 3} \tag{26}$$

den Transformationsmodul 10ten Grades der elliptischen Funktionen, der zur Rationalisierung einer Wurzel des kubischen Polynoms notwendig ist, das in dem ersten Fall $n = H = 5$, Abschn. 1, (11) auftritt. Die Symmetrie unter den Wurzeln schließt jedoch die Kette im wesentlichen ab.

21. Hermitesche Formen und Modulfunktionen. Ausblick auf das rationale Viereck

Die den indefiniten Hermiteschen Formen durch die Gruppe zugeordneten transformierbaren automorphen Funktionen stellen nicht nur singuläre Fälle der allgemeinen Modulfunktionen vom Geschlechte g dar, sondern geben auch

Erweiterungen dieser Modulsysteme, die den Vorzug besitzen, daß die Transformationsprobleme im transzendenten Raume aus der Arithmetik der Hermiteschen Formen entwickelt werden können. Für den einfachsten Fall der hyperelliptischen Modulfunktion werde hierüber einiges mitgeteilt, da diese Untersuchung in engster Beziehung zu dem Gegenstand der vorliegenden Arbeit steht.

Ausgehend von dem hyperelliptischen Gebilde

$$\sqrt{P_n(X)}\,\sqrt[4]{X}, \tag{1}$$

für das P_n ein Polynom n-ten Grades bedeutet, findet man als Gruppe der transzendenten Moduln die Automorphismengruppe der Hermiteschen Form

$$x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - \cdots \pm x_n\bar{x}_n, \tag{2}$$

die für $n = 2\nu$ oder $2\nu + 1$ die Signatur ν, ν bzw. $\nu + 1, \nu$ hat, und es gibt ν linearunabhängige Integrale erster Gattung mit den Perioden

$$x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}; \; -i\,x_1^{(\mu)}, +i\,x_2^{(\mu)} - \cdots \pm i\,x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1, \ldots, \nu). \tag{3}$$

Die Anzahl der algebraischen Moduln in (1) und der Verhältnisse aus den x in (2) stimmen überein. Für die analytische Funktion kommen jedoch die Verhältnisse aus den Determinanten ν-ten Grades der in gleicher Weise sich substituierenden Periodenwerte in Betracht. Die Anzahl dieser Moduln beträgt ν^2 bzw. $\nu(\nu + 1)$, so daß (1) nur in den Fällen $n = 2$ und 3 eine Modulfunktion definiert.

Die Determinanten der Automorphismen von (2) haben die Eigenschaft, daß die komplementären Unterdeterminanten zueinander konjugiertkomplexe Werte annehmen. Bei geradem n hat dies zur Folge, daß die Substitutionen unter den die transzendenten Moduln definierenden Determinanten ν-ten Grades, in die die Automorphismen sich umsetzen lassen, in solche mit reellen Koeffizienten transformiert werden können. Unter den letzteren Determinanten bestehen noch Relationen, und der Fall $n = 4$ stellt sich so dar, daß *die Automorphismen einer quadratischen Form in sechs Veränderlichen* gewonnen werden, die aus H hervorgeht, wenn Real- und Imaginärteil getrennt werden. Diese Form

$$2(u_1v_1 + u_2v_2) + w_1^2 + w_2^2 \tag{4}$$

hat die Signatur 4, 2 und läßt sich, gleich Null gesetzt, als Erweiterung der Relation unter den Determinanten der Periodenwerte eines Gebildes $g = 2$ deuten.

Diese die hyperelliptische Modulfunktion definierenden Determinanten wurden von C. W. Borchardt durch das überall endliche Doppelintegral der Kummerschen Fläche dargestellt[25]). Das Darstellungsmittel reicht jedoch für die Modulfunktionen, die durch quadratische Formen mit der Signatur

[25]) C. W. Borchardt: Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen. Monatsber. der Berl. Akad., Nov. 1876, S. 611; Abh. der Berl. Akad. 1878, S. 33. Ges. Werke: 327—338, 373—431.

μ, 2 definiert werden, wesentlich weiter, und für die vorgelegte Aufgabe ist das algebraische Gebilde der Kummerschen Fläche in

$$\sqrt{\Pi(\alpha_\lambda X + \beta_\lambda Y + \gamma_\lambda Z)} \qquad (\lambda = 1, \ldots, 6) \tag{5}$$

zu erweitern.

Aus algebraischen Korrespondenzen zwischen Gebilden (5) mit verschiedenen Werten des Parametersystems läßt sich eine Erweiterung des in Abschnitt 18, (34) gegebenen iterativen Algorithmus herleiten. Das Galoissystem modulo 2 ist gegeben durch die algebraische Mannigfaltigkeit, die durch die sechs Abstände unter vier Punkten in der Ebene bestimmt ist. Die Aufgabe der rationalen Vierecke, die ein Vermächtnis meines Lehrers H. A. Schwarz ist, läßt sich in mannigfacher Weise mit der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in Beziehung setzen. Die Untersuchungen über diesen Gegenstand sind im Laufe der Jahre so stark angewachsen, daß sie nur in Buchform mitgeteilt werden können. Ein Ergebnis sei erwähnt, das mit der Algebra dieser Modulfunktionen in Beziehung steht:

Die algebraische Mannigfaltigkeit des rationalen Vierecks hat ein überall endliches vierfaches Integral, das in ein Produkt von vier lemniskatischen Integralen zerfällt werden kann. Eine Rationalisierung dieser Gleichung existiert daher nicht, jedoch läßt sich eine Lösung der Aufgabe vermittels der Automorphismen der algebraischen Mannigfaltigkeit geben, die bereits durch die Symmetrie der Faktoren unter der Wurzel in (5) indiziert ist.

(Eingegangen am 12. Mai 1955)

Jurkat W.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 141—150 (1956)

Gliedweise Integration und Einzigkeitssätze bei trigonometrischen Reihen*)

Von

Wolfgang Jurkat in Tübingen

In dieser Arbeit untersuchen wir die Frage, wann eine Abel-summierbare trigonometrische Reihe in einem bestimmten Intervall gliedweise integriert werden darf (Integrationsproblem). Enthält dieses Intervall alle Werte mod 2π, so hängt die Frage aufs engste damit zusammen, ob die trigonometrische Reihe eine Fourier-Reihe ist (Einzigkeitsproblem). Aber auch bei beliebigem Intervall können die zahlreichen bekannten Ergebnisse für das Einzigkeitsproblem[1]) noch für das Integrationsproblem nutzbar gemacht werden, wie eine Analyse der Beweise zeigt. Der Schlüssel hierzu wird geliefert durch den Begriff der „lokalen Fourier-Reihe", die eine natürliche Verallgemeinerung der "restricted Fourier series" von W. H. Young[2]) darstellt und sich zu dem (lokalen) Integrationsproblem bei Abel-Summierbarkeit genau so verhält wie jene bei Cesàro-Summierbarkeit. Die für unsere augenblickliche Untersuchung maßgebende Eigenschaft besteht darin, daß eine trigonometrische Reihe überall dort gliedweise integrierbar ist, wo sie eine lokale Fourier-Reihe ist. Die notwendigen Definitionen und grundlegenden Eigenschaften sind in §§ 1 und 2 zusammengestellt.

Unser Integrationsproblem stellt im Grunde eine Verallgemeinerung des Einzigkeitsproblems dar. Die Klasse der jetzt zulässigen trigonometrischen Reihen ist im allgemeinen viel größer, und man kann nicht o. B. d. A. Koeffizientenbedingungen wie $o(n)$ einführen. Zum Beispiel sind die Reihen $\Sigma\, n^k \times \times \cos n\, x$ und $\Sigma\, n^k \sin n\, x$ gleichmäßig Abel-summierbar in jedem abgeschlossenen Intervall, das $x \equiv 0 \bmod 2\pi$ nicht enthält, und daher dort gliedweise integrierbar. Es erscheint folglich von unserem Gesichtspunkt aus viel natürlicher, nur anzunehmen, daß die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe durch irgendeine (vielleicht große) Potenz von n beschränkt sind, und alle weiteren Bedingungen durch die Abel-Summe der Reihe bzw. ihrer gliedweise integrierten Reihen auszudrücken. Dies ist in der Tat möglich, und wir erhalten auf diese Weise verschiedene (äquivalente) Gruppen von notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen für die gliedweise Integrierbarkeit unserer trigonometrischen Reihen.

Der Beweisgang besteht im Nachweis, daß die zu integrierende trigonometrische Reihe eine lokale Fourier-Reihe ist, und folgerichtig sind die Sätze der Arbeit in ihrer allgemeinsten Form als lokale Einzigkeitssätze formuliert.

*) Vorgetragen auf dem Intern. Math. Kongreß in Amsterdam (Sept. 1954).

[1]) Vgl. z. B. M. Riesz [6], Verblunsky [7, 8], Wolf [9], Zygmund [11, 12].

[2]) Vgl. z. B. Hobson [1], p. 686—692.

An Hilfsmitteln aus der „globalen" Einzigkeitstheorie benutzen wir nur einen Satz über die verallgemeinerte zweite Ableitung und einfache Folgerungen aus den Ungleichungen von RAJCHMAN-ZYGMUND[3]). Durch Anwendung unserer lokalen Betrachtungsweise (vor allem Satz 4) entstehen dann unmittelbar die ersten interessanten Ergebnisse (§ 4.2), die sich weiter durch Induktion noch erheblich verfeinern lassen (§ 5). Die für uns wichtigen Anwendungen auf das Integrationsproblem sind in § 5.2 enthalten. In der Arbeit wird durchweg der Lebesguesche Integralbegriff verwendet, was auf einen Verzicht auf gewisse übliche Verallgemeinerungen[4]) zugunsten der Einfachheit hinausläuft.

§ 1. Die Fragestellung

1.1. Wir schreiben eine trigonometrische Reihe in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Re\, a_n e^{inx} \qquad (a_n \text{ komplex; } x \text{ reell, mod } 2\pi) \tag{1}$$

und werden zur technischen Vereinfachung immer $a_0 = 0$ setzen. Die zu (1) konjugierte Reihe entsteht durch Übergang vom Real- zum Imaginärteil. Die Abel-Summe von (1) ist definiert durch

$$\Sigma_A \Re\, a_n e^{inx} = \lim_{r\to 1-0} \Sigma \Re\, a_n e^{inx} r^n, \tag{2}$$

wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Reihe auf der rechten Seite für $0 \leqq r < 1$ konvergiert. Des häufigen Auftretens wegen wollen wir noch die Abkürzung „j.a.T.v." für „jedes(m) abgeschlossene(n) Teilintervall von" einführen.

Definition 1: Die Reihe (1) heißt gliedweise integrierbar in einem offenen Intervall I, wenn $\Sigma_A \Re\, a_n e^{inx} = f(x)$ fast überall in I vorhanden und in j.a.T.v. I integrierbar ist und wenn ferner für $q = 1, 2, 3, \ldots$ überall in I die gliedweisen Integrale $\Sigma_A \Re\, a_n e^{inx}/(in)^q = F_q(x)$ vorhanden sind und zu $f(x)$ in der Relation stehen

$$F_q(x) = \left(\int dx\right)^q f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} f(t)\, dt + P_{q-1}(x), \tag{3}$$

wobei $x_0 \in I$ ist und P_{q-1} Polynome sind mit Grad $\leqq q-1$.

Gliedweise Integrierbarkeit in dem hier eingeführten Sinne bedeutet die Möglichkeit, beliebig oft unbestimmt zu integrieren. Man sieht aber sofort, daß sich hierdurch auch die Möglichkeit ergibt, beliebig oft bestimmt zu integrieren. Als *Integrationsproblem* bezeichnen wir die Frage nach den genauen Bedingungen, unter welchen eine trigonometrische Reihe in I gliedweise integrierbar ist.

1.2. Da Fourier-Reihen überall gliedweise integrierbar sind, so liegt es nahe, für unser lokales Integrationsproblem trigonometrische Reihen zu betrachten, die sich lokal wie eine Fourier-Reihe verhalten. Zwei trigonometrische Reihen $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ und $\Sigma \Re\, b_n e^{inx}$ heißen gleichmäßig äqui-(Abel-)summierbar

[3]) RAJCHMAN-ZYGMUND [4].
[4]) Vgl. z. B. VERBLUNSKY [7], WOLF [9].

in einem abgeschlossenen Intervall I, wenn $\Sigma \Re (a_n - b_n) e^{inx}$ in I gleichmäßig (Abel-)summierbar zur Summe 0 ist. Wir sprechen dann auch von Äqui-Summierbarkeit in engerem Sinne im Gegensatz zu der im weiteren Sinne, wo die Abel-Summe von $\Sigma \Re (a_n - b_n) e^{inx}$ nicht gleich 0 zu sein braucht.

Definition 2: Die Reihe (1) heißt lokale Fourier-Reihe einer (reellen) Funktion $f(x)$ in einem offenen Intervall I, in Zeichen

$$f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx} \quad (I), \tag{4}$$

wenn (1) in j.a.T.v. I mit einer gewöhnlichen Fourier-Reihe gleichmäßig äqui-(Abel-)summierbar ist und wenn fast überall in I die (dort vorhandene) Abel-Summe von (1) gleich $f(x)$ ist.

Eine gewöhnliche Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ ist überall eine lokale Fourier-Reihe von $f(x)$. Die Umkehrung gilt nicht, wie z. B. $\Sigma \cos n x$, $\Sigma \sin n x$ für $0 < x < 2\pi$ zeigen. Es braucht nicht einmal eine einheitliche gewöhnliche Fourier-Reihe zu geben, mit der die lokale Fourier-Reihe in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-summierbar ist, sondern die in der Definition vorkommende gewöhnliche Fourier-Reihe kann von dem betrachteten abgeschlossenen Teilintervall abhängen. In diesem Teilintervall muß jedoch ihre erzeugende Funktion fast überall gleich $f(x)$ sein. Daraus folgt, daß die „erzeugende" Funktion $f(x)$ einer lokalen Fourier-Reihe notwendig in j.a.T.v. I integrierbar sein muß. Außerdem folgt, daß zwei lokale Fourier-Reihen in I genau dann in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-summierbar sind, wenn ihre erzeugenden Funktionen fast überall in I übereinstimmen. In diesem Sinne sind also lokale Fourier-Reihe und erzeugende Funktion eindeutig durcheinander bestimmt. Insbesondere ist eine lokale Fourier-Reihe in I dann und nur dann mit einer einheitlichen gewöhnlichen Fourier-Reihe in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-summierbar, wenn ihre erzeugende Funktion in ganz I integrierbar ist. Ist speziell die Länge des Intervalls I größer als 2π, so ist die lokale Fourier-Reihe von $f(x)$ in I sogar identisch mit der gewöhnlichen Fourier-Reihe von $f(x)$. Die letzte Bemerkung erlaubt uns, die Frage nach Einzigkeitssätzen für trigonometrische Reihen zu verallgemeinern, d. h. nach Sätzen von dem Typ „eine trigonometrische Reihe mit Summe 0 ist die Null-Reihe" oder allgemeiner „eine trigonometrische Reihe ist eine Fourier-Reihe". Als lokales *Einzigkeitsproblem* bezeichnen wir die Frage nach den genauen Bedingungen, unter welchen eine trigonometrische Reihe eine lokale Fourier-Reihe ist.

§ 2. Zusammenhang der Probleme

2.1. Wir beginnen mit Sätzen über gliedweise Integration.

Satz 1. *Ist eine trigonometrische Reihe in j. a. T. v. einem offenen Intervall I gleichmäßig Abelsummierbar zur Summe $f(x)$, so gilt das gleiche für die gliedweise integrierte Reihe mit der Summe $(\int dx)\, f(x)$. Insbesondere ist die gegebene trigonometrische Reihe gliedweise integrierbar in I.*

Der *Beweis* folgt durch Zurückführung auf den entsprechenden Satz bei gleichmäßiger Konvergenz.

Satz 2. *Für jedes offene Intervall I folgt aus*

$$f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx}\,(I) \text{ stets } (\textstyle\int dx)\, f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx}/in\,(I),$$

wobei $\Sigma_A \Re\, a_n e^{inx}/in$ in ganz I vorhanden und gleich dem unbestimmten Integral von $f(x)$ ist. Insbesondere ist eine lokale Fourier-Reihe in I dort auch gliedweise integrierbar.

Der *Beweis* folgt mit Satz 1 aus dem entsprechenden Satz für gewöhnliche Fourier-Reihen.

Zwischen Satz 1 und 2 besteht folgender Zusammenhang.

Satz 3. *Eine trigonometrische Reihe ist genau dann in j. a. T. v. einem offenen Intervall I gleichmäßig Abel-summierbar, wenn sie in I eine lokale Fourier-Reihe einer dort stetigen Funktion ist.*

Der *Beweis* folgt aus dem entsprechenden Satz für gewöhnliche Fourier-Reihen.

2.2. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Behandlung lokaler Fourier-Reihen ist der folgende Lokalisationssatz für (Abel-)summierbare trigonometrische Reihen.

Satz 4. *Wenn zwei trigonometrische Reihen $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ und $\Sigma \Re\, b_n e^{inx}$ in j.a.T.v. einem offenen Intervall I gleichmäßig äqui-(Abel-)summierbar (im engeren Sinne) sind, so gilt das gleiche für die gliedweise differenzierten Reihen $\Sigma \Re\, in\, a_n e^{inx}$ und $\Sigma \Re\, in\, b_n e^{inx}$; außerdem sind dann die konjugierten Reihen $\Sigma\, \Im a_n e^{inx}$ und $\Sigma\, \Im b_n e^{inx}$ in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-(Abel)summierbar im weiteren Sinne.*

Zusatz. *Ist $a_n - b_n = o(n^\alpha)$, $\alpha > -1$, so folgt aus der vorausgesetzten Äqui-Abel-Summierbarkeit sogar die gleichmäßige Äqui-Cesàro-Summierbarkeit der Ordnung α in j.a.T.v. I, und zwar in engerem Sinne für die gegebenen Reihen und im weiteren Sinne für die dazu konjugierten Reihen. Für die differenzierten Reihen muß die Ordnung der Summierbarkeit um 1 erhöht werden.*

Zum *Beweis* betrachten wir die für $0 \leq r < 1$ harmonischen Funktionen

$$u(r,x) = \Sigma \Re (a_n - b_n) e^{inx} r^n \quad \text{und} \quad v(r,x) = \Sigma\, \Im (a_n - b_n) e^{inx} r^n.$$

Da $u(r,x)$ für $x \in I$ und $r = 1$ noch stetig ist und dort die Randwerte 0 hat, so folgt nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip, daß $u(r,x)$ auch dort noch harmonisch ist und daher ebenfalls ihre konjugierte Funktion $v(r,x)$. Infolgedessen ist dort auch $u_x(r,x)$ stetig mit Randwerten 0 und ebenfalls $v(r,x)$ mit Randwerten, die vielleicht nicht Null sind. Hieraus folgt direkt die Behauptung des Satzes, während man für den Zusatz noch den bekannten Satz von FATOU-RIESZ[5]) anzuwenden hat.

Daß es sich bei Satz 4 um einen Lokalisationssatz handelt, wird durch die folgende Bemerkung deutlich: Wenn zwei trigonometrische Reihen nach q-maliger gliedweiser Integration zu Fourier-Reihen werden mit in einem offenen Intervall I übereinstimmenden erzeugenden Funktionen — so daß also diese Fourier-Reihen in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-summierbar sind —, so sind die gegebenen trigonometrischen Reihen (und ihre konjugierten Reihen) in j.a.T.v. I gleichmäßig äqui-summierbar (im engeren bzw. weiteren Sinne),

[5]) M. RIESZ [5], ZYGMUND [10].

d. h. ihr Summierbarkeitsverhalten in I hängt nur ab von dem ihrer gliedweisen Integrale oder deren erzeugenden Funktionen *in* I. Lokalisationssätze dieser Art sind bekannt für andere Konvergenzarten an Stelle von Abel-Summierbarkeit, so z. B. für gewöhnliche Konvergenz oder allgemeiner für Cesàro-Summierbarkeit[6]).

Eine weitere Folgerung aus Satz 4 ist, daß die konjugierte Reihe zu einer lokalen Fourier-Reihe in I dort fast überall Abel-summierbar ist. Schließlich zeigt der Zusatz von Satz 4, daß man unter der Voraussetzung $a_n = o(n^\alpha)$, $\alpha \geqq 0$, bei der Definition 2 einer lokalen Fourier-Reihe ohne Änderung des Sinnes Äqui-Abel-Summierbarkeit durch Äqui-Cesàro-Summierbarkeit der Ordnung α ersetzen darf. Hierauf beruhen eine Reihe von interessanten Anwendungen.

2.3. Ein Zusammenhang zwischen Integrations- und Einzigkeitssätzen wird sich aus der folgenden Umkehrung von Satz 2 ergeben.

Satz 5. *Ist $f(x)$ totalstetig in j. a. T. v. einem offenen Intervall I, so folgt aus*

$$f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx} \,(I) \quad \text{stets} \quad f'(x) \sim \Sigma \Re\, in a_n e^{inx} \,(I).$$

Der *Beweis* ergibt sich mit Satz 4 aus dem entsprechenden Satz für gewöhnliche Fourier-Reihen, wenn man die zu $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ gleichmäßig äquisummierbaren gewöhnlichen Fourier-Reihen so wählt, daß ihre erzeugenden Funktionen überall totalstetig sind.

Durch Kombination von Satz 2 und 5 ergibt sich, daß die Relationen

$$f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx} \,(I) \quad \text{und} \quad (\textstyle\int dx)^q f(x) \sim \Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^q \,(I)$$

völlig gleichbedeutend sind. Gilt z. B. $a_n = o(n^\alpha)$ für ein $\alpha \geqq 0$, so kann man q so groß wählen, daß die gliedweise integrierte Reihe eine gewöhnliche Fourier-Reihe ist. Ist deren erzeugende Funktion ein q-faches Integral in I, so ist die ursprüngliche Reihe eine lokale Fourier-Reihe in I und umgekehrt. So erkennt man, daß der Begriff der lokalen Fourier-Reihe eine Verallgemeinerung des von W. H. Young[2]) eingeführten Begriffes der "restricted Fourier series" ist.

Weiter folgt durch Kombination von Satz 2 und 5 der grundlegende

Satz 6. *Ist $a_n = o(n^\alpha)$ für irgendein $\alpha \geqq 0$ oder allgemeiner $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^k$ für irgendeine natürliche Zahl k eine lokale Fourier-Reihe in dem offenen Intervall I, so ist die trigonometrische Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ genau dann gliedweise integrierbar in I, wenn sie eine lokale Fourier-Reihe in I ist.*

Wir sehen also, daß für eine weite Klasse von trigonometrischen Reihen das Integrations- und das Einzigkeitsproblem zusammenfallen. Ohne Einschränkungen folgte nur, daß Einzigkeit stets Integrierbarkeit zur Folge hat.

§ 3. Hilfssätze

Wir stellen hier die für das folgende wichtigen Hilfsmittel zusammen, die aus der Darstellung der Einzigkeitstheorie bei Zygmund [12, Chapter XI] herausgezogen sind. Auf diese Darstellung wird im folgenden kurz mit „Zygmund" verwiesen, und der Leser wird dort auch weitere Zitate finden.

[6]) Vgl. Zygmund [12, § 11.46], [10], Jurkat-Peyerimhoff [2, 3].

Hilfssatz 1. *In einem offenen Intervall I gelte $\overline{D}^2 F(x) \geqq f(x)$, wobei $F(x)$ oberhalb-stetig in I sei und $f(x)$ integrierbar in j.a.T.v. I. Weiter gelte $\overline{D}^2 F(x) > > -\infty$ in I abgesehen von einer abzählbaren Menge E, wo jedoch $F(x)$ glatt sei. Dann ist $F(x) - (\int dx)^2 f(x)$ konvex in I*[7].

Bemerkung: Es genügt offenbar, wenn $\overline{D}^2 F(x) \geqq f(x)$ nur fast überall in I erfüllt ist, wie man durch Abänderung von $f(x)$ auf einer Nullmenge erkennt. Man kann auch die vorausgesetzten Ungleichungen durch $\overline{D}^2 F(x) \geqq f(x) > -\infty$ in $I - E$ ersetzen.

Der *Beweis* folgt durch Kombination der Methoden von ZYGMUND § 11.31 (I) und (IV). Man vgl. auch ZYGMUND § 11.603 und VERBLUNSKY [8, Lemma 14].

Wir führen die untere und obere Abel-Summe einer trigonometrischen Reihe ein durch

$$(5) \qquad f_*(x) = \varliminf_{r \to 1-0} f(r, x), \quad f^*(x) = \varlimsup_{r \to 1-0} f(r, x), \quad f(r, x) = \Sigma \Re\, a_n e^{inx} r^n,$$

wobei stillschweigend die Konvergenz der Reihe von $f(r,x)$ für $0 \leqq r < 1$ vorausgesetzt wird.

Hilfssatz 2. *Für die trigonometrische Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ gelte $f_*(x) \geqq \chi(x)$ in einem offenen Intervall I, wobei $\chi(x)$ in j.a.T.v. I integrierbar sei; außerdem sei $f_*(x) > -\infty$ in I abgesehen von einer abzählbaren Menge E. Weiter sei die zweifach integrierte Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^2$ eine in $I - E$ Abel-summierbare Fourier-Reihe, und ihre Abel-Summe $F(x)$ sei (nach geeigneter Definition in E) oberhalb-stetig in I und glatt in E. Unter diesen Voraussetzungen ist $F(x) - (\int dx)^2 \chi(x)$ konvex in I.*

Der *Beweis* folgt mit ZYGMUND § 11.601 und Hilfssatz 1 (vgl. ZYGMUND § 11.604).

Hilfssatz 3. *Ist neben den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 noch $f_*(x) < \infty$ in $I - E$, so gilt sogar $F(x) = (\int dx)^2 f(x)$ in I, wobei $f(x)$ in j.a.T.v. I integrierbar ist und in I der Ungleichung $f_*(x) \leqq f(x) \leqq f^*(x)$ genügt.*

Der *Beweis* folgt mit Hilfssatz 2 und der Schlußweise des letzten Absatzes von ZYGMUND § 11.606.

§ 4. Überall summierbare Reihen

4.1. Wir setzen im folgenden stets

$$(6) \qquad F_q(x) = \Sigma_A \Re\, a_n e^{inx}/(in)^q \qquad \text{für } q = 1, 2, \ldots.$$

soweit die Abel-Summen vorhanden sind. Auf Grund von Satz 6 führen wir folgende (für das Einzigkeitsproblem notwendige) „Größenordnungsbedingung" ein:

---

[7]) Dabei ist $\overline{D}^2 F(x) = \varlimsup_{h \to 0} \Delta^2 F(x,h)/h^2$ mit $\Delta^2 F(x,h) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$; oberhalb-stetig an der Stelle x bedeutet $F(x) \geqq \varlimsup_{h \to 0} F(x+h)$; glatt an der Stelle x bedeutet $\Delta^2 F(x,h) = o(h)$ für $h \to 0$. Statt der Glattheit würde bei Hilfssatz 1 genügen $\varlimsup_{h \to +0} \Delta^2 F(x,h)/h \geqq 0$ für $x \in E$.

(G) Für eine natürliche Zahl k sei $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^k$ eine lokale Fourier-Reihe in (dem offenen Intervall) I.

Wir können uns dann völlig auf die Behandlung des Einzigkeitsproblems beschränken oder nach den Bemerkungen im Anschluß an Satz 5 auf die Untersuchung, ob $F_k(x)$ ein k-faches Integral in I ist. Mit den Hilfsmitteln von § 3 ist es möglich, dies auf wesentlich einfachere Bedingungen zurückzuführen, falls man etwa annimmt, daß die gegebene trigonometrische Reihe nicht nur fast überall, sondern überall in I Abel-summierbar ist. Etwas allgemeiner ist die folgende „Summierbarkeitsbedingung“:

(S_0) $f_*(x)$ und $f^*(x)$ seien beide endlich in (dem offenen Intervall) I abgesehen von einer abzählbaren Menge E.

Aus (S_0) folgt nach Zygmund § 11.605, daß $F_{2p}(x)$ für $p = 1, 2, \ldots$ in $I - E$ vorhanden ist. Um auch die (für das Einzigkeitsproblem notwendige) Existenz von $F_{2p-1}(x)$ in $I - E$ zu sichern, genügt es zu fordern:

(S_1) $F_1(x)$ sei vorhanden in $I - E$.

Satz 7. *Eine trigonometrische Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ ist eine lokale Fourier-Reihe in dem offenen Intervall I, wenn neben* (G) *mit $k = 2$ und* (S_0) *noch die folgenden, zugleich notwendigen Voraussetzungen erfüllt sind:*

(1°) *$f_*(x) \geq \chi(x)$ in I, $\chi(x)$ integrierbar in j.a.T.v. I;*

(2°) *$F_2(x)$ (nach geeigneter Definition[8]) in E) glatt in E;*

(3°) *$F_2(x)$ oberhalb-stetig in I.*

Bemerkung: Die Behauptung von Satz 7 zieht insbesondere nach sich, daß in I fast überall $f(x) = f_*(x) = f^*(x)$ ist mit in j.a.T.v. I integrierbarem $f(x)$ und daß weiter dort $F_2(x) = (\int dx)^2 f(x)$ ist.

Beweis. Die Notwendigkeit von (1°), (2°), (3°) folgt aus der Bemerkung. Für den hinreichenden Teil genügt es zu zeigen, daß $F_2(x)$ ein zweifaches Integral ist in jedem offenen Intervall I', dessen Endpunkte in I liegen. Zwischen I' und I kann man ein abgeschlossenes Intervall einschalten, in dem nach (G) die Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^2$ gleichmäßig äqui-summierbar ist mit einer gewöhnlichen Fourier-Reihe $\Sigma \Re\, b_n e^{inx}/(in)^2$. Dann ist nach Satz 4

$$(7) \qquad \Sigma_A\, \Re (a_n - b_n)\, e^{inx}/(in)^2 = \Sigma_A\, \Re (a_n - b_n)\, e^{inx} \equiv 0 \text{ in } I',$$

so daß man Hilfssatz 3 auf $\Sigma \Re\, b_n e^{inx}$ und das Intervall I' anwenden kann. Der Rückschluß mit (7) ergibt die Behauptung.

4.2. Satz 7 ist sozusagen der lokalisierte Hilfssatz 3, bei dem wir durch die Einführung der adäquaten lokalen Betrachtungsweise die Voraussetzungen abschwächen und die Behauptung verschärfen konnten. Durch Kombination von Satz 7 mit den Sätzen von § 2 entstehen eine Reihe von spezielleren Resultaten. Nehmen wir zur Vereinfachung E als leer an, ersetzen Abel-Beschränktheit durch Abel-Summierbarkeit und benutzen vor allem Satz 3, so ergibt sich

Satz 8. *Die trigonometrische Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ sei in dem offenen Intervall I überall Abel-summierbar zu einer in j.a.T.v. I integrierbaren Funktion. Damit*

---

[8]) Die Abel-Summe $\Sigma_A \Re\, a_n e^{inx}/(in)^2$, die nach ($S_0$) in $I - E$ vorhanden ist, existiert wegen (G) mit $k = 2$ und (2°) auch in E und ist gleich $F_2(x)$.

$\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}$ eine lokale Fourier-Reihe in I darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die zweifach integrierte Reihe $\Sigma\Re\, a_n e^{inx}/(in)^2$ in j.a.T.v. I gleichmäßig Abel-summierbar ist. Diese Bedingung ist zugleich hinreichend für die gliedweise Integrierbarkeit von $\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}$ in I und, unter der zusätzlichen Voraussetzung $a_n = o(n^\alpha)$ für ein $\alpha \geqq 0$, auch notwendig dafür.

Ist die Länge von I größer als $2\,\pi$, so sind lokale und gewöhnliche Fourier-Reihen dasselbe, und Satz 8 wird dann zu einer Verallgemeinerung eines Satzes von M. RIESZ [6] über Cesàro-summierbare trigonometrische Reihen.

Auf die gleiche Weise wie Satz 8 ergibt sich für den Fall von abzählbar vielen Ausnahmestellen

Satz 9. *Die trigonometrische Reihe $\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}$ sei in dem offenen Intervall I mit vielleicht abzählbar vielen Ausnahmen Abel-summierbar zu einer in j.a.T.v. I integrierbaren Funktion. Damit $\Sigma\Re\, a_n e^{inx}$ eine lokale Fourier-Reihe in I darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die (einfach) integrierte Reihe $\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}/in$ in j.a.T.v. I gleichmäßig Abel-summierbar ist. Diese Bedingung ist zugleich hinreichend für die gliedweise Integrierbarkeit von $\Sigma\Re\, a_n e^{inx}$ in I und, unter der zusätzlichen Voraussetzung $a_n = o(n^\alpha)$ für ein $\alpha \geqq 0$, auch notwendig dafür.*

§ 5. Allgemeine Einzigkeits- und Integrationssätze

5.1. Bei Satz 7 wirkt es noch unbefriedigend, daß (G) in der speziellen Form mit $k = 2$ vorausgesetzt wird. Von dieser Einschränkung können wir uns jedoch durch ein Induktionsverfahren auf mehrere Weisen befreien.

Satz 10. *Eine trigonometrische Reihe $\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}$ mit der Eigenschaft* (S_0) *ist genau dann eine lokale Fourier-Reihe in dem offenen Intervall I, wenn neben* (G) *noch die folgenden Bedingungen für $p = 1, 2, \ldots$ erfüllt sind:*

(1′) *$f_*(x) \geqq \chi(x)$ in I, $\chi(x)$ integrierbar in j.a.T.v. I;*

(2′) *$F_{2p}(x)$ (nach geeigneter Definition in E) glatt in E;*

(3′) *$(-1)^{p+1}\, F_{2p}(x)$ oberhalb-stetig in I.*

Beweis. Der notwendige Teil folgt aus § 2. Für den hinreichenden Teil kann man nach Satz 7 annehmen, daß $\Sigma\Re\, a_n e^{inx}/(in)^2$ keine lokale Fourier-Reihe in I ist. Wegen (G) und Satz 2 gibt es dann eine kleinste gerade Zahl $k = 2\,p > 2$, so daß $\Sigma\Re\, a_n e^{inx}/(in)^k$ eine lokale Fourier-Reihe in I ist. Die Reihe $\Sigma\Re(-1)^{p+1}\, a_n e^{inx}/(in)^{k-2}$ hat als Abel-Summe die Funktion $-(-1)^p F_{2p-2}$, die wegen (3′) in j.a.T.v. I nach unten beschränkt ist. Also sind für diese Reihe die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt, d. h. diese Reihe ist eine lokale Fourier-Reihe im Widerspruch zu unserer Wahl von $k = 2\,p$.

Satz 11. *Eine trigonometrische Reihe $\Sigma\Re\, a_n\, e^{inx}$ mit der Eigenschaft* (S_0) *ist genau dann eine lokale Fourier-Reihe in dem offenen Intervall I, wenn neben* (S_1) *und* (G) *noch die folgenden Bedingungen für $q = 1, 2, \ldots$ erfüllt sind:*

(1″) *$f_*(x) \geqq \chi(x)$ in I, $\chi(x)$ integrierbar in j.a.T.v. I;*

(2″) *$F_q(x)$ (nach geeigneter Definition in E) stetig in E;*

(3″) *$F_q(x) \geqq \chi_q(x)$ in I, $\chi_q(x)$ integrierbar in j.a.T.v. I.*

Beweis. Wie bei Satz 10 können wir uns sofort dem hinreichenden Teil zuwenden. Ist (G) mit $k = 1$ erfüllt, so ist $F_2(x) = (\int dx)\, F_1(x)$, und die Behauptung folgt aus Satz 7. Wir können also annehmen, daß (G) nicht mit

$k = 1$ erfüllt ist, so daß es eine kleinste natürliche Zahl $k = q + 1 > 1$ gibt, für die (G) erfüllt ist. Die Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^q$ mit der Abel-Summe $F_q(x)$ erfüllt aber wegen $F_{q+2}(x) = (\int dx)\, F_{q+1}(x)$ die Voraussetzungen von Satz 7, d. h. diese Reihe ist eine lokale Fourier-Reihe in I im Widerspruch zu unserer Wahl von $k = q + 1$.

5.2. In den Sätzen 10 und 11 sind eine Reihe von interessanten Spezialfällen enthalten, die man naturgemäß als Verallgemeinerungen der Sätze 8 und 9 auffassen kann. Wir geben im folgenden einige Anwendungen auf das Integrationsproblem und werden uns in Anbetracht der früheren Beispiele kurzfassen. Auf Grund von Satz 2 und 3 kann man der Voraussetzung (G) die folgende, äquivalente Gestalt geben:

(G) Für eine natürliche Zahl k sei $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}/(in)^k$ in j.a.T.v. dem offenen Intervall I gleichmäßig Abel-summierbar. – In § 5.2 wollen wir dies durchweg als erfüllt ansehen, so daß das Einzigkeits- und das Integrationsproblem gleichbedeutend werden. Wenn wir weiter vereinfachen wollen, können wir $a_n = o(n^\alpha)$ für ein $\alpha \geqq 0$ verlangen.

Satz 12. *Eine trigonometrische Reihe, die überall in I Abel-summierbar ist zu einer in j.a.T.v. I integrierbaren Funktion, ist genau dann gliedweise integrierbar in I, wenn alle Abel-Summen $F_{2p}(x)$ stetig in I sind.*

Satz 13. *Eine trigonometrische Reihe, die überall in I Abel-summierbar ist zu einer in j.a.T.v. I integrierbaren Funktion, ist genau dann gliedweise integrierbar in I, wenn alle Abel-Summen $F_q(x)$ in I vorhanden und in j.a.T.v. I integrierbar sind.*

Satz 14. *Eine trigonometrische Reihe, die in $I - E$ (E abzählbar) Abel-summierbar ist zu einer in j.a.T.v. I integrierbaren Funktion, ist genau dann gliedweise integrierbar in I, wenn alle Abel-Summen $F_q(x)$ in $I - E$ vorhanden und in I stetig sind.*

5.3. Wenn die Ausnahmemenge E endlich ist, so läßt sich in Verbesserung der bisherigen Sätze das „singuläre" Verhalten der trigonometrischen Reihe genau beschreiben unter Verwendung der Methode von Zygmund § 11.61 bzw. Wolf [9].

Satz 15. *Für die trigonometrische Reihe $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ seien $f_*(x)$ und $f^*(x)$ beide endlich in einem offenen Intervall I abgesehen von der endlichen Menge $E = \{x_\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, m$. Wenn neben* (G) *noch $f_*(x)$ in j.a.T.v. I integrierbar[9]) und $(-1)^{p+1} F_{2p}(x)$ in $I - E$ oberhalbstetig ist ($p = 1, 2, \ldots$), so unterscheidet sich $\Sigma \Re\, a_n e^{inx}$ von einer lokalen Fourier-Reihe in I nur durch eine endliche Linearkombination der Reihen $\Sigma \Re\, e^{-inx_\mu} \cdot e^{inx}$ und ihrer (mehrfach) gliedweise differenzierten Reihen.*

Beweis. Die Menge $I - E$ zerfällt in endlich viele offene Intervalle, auf die Satz 10 anwendbar ist. Also sind $I - E$ alle $F_q(x)$ ($q = 1, 2, \ldots$) vorhanden und stetig, außerdem existieren die (endlichen) Grenzwerte $F_q(x_\mu \pm 0)$.

[9]) Die bisherige Bedingung $f_*(x) \geqq \chi(x)$ ist bei Satz 15 nicht ausreichend, wie das Beispiel $-\Sigma \binom{n+\gamma}{n} \cos nx$ mit $0 < \gamma \leqq 1$ zeigt. Dies ist anscheinend bei Zygmund, § 11.61 übersehen worden.

Subtrahiert man von $\Sigma \Re a_n e^{inx}$ eine der in Satz 15 beschriebenen Linearkombinationen, so erfüllt die neue Reihe dieselben Voraussetzungen. Man kann aber durch passende Wahl der Linearkombination erreichen, daß die Abel-Summen aller gliedweisen Integrale stetig in I sind. Nach Satz 11 handelt es sich dann um eine lokale Fourier-Reihe in I, q.e.d.

Mit der gleichen Methode folgt aus Satz 11 der folgende

Satz 16. *Für die trigonometrische Reihe $\Sigma \Re a_n e^{inx}$ seien $f_*(x)$ und $f^*(x)$ beide endlich in einem offenen Intervall I abgesehen von der endlichen Menge $E = \{x_\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, m$. Wenn neben (G) noch $f_*(x)$ in j.a.T.v. I integrierbar ist und wenn alle $F_q(x)$ in $I - E$ vorhanden und $\geqq \chi_q(x)$ sind mit in j.a.T.v. $I - E$ integrierbaren Funktionen χ_q $(q = 1, 2, \ldots)$, so unterscheidet sich $\Sigma \Re a_n e^{inx}$ von einer lokalen Fourier-Reihe in I nur durch eine endliche Linearkombination der Reihen $\Sigma \Re e^{-inx_\mu} \cdot e^{inx}$ und ihrer (mehrfach) gliedweise differenzierten Reihen.*

Literatur

[1] Hobson, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series II. Cambridge 1926. — [2] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. Arch. d. Math. **4**, 285—297 (1953). — [3] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. Math. Z. **60**, 255—270 (1954). — [4] Rajchman, A., u. A. Zygmund: Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. Math. Z. **25**, 261—273 (1926). — [5] Riesz, M.: Über einen Satz des Herrn Fatou. J. f. Math. **140**, 89—99 (1911). — [6] Riesz, M.: Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Ann. **71**, 54—75 (1911). — [7] Verblunsky, S.: On summable trigonometric series. Proc. London Math. Soc. (2) **31**, 370—386 (1930). — [8] Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series II. Proc. London Math. Soc. (2) **34**, 457—491 (1932). — [9] Wolf, F.: On summable trigonometrical series: an extension of uniqueness theorems. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 328—356 (1939). — [10] Zygmund, A.: Sur la théorie Riemannienne des séries trigonométriques. Math. Z. **24**, 47—104 (1925). — [11] Zygmund, A.: Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. Math. Z. **25**, 274—290 (1926). — [12] Zygmund, A.: Trigonometrical series. New York 1952.

(Eingegangen am 13. Oktober 1955)

HAHN, W.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 151—166 (1956)

Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Von

WOLFGANG HAHN in Braunschweig

1. Bekanntlich besitzt eine lineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i Y^{(i)}(x) = 0 \qquad (a_0, \ldots, a_n \text{ konstant}) \tag{1.1}$$

endlich viele Partiallösungen der Gestalt

$$Y_{jk}(x) = x^k e^{r_j x}, \tag{1.2}$$

wobei $r_j (j = 1, 2, \ldots)$ die Nullstellen der zu (1.1) gehörenden *charakteristischen Funktion*

$$A(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \tag{1.3}$$

durchläuft. Sind alle $Re\, r_j < 0$, so gilt für alle Partiallösungen

$$\lim Y_{jk}(x) = 0 \qquad (x \to +\infty), \tag{1.4}$$

und die gleiche „Stabilitätsbeziehung" besteht für *jede* Lösung der Differentialgleichung (1.1) und der entsprechenden inhomogenen Gleichung, sofern deren rechte Seite gewissen Wachstumsvoraussetzungen genügt.

Bei linearen Differential-Differenzengleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{i=0}^{p_\varkappa} a_{i\varkappa} Y^{(i)}(x - h_\varkappa) = F(x) \qquad (x \text{ reell}), \tag{1.5}$$

wie sie z. B. in der Theorie der automatischen Regler mit Totzeit auftreten[1]), liegen die Verhältnisse etwas anders. Die charakteristische Funktion

$$A(s) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{i=0}^{p_\varkappa} a_{i\varkappa} s^i e^{-h_\varkappa s} \tag{1.6}$$

hat unendlich viele Nullstellen r_j. Daher besitzt die homogene Gleichung unendlich viele Partiallösungen vom Typ (1.2), und wenn auch unter der Voraussetzung $Re\, r_j < 0 (j = 1, 2, \ldots)$ die Beziehung (1.4) für alle Partiallösungen richtig bleibt, so kann man daraus nicht ohne weiteres das Entsprechende für *jede* Lösung $Y(x)$ behaupten. Man muß dazu vielmehr erst zeigen, daß 1) jede Lösung als konvergente, nach den Partiallösungen fortschreitende Reihe dargestellt werden kann und daß 2) diese Reihen für *alle* hinreichend großen positiven x *gleichmäßig konvergieren*; denn nur dann ist es statthaft, den Grenzübergang gliedweise zu vollziehen.

---

[1]) Vgl. dazu z. B. HAHN [4] im Schriftenverzeichnis.

Obwohl das Stabilitätskriterium etwa in der Form „Für die Stabilität des durch die Gleichung (1.5) beschriebenen Vorgangs ist die Bedingung, daß die charakteristische Funktion (1.6) ausschließlich Nullstellen mit negativen Realteilen hat, notwendig und hinreichend" vielfach bedenkenlos verwandt wird, ist ein Beweis dafür erst kürzlich von Herrn E. M. WRIGHT[2]) erbracht worden; er benutzt die Darstellung der Lösung durch ein komplexes Integral. WRIGHT hat auch gezeigt, daß jede Lösung von (1.5) durch eine bedingt konvergente Reihe darstellbar ist, die in jedem endlichen Intervall der positiven x-Achse gleichmäßig konvergiert[3]).

In der nachstehenden Arbeit begründe ich das Stabilitätskriterium aus der Reihendarstellung der Lösung und benutze dabei nur die einfachsten Sätze aus der Theorie der Laplace-Transformation, also z. B. nicht die komplexe Umkehrformel. Im einzelnen beweise ich die folgenden Sätze:

1) *Es sei die Gleichung* (1.5) *mit reellen Koeffizienten vorgelegt. Für die Spannen $h_\varkappa$ gelte die Ungleichung*

(1.7) $$0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_k .$$

Ist $k > 1$, so sollen gewisse (unten näher gekennzeichnete) Ausnahmewerte der Spannen ausgeschlossen sein. Ist dann

(1.8) $$p_0 > \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k),$$

so ist jede Lösung der homogenen Gleichung durch eine nach den Partiallösungen (1.4) *fortschreitende absolut konvergente Reihe darstellbar. Ist*

(1.9) $$p_0 = \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k),$$

so konvergiert die Reihe nur absolut, wenn $p_0 > 1$ ist; im Fall $p_0 = 1$ konvergiert sie dagegen nicht absolut.

Der Begriff „Lösung" wird unten in *5* genauer definiert. Die „Ausnahmewerte" für die Spannen liegen bestimmt nicht vor, wenn je drei der Zahlen $h_\varkappa$ inkommensurabel sind. Reine Differenzengleichungen ($p_0 = 0$) sind aus der Betrachtung ausgeschlossen.

2) *Ist $Re\, r_j > 0$ für alle r_j, so konvergieren die Reihen im Falle* (1.8) *für alle hinreichend großen x gleichmäßig, und für jede Lösung gilt*

(1.10) $$\lim Y(x) = 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Im Fall (1.9) *muß man hierfür die schärfere Bedingung*

$$Re\, r_j < -\alpha \qquad (\alpha > 0)$$

fordern. Ausnahmswerte der Spannen brauchen dabei nicht ausgeschlossen zu werden.

3) *Die Sätze* 1) *und* 2) *gelten auch für die inhomogene Gleichung* (1.5), *falls die rechte Seite einer Abschätzung der Form $F(x) < Ke^{-\gamma x}$ mit positivem γ genügt.*

4) *Die Sätze* 1) *bis* 3) *bleiben für Systeme von Gleichungen der Form* (1.5) *richtig. An die Stelle von* (1.6) *tritt dann die charakteristische Funktion des Systems.*

---
[2]) WRIGHT [11].
[3]) Vgl. dazu auch LEONTEV [6].

5) *Da man ein System mit komplexen Koeffizienten durch Zerlegung in Real- und Imaginärteile in ein reelles System überführen kann, gelten alle Sätze auch für Systeme mit komplexen Koeffizienten.*

Im § 2 sind Hilfssätze über die Nullstellen der ganzen Funktion $A(s)$ zusammengestellt. Im § 3 wird gezeigt, daß die Partialbruchzerlegung der Funktion $1/A(s)$ die gleiche Form hat wie die Zerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion, daß also keine additive ganze Funktion auftritt. Der Übersichtlichkeit halber wird der Spezialfall $k = 1$ zuerst behandelt. Der § 4 enthält eine Konvergenzbetrachtung. § 5 bringt die Lösung der Gleichung (1.5) mit Hilfe der Laplace-Transformation, und zwar ebenfalls zunächst für $k = 1$ und unter der Voraussetzung, daß alle Koeffizienten reell sind. Die Lösung wird als Reihe dargestellt, und aus dieser Darstellung wird das Stabilitätskriterium abgeleitet. Im § 6 werden die Ergebnisse auf Gleichungen mit mehreren Spannen (zunächst unter Ausschluß der Ausnahmewerte), auf Systeme von Gleichungen und schließlich auf den Fall übertragen, daß die Koeffizienten komplex sind. Im § 7 werden die „Ausnahmefälle" näher untersucht, bei denen die Reihen für die Lösungen möglicherweise ein komplizierteres Konvergenzverhalten zeigen. Die Stabilitätsaussage bleibt dagegen unverändert gültig. § 8 bringt einige abschließende Bemerkungen.

2. a) Es seien

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_p s^p \qquad (a_p \neq 0),$$
$$Q(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_q s^q \qquad (b_q \neq 0) \tag{2.1}$$

zwei Polynome mit reellen Koeffizienten und den genauen Graden p und q. Es sei $p \geqq 1$ und $p \geqq q$. Ferner sei $h > 0$. Wir betrachten die ganze Funktion

$$A(s) = P(s) + Q(s)\, e^{-hs}, \tag{2.2}$$

deren Nullstellen stets durch den Buchstaben r mit oder ohne Index, in komplexer Schreibweise durch $u + iv$, bezeichnet werden. Über die Nullstellen gilt der folgende Satz:

Es gibt eine positive Zahl R, zwei Zahlen $C_1 \geqq 0$ und $C_2 > 0$ und eine komplexe Zahl D derart, daß die Nullstellen für $|r| > R$ in der Gestalt

$$r = -C_1 \log n \pm C_2\, n\, i + D + \Phi(n) \qquad (n = N, N+1, \ldots) \tag{2.3}$$

dargestellt werden können, wobei das Fehlerglied einer Abschätzung der Gestalt

$$\Phi(n) < \text{konst. } n^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0) \tag{2.4}$$

genügt. Im Fall $p > q$ ist $C_1 > 0$, im Fall $p = q$ ist $C_1 = 0$ zu setzen.

Die Konstanten kann man berechnen. Es ist

$$C_1 = \frac{p-q}{h}, \quad C_2 = \frac{\pi}{h}. \tag{2.5}$$

Der Satz ist für beliebiges p und q von WILDER[4]) bewiesen worden. Der Beweis beruht auf der Überlegung, daß für große Beträge $|s|$ die Funktion (2.2)

[4]) WILDER [10]. Eine Abschätzung für das Fehlerglied ist dort nicht angegeben, kann aber aus dem Beweisgang entnommen werden.

mit beliebiger Genauigkeit durch eine *Vergleichs*funktion

$$b_q s^q \left(\frac{a_p}{b_q} s^{p-q} + e^{-hs}\right)$$

ersetzt werden kann, deren Nullstellen in der (u, v)-Ebene durch die Schnittpunkte der Kurven

$$\begin{aligned} e^{-hu} &= \left|\frac{a_p}{b_q}\right| (u^2 + v^2)^{\frac{p-q}{2}} \\ hv &= -(p-q) \arg (u + iv) \end{aligned} \qquad (p > q)$$

bestimmt werden. Man kann auch sagen, daß die Nullstellen von (2.5) zwei *Scharen* bilden, die *asymptotisch längs den beiden Teilen der Kurve*

(2.6) $$|s^{p-q} e^{hs}| = \left|\frac{b_q}{a_p}\right|$$

gelegen sind.

Aus (2.3) gewinnt man leicht folgende Aussagen:

a′) *Alle Nullstellen liegen in einer „linken" Halbebene, d. h. es gibt eine reelle Zahl U derart, daß*

$$Re\, r < U \quad \textit{für alle } r$$

gilt.

a″) *Ist $p > q$, so liegen in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite nur endlich viele Nullstellen.*

a‴) *Ist $p = q$, so liegen alle Nullstellen in einem Vertikalstreifen von endlicher Breite.*

Die sämtlichen Aussagen bleiben richtig, wenn die Koeffizienten a_i, b_i in (2.1) komplex sind. Man muß dann nur in (2.3) für die Nullstellen mit positiven bzw. negativen Imaginärteilen verschiedene Konstanten C_2 und D wählen.

b) Es sei $k > 1$. Wir betrachten die ganze Funktion (1.6), die wir in der Form

(2.7) $$A(s) = \sum_{\varkappa=0}^{k} P_\varkappa(s)\, e^{-h_\varkappa s}$$

schreiben wollen. Man nennt derartige Funktionen bisweilen auch „Quasipolynome". Die Nullstellen zerfallen in mehrere, aber endlich viele Scharen, für die im einzelnen eine Abschätzung der Form (2.3) gilt, oder, anders ausgedrückt, die asymptotisch längs gewissen Kurven der Gestalt

(2.8) $$|s^\varrho e^{\sigma s}| = \text{konst.}$$

gelegen sind. Dies ist ebenfalls von WILDER bewiesen; der Beweis läßt sich im Anschluß an LANGER[5]) in folgender Weise führen.

Nullstellen können offenbar nur auf solchen Wegen liegen, auf denen gewisse Summanden in (2.7) konstant bleiben oder von gleicher Größenordnung über alle Grenzen wachsen, während die übrigen Summanden in geringerem Maße anwachsen oder gegen Null gehen. Wenn mehr als zwei Summanden von gleicher Größenordnung sein sollen, so müssen zwischen den Zahlen p_i

[5]) LANGER [5]. Die Aussage über die Verteilung der Nullstellen ist dort etwas anders formuliert.

und h_i gewisse Beziehungen bestehen. Wenn z. B. die drei ersten Glieder die gleiche Größenordnung haben, so sind die Quotienten

$$\frac{P_1}{P_0}\, e^{(h_0-h_1)s}, \quad \frac{P_2}{P_0}\, e^{(h_0-h_2)s}$$

asymptotisch konstant. Dasselbe gilt dann für die Größen

$$s^{\frac{p_1-p_0}{h_0-h_1}}\, e^{-s}, \quad s^{\frac{p_2-p_0}{h_0-h_2}}\, e^{-s}.$$

Es muß also

$$\frac{p_1-p_0}{h_0-h_1} = \frac{p_2-p_0}{h_0-h_2}$$

sein. Wir wollen solche „Ausnahmefälle" zunächst ausschließen, also voraussetzen, daß jeweils immer nur zwei Summanden in (2.7) die gleiche Größenordnung haben. Man kann dann, wenn man auf einer geeigneten Kurve der Form (2.8) fortschreitet, die Funktion „zuletzt" durch eine Vergleichsfunktion $as^{p_i}\, e^{-h_i s} + s^{p_j}\, e^{-h_j s}$ ersetzt denken, wenn nämlich gerade die Summanden mit der Nummer i und j vergleichbar sind. Die Vergleichsfunktion ist zweigliedrig, so daß sie unter den in a) behandelten Typ fällt. Man kann daher die dort gewonnenen Ergebnisse anwenden. Wenn $p_0 > \operatorname{Max}(p_1, \ldots, p_k)$ ist, liefern zwei Summanden mit $p_i = p_j \neq p_0$ keine Schar von Nullstellen, denn auf einem Wege, auf dem sich zwei solche Summanden gleich verhalten, d. h. auf einer Vertikalen, wächst P_0 über alle Grenzen.

Wir können zusammenfassend die Verteilung der Nullstellen folgendermaßen beschreiben:

b′) *Alle Nullstellen liegen in einer linken Halbebene.*

b″) *Ist $p_0 > \operatorname{Max}(p_1, \ldots, p_k)$, so liegen in jedem Streifen von endlicher Breite nur endlich viele Nullstellen.*

b‴) *Die Nullstellen zerfallen in endlich viele Scharen, die asymptotisch längs gewissen, durch Gleichungen der Form*

$$|s^{\varrho} e^{\sigma s}| = \text{konst.} \; (\varrho \geqq 0,\ \sigma > 0)$$

charakterisierten Kurven gelegen sind; dabei kann $\varrho = 0$ nur im Fall $p_0 = \operatorname{Max}(p_1, \ldots, p_k)$ auftreten.

c) *Ein Quasipolynom mit k Spannen hat höchstens endlich viele Nullstellen von der Vielfachheit $k+1$. Liegt kein Ausnahmefall vor — vgl. oben in* b) *— so treten überhaupt nur endlich viele Mehrfachnullstellen auf.*

Beweis. Eine $(k+1)$-fache Nullstelle r'' erfüllt die $k+1$ Gleichungen $A(r'') = 0$, $A'(r'') = 0, \ldots, A^{(k)}(r'') = 0$, aus denen man durch Elimination der Exponentialgrößen eine algebraische Gleichung für r'' gewinnt, die nicht identisch erfüllt ist (sie enthält genau einen Summanden des Grades $p_0 + p_1 + \cdots + p_k$) und daher nur für endlich viele Werte erfüllt sein kann. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Es sei r' eine Nullstelle, deren Vielfachheit mindestens zwei beträgt. Es muß dann $A(r') = 0$, $A'(r') = 0$ sein. Nun ist die Ableitung $A'(s)$ ein Quasipolynom

$$A'(s) = P_0' + \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa(s)\, e^{-h_\varkappa s}. \tag{2.9}$$

Dabei sind die Grade der Polynome $Q_\varkappa(s)$ genau gleich denen der entsprechenden Polynome $P_\varkappa(s)$. Jede hinreichend große Nullstelle r liegt an einer Kurve, auf der sich genau zwei Terme von $A(s)$ gleich verhalten, d. h. einen asymptotisch konstanten Quotienten haben. Ist P_0 einer dieser beiden Terme, so ist (für genügend großes r) $A'(r) \neq 0$; denn die entsprechenden Terme in $A'(s)$ wachsen nicht mehr gleichartig, weil der Grad von P_0' kleiner als p_0 ist. Handelt es sich aber um zwei Exponentialglieder mit den Nummern i und j, so unterscheiden sich die Konstanten, denen sich die Quotienten

$$\frac{P_i e^{-h_i s}}{P_j e^{-h_j s}} \quad \text{und} \quad \frac{Q_i e^{-h_i s}}{Q_j e^{-h_j s}} = \frac{(P_i' - h_i P_i) e^{-h_i s}}{(P_j' - h_j P_j) e^{-h_j s}}$$

nähern, um den von eins verschiedenen Faktor h_i/h_j, der infolge der Differentiation dazugekommen ist. Die durch die Quotienten bestimmten Nullstellen liegen also auf verschiedenen Kurven; für große $|r|$ ist daher $A'(r) \neq 0$, und r ist keine Mehrfachnullstelle.

d) *Wenn kein Ausnahmefall vorliegt, gilt für große* r

$$A'(r) = g r^{p_0 + \delta} + o(r^{p_0 + \delta}) \qquad (\delta \geqq 0). \tag{2.10}$$

Dabei sind g *und* δ *Konstanten, die von der Schar abhängen, zu der die Nullstelle* r *gehört.*

Beweis. Ist $k = 1$, so ist

$$A(r) = P_0 + P_1 e^{-hr} = 0,$$

$$A'(r) = P_0' + (P_1' - h P_1) e^{-hr} = P_0' + \frac{h P_1 - P_1'}{P_1} P_0,$$

und daraus folgt (2.10) mit $\delta = 0$. Da nun für $k > 1$ auf den Wegen, an denen die Nullstellen liegen, die Funktion $A(s)$ durch eine zweigliedrige Vergleichsfunktion ersetzt werden kann, gilt (2.10) auch für diesen Fall. Wenn die beiden Terme der Vergleichsfunktion von P_0 verschieden sind, ist $\delta > 0$.

e) *Zu jedem* $\eta > 0$ *gibt es ein von* η *abhängendes* $\zeta > 0$ *mit folgender Eigenschaft: Wenn* s *von allen Nullstellen um mindestens den Betrag* ζ *entfernt bleibt, d. h. wenn* $|s - r| < \zeta$ *für alle* r *gilt, dann ist* $|A(s)| > \eta$[6]).

3. *Die Funktion* $\frac{1}{A(s)}$ *besitzt, wenn nicht ein Ausnahmefall vorliegt, die absolut konvergente Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{A(s)} = \sum_j \frac{1}{A'(r_j)(s - r_j)} + \sum_l \sum_{\tau = 1}^{t_l} \frac{\alpha_{l\tau}}{(s - r_l')^\tau}. \tag{3.1}$$

Dabei ist die erste Summe über alle einfachen Nullstellen r_j zu erstrecken. Der zweite Bestandteil rührt von den endlich vielen Mehrfachnullstellen her. Mit der inneren Summe ist der zum Pol $s = r'$ gehörende Hauptteil bezeichnet.

Beweis. Wir denken uns die meromorphe Funktion $1/A(s)$ nach der CAUCHYschen Residuenmethode, also durch Berechnung der Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{dz}{z(s - z) A(z)}$$

---

[6]) WILDER [10].

in eine Partialbruchreihe entwickelt[7]); die Wege C_n sind Kreise mit den Radien R_n, die so verlaufen, daß ihre Mindestabstände von den Nullstellen nicht kleiner als eine feste Zahl ζ sind. Nach (2.3) ist eine solche Wahl der Integrationswege möglich, und nach 2 e) ist auf C_n

$$\frac{1}{A(z)} = o(R_n),$$

wenn R_n über alle Grenzen wächst. Die entstehende Reihe hat die Gestalt

$$\frac{1}{A(s)} = \sum_j \frac{1}{A'(r_j)}\left(\frac{1}{s-r_j} + \frac{1}{r_j}\right) + \text{rationale Funktion.} \tag{3.2}$$

Die Reihe

$$\sum_j \frac{1}{A'(r_j)(s-r_j)} \tag{3.3}$$

konvergiert bei festem s absolut. Denn nach (2.10) nimmt ihr allgemeines Glied mindestens wie $r_j^{-p_0-1}$ ab. Weil aber $A(s)$ eine ganze Funktion der Ordnung eins ist, konvergiert jede über die Nullstellen laufende Reihe der Form $\sum_j r_j^{-1-\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ absolut. Man darf daher die rechte Seite von (3.2) umordnen und erhält bis auf eine Konstante, die mit A bezeichnet sei, die rechte Seite von (3.1). Jetzt lassen wir s durch positive Werte gegen Unendlich gehen. Dabei ist $\lim \frac{1}{A(s)} = 0$, und der zweite Bestandteil hat ebenfalls den Grenzwert Null. Wegen 2 b′ ist für fast alle j

$$|s - r_j| > s.$$

Die Reihe (3.3) wird somit von einem gewissen Glied an durch

$$\frac{1}{s}\sum_j \frac{1}{|A'(r_j)|} \tag{3.4}$$

majorisiert. Wenn $p_0 > 1$ ist, konvergiert diese Reihe, und der Ausdruck geht mit wachsendem s auch gegen Null. Die Konstante A ist daher gleich Null, und (3.1) ist bewiesen.

Wenn $p_0 = 1$ ist, läßt sich diese Schlußweise nicht durchführen, weil dann möglicherweise die Reihe (3.4) nicht konvergiert. Man kommt aber zum Ziel, wenn man die konjugiert komplexen Glieder der Reihe (3.3) zusammenfaßt. Denkt man sich j so groß, daß man (2.10) anwenden kann, so kommt es auf die Reihe

$$\sum_j \frac{1}{r_j(s-r_j)} \tag{3.5}$$

an. Durch Zusammenfassung der konjugiert komplexen Glieder entsteht

$$2\sum_j \frac{Re\, r_j'}{|r_j'(s-r_j')|^2},$$

wobei über alle hinreichend großen Nullstellen r_j' mit positivem Imaginärteil zu summieren ist. Beachtet man (2.3), so ergibt sich sofort die gleichmäßige Konvergenz der Reihe bezüglich s. Man darf daher den Grenzübergang

[7]) Vgl. z. B. Titchmarsh [9], II, 3,2.

$s \to \infty$ gliedweise vornehmen und erkennt wie oben, daß die Konstante A den Wert Null hat.

Damit ist die Darstellung (3.1), die wir später in der Form

$$\frac{1}{A(s)} = \sum_j \sum_{\tau=1}^{t_j} \frac{B_{j\tau}}{(s-r_j)^\tau} \tag{3.6}$$

verwenden werden, vollständig bewiesen. In (3.6) durchläuft r_j jetzt alle Nullstellen. Von den $B_{j\tau}$ mit $\tau > 1$ sind nur endlich viele von Null verschieden.

4. Wir kehren zur Funktion (2.2), also zum Fall $k = 1$ zurück und bilden die unendliche Reihe

$$B(x) = \sum_j \frac{e^{r_j x}}{A'(r_j)}, \tag{4.1}$$

wobei über alle einfachen Nullstellen summiert wird. Es gilt

a) *Die Reihe $B(x)$ konvergiert im Fall $p > q$ absolut für alle x, die der Ungleichung*

$$p + \frac{x}{h}(p-q) > 1 \tag{4.2}$$

genügen.

Aus $A(r) = 0$ folgt unter der Annahme $Q(r) \neq 0$

$$e^{rx} = \left(-\frac{P(r)}{Q(r)}\right)^{-\frac{x}{h}} = O\left(r^{-(p-q)\frac{x}{h}}\right),$$

so daß wegen (2.10) das allgemeine Glied der Reihe gleich $O\left(r_j^{-p-\frac{x}{h}(p-q)}\right)$ ist. Daraus folgt die Behauptung, und ebenso ergibt sich

b) *Die t-mal gliedweise differenzierte Reihe konvergiert absolut, wenn $p - t + \frac{x}{h}(p-q) > 1$ ist.* Ist $p > q + 1$, so konvergieren die Reihen $B(x), B'(x), \ldots, B^{(p-1)}(x)$ absolut für $x > 0$.

c) Wenn $p = q$ ist, kann man die absolute Konvergenz nur für die Reihen $B^{(t)}(x)$ mit $t \leqq p - 2$ feststellen, und zwar hängt die Güte der Konvergenz nicht von x ab. Im Fall $p = q = 1$ konvergiert die Reihe (4.1) nicht absolut. Dieser Fall muß bei der folgenden Überlegung ausgeschlossen werden[7a]).

d) *Wenn $u_j = Re\, r_j < 0$ für alle j ist, dann ist im Fall $p > q$*

$$\lim_{x\to\infty} B^{(t)}(x) = 0 \qquad (t = 0, 1, \ldots, p-1). \tag{4.3}$$

Wenn $p = q$ ist, gilt die gleiche Aussage für die Reihe $B^+(x)$ und die gliedweise differenzierten Reihen. Man muß aber jetzt zusätzlich fordern, daß alle $Re\, r_j \leqq -\alpha < 0$ sind. (Wenn $p > q$ ist, folgt das aus 2 a").)

Beweis. Es sei $x \geqq x_0 > 0$. Wenn $p > q$ ist, gibt es wegen 2 a') einen größten Realteil, den wir mit $-\alpha$ bezeichnen wollen. Es ist dann

$$|B^{(t)}(x)| \leqq \sum_j \frac{|r_j^t|\, e^{u_j x}}{|A'(r_j)|} \leqq e^{-\alpha x} \sum_j \frac{|r_j^t|}{|A'(r_j)|}\, e^{(u_j+\alpha)x_0}, \tag{4.4}$$

[7a]) Vgl. die Bemerkung am Schluß der Arbeit.

da alle Exponenten negativ sind. Die Reihe ist konvergent, und es ist $\lim e^{-\alpha x} = 0$. Der Beweis zeigt zugleich, daß die Reihe $B(x)$ und ihre $p-2$ ersten Ableitungen für $x > 0$ *gleichmäßig* konvergieren. Ist $p > q+1$, so gilt das auch für die $(p-1)$-te Ableitung; im Fall $p = q+1$ konvergiert diese erst für $x > h$.

Die gleichen Überlegungen lassen sich auch für $p = q > 1$ durchführen.

5. Wir gehen nun zur Betrachtung der Differential-Differenzengleichung

$$L(Y) \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i Y^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{q} b_i Y^{(i)}(x-h) = F(x) \tag{5.1}$$

über. Die Konstanten sind dieselben wie in (2.1) und (2.2); über $F(x)$ werden später noch Voraussetzungen formuliert. Die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ sollen keinen (nichttrivialen) gemeinsamen Teiler haben. Das bedeutet, daß der Operator L keine „Zerlegung" $L = L_1 L_2$ zuläßt, wobei $L_1(Y) = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung (ohne Verzögerungsglieder) darstellt. (Wenn eine solche Zerlegung existiert, kann die Auflösung von (5.1) auf die einer Differential-Differenzengleichung zurückgeführt werden, deren Ordnung kleiner als p ist.) Wir suchen eine Funktion $Y(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $Y(x)$ ist mitsamt den $p-1$ ersten Ableitungen für $x > 0$ definiert und stetig.

b) Die Grenzwerte

$$\lim Y^{(i)}(x) = Y_{i0} \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{5.2}$$

bei Annäherung von $x > 0$ gegen Null sind vorhanden; die Y_{i0} sind gegebene reelle Zahlen.

c) $Y(x)$ genügt der Funktionalgleichung (5.1) für $x > h$ und $x = h+$, d. h. bei Annäherung von rechts her.

d) $Y(x)$ genügt der Funktionalgleichung auch im Intervall $0 < x < h$ und für $x = h-$ mit folgender Bestimmung: Es sind gewisse Funktionen $Z_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, q)$ gegeben, die im Intervall $-h \leq x \leq 0$ definiert und stückweise stetig sind. Jedesmal wenn eine der Funktionen $Y^{(i)}$ in der zweiten Summe von (5.1) ein nichtpositives Argument bekommt, ist sie durch die entsprechende Funktion Z_i zu ersetzen:

$$Y^{(i)}(x-h) = Z_i(x-h) \quad (0 < x \leq h,\ i = 0, 1, \ldots, q). \tag{5.3}$$

(Die Funktionen $Z_i(x)$ sind zunächst ganz unabhängig voneinander, und es ist nicht notwendig $Z_i(0) = Y_{i0}$ vorausgesetzt.)

Eine den Bedingungen a) bis d) genügende Funktion $Y(x)$ heißt eine durch die *Anfangsbedingungen* (5.2) bzw. (5.3) festgelegte *Lösung* der Funktionalgleichung. Es besteht folgender Satz: *Die Funktionalgleichung* (5.1) *hat genau eine durch die Anfangsbedingungen* (5.2) *und* (5.3) *bestimmte Lösung. In jedem endlichen Intervall, in dem $F(x)$ integrabel ist, wächst die Lösung $Y(x)$ nicht stärker als eine Exponentialfunktion e^{Cx}.*

Dieser Satz wird ganz analog wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mittels sukzessiver Approximation bewiesen; man muß dazu (5.1) in ein

System von Gleichungen erster Ordnung umschreiben. Wegen der Einzelheiten der Durchführung sei auf die Monographie von Myškis und die Arbeiten von Wright verwiesen[8]).

Aus dem genannten Satz folgt, daß die Lösung gewiß eine Laplacetransformierte besitzt, wenn dies für $F(x)$ gilt. (Für die späteren Anwendungen ist besonders der Fall von Interesse, daß $F(x) = O(e^{-\gamma x})$ mit positivem γ ist oder für $x > x_0$ verschwindet.) Es habe also $F(x)$ eine Laplacetransformierte $f(s)$. Die Funktion

$$\sum_{i=0}^{q} b_i Z_i(x-h) \equiv G(x) \qquad (G(x) \equiv 0, \text{ wenn } x > h) \tag{5.4}$$

hat auch eine Laplace-Transformierte $g(s)$. Transformiert man die Ausgangsgleichung, so erhält man die Bildgleichung

$$y(s)\,A(s) = f(s) - g(s) + \sum_{i=1}^{p} (a_i + e^{-hs} b_i) \sum_{k=1}^{i} s^{i-k}\, Y_{k-1,0}\,. \tag{5.5}$$

(b_i mit $i > q$ ist Null.) $A(s)$ ist die Funktion (2.2), $y(s)$ die Bildfunktion von $Y(x)$. Das in (5.5) rechts auftretende Quasipolynom werden wir mit

$$\tilde{A}(s) \equiv \tilde{P}(s) + e^{-hs}\tilde{Q}(s) \tag{5.6}$$

bezeichnen; die Grade der Polynome $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ sind mindestens um eins kleiner als p bzw. q.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $F(x) \equiv 0$, $G(x) \equiv 0$, $Y_{k0} = 0$ $(k = 0, \ldots, p-2)$, $Y_{p-1,0} = 1$. Dann ist $\tilde{A}(s) \equiv 1$. Die entsprechende Lösung heiße $\hat{Y}(x)$; ihre Bildfunktion genügt der Gleichung

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{A(s)}\,.$$

(Die Funktion $\hat{Y}(x)$ ist die in der Regelungstechnik häufig benutzte Lösung, die die Wirkung des „Einheitsstoßes" auf den ungestörten Regelkreis beschreibt.) Aus (3.1) schließen wir, daß für $x > 0$

$$\hat{Y}(x) = \sum_j \frac{e^{r_j x}}{A'(r_j)} + \sum_l \sum_{\tau=1}^{t_l} \frac{\alpha_{l\tau}}{\tau!}\, x^{\tau-1} e^{r_l'' x} \tag{5.7}$$

ist. Die Summation im ersten Glied ist wieder über alle einfachen Nullstellen zu erstrecken; der zweite Bestandteil rührt von den Mehrfachnullstellen her. Man kann (5.7) unmittelbar verifizieren; denn die Reihe, die mit der in *4.* betrachteten Reihe $B(x)$ übereinstimmt, konvergiert nach Absonderung der endlich vielen Glieder mit $Re\, r \geqq 0$ auf der ganzen positiven Achse absolut und gleichmäßig und darf daher gliedweise transformiert werden. Man braucht also die komplexe Umkehrformel nicht heranzuziehen.

Wir denken uns der durch (5.6) definierten Funktion $\tilde{A}(s)$ einen Operator $\tilde{L}$ zugeordnet. Nach bekannten Regeln der Laplace-Transformation entspricht dann die Bildfunktion

$$\frac{\tilde{A}(s)}{A(s)}$$

[8]) Myškis [6] § 2, Wright [10].

(daß diese Funktion überhaupt Bildfunktion ist, folgt aus der Bemerkung über die Grade der in $A(s)$ und $\tilde{A}(s)$ auftretenden Polynome) der Originalfunktion $\tilde{L}(\hat{Y})$, und man kann unter Verwendung des Faltungssymbols $*$ die zu (5.5) gehörende Originalfunktion, also die gesuchte Lösung, in geschlossener Form aufschreiben:

$$Y(x) = (F - G) * \hat{Y}(x) + \tilde{L}(\hat{Y}(x)). \tag{5.8}$$

Es sei nun $Re\, r_j < 0$ (bzw. im Fall $p = q$ $Re\, r_j \leq -\alpha < 0$) für alle j. Wenn x über alle Grenzen wächst, wird der zweite Summand in (5.8) beliebig klein; denn er setzt sich, von endlich vielen Gliedern $x^{\varrho} e^{r_j x}$ abgesehen, linear aus der Reihe $B(x)$ (bzw. $B^{+}(x)$) und ihren $p-1$ ersten Ableitungen zusammen, und für diese Funktionen gilt der Satz in *4* d. Da man wegen der absoluten Konvergenz gliedweise falten darf, geht $G * \hat{Y}(x)$ ebenfalls gegen Null, und das gleiche gilt für $F * \hat{Y}(x)$, wenn $F(x)$ für große x verschwindet oder nicht größer als konst. $e^{-\gamma x}$ wird. Damit sind die in 1 formulierten Sätze für den reellen Fall und $k = 1$ bewiesen.

Man kann die Gleichung (4.1) noch auf einem anderen Wege auflösen, da sich die Funktionalgleichung in jedem Intervall $nh < x \leq (n+1)\,h$ wie eine gewöhnliche Differentialgleichung verhält, deren rechte Seite für $n = 0$ durch die Anfangswerte, für $n > 0$ durch die vorhergegangenen Integrationsschritte bekannt ist. Z. B. ergibt sich für die Lösung $\hat{Y}(x)$ der Gleichung $Y'(x) = Y(x-1)$ auf diesem Wege die Darstellung

$$\hat{Y}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad (n < x \leq n+1,\ n = 1, 2, \ldots),$$

die man mit der Reihendarstellung

$$\hat{Y}(x) = \sum_j \frac{e^{r_j x}}{1 + r_j},$$

summiert über alle Nullstellen r_j der Funktion $s - e^{-s}$, vergleichen kann. Ein derartiger Vergleich zeigt auch, wie ohne Beweis erwähnt sein soll, daß die p-te Ableitung von (5.7) an der Stelle $x = h$ einen Sprung von der Größe b_{p-1} macht, bzw. im Fall $p - q > 1$ stetig ist.

6. Die Theorie der allgemeinen Gleichungen (1.5) mit mehreren Spannen bringt, wenn keine Ausnahmefälle vorliegen, keine neuen Gesichtspunkte. Wir schreiben die Gleichung, zunächst unter Beschränkung auf reelle Koeffizienten, in der Form

$$\begin{aligned} L(Y) \equiv \sum_{i=0}^{p_0} a_{i0}\, Y^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{p_1} a_{i1}\, Y^{(i)}(x - h_1) + \cdots + \\ + \sum_{i=0}^{p_k} a_{ik}\, Y^{(i)}(x - h_k) = F(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

auf. Für die Spannen gelte wie stets (1.7); die Ausnahmewerte seien ausgeschlossen. „Lösung“ und „Anfangswerte“ sind ebenso wie in *5* erklärt. Die Funktionen $Z_i(x)$ sind im Intervall $-h_k < x \leq 0$ erklärt, außerhalb dieses Intervalls sind sie gleich Null. Der in *5* ausgesprochene Existenzsatz bleibt

in der gleichen Form gültig[9]). Die Laplace-Transformation führt (6.1) in eine Bildgleichung der Gestalt

$$y(s)\,A(s) = f(s) - g(s) + \tilde{A}(s) \tag{6.2}$$

über. $A(s)$ ist die charakteristische Funktion der Gleichung, nämlich das Quasipolynom (1.6) bzw. (2.7). Der Grad p_0 des von Exponentialgliedern freien Polynoms wird im folgenden auch die „Ordnung" des Quasipolynoms genannt.

Die weiteren Schritte verlaufen wie in *5*. Man erklärt eine Funktion $\hat{Y}(x)$, deren Laplace-Transformierte die Funktion $1/A(s)$ ist, und folgert aus (3.4) die Darstellung

$$\hat{Y}(x) = \sum_j \sum_{\tau=1}^{t_j} \frac{B_{j\tau}}{\tau!}\, x^{\tau-1} e^{r_j x}. \tag{6.4}$$

Die Reihe konvergiert im Fall $p_0 > \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k)$ mitsamt ihren p_0 ersten Ableitungen für alle x absolut, die größer als ein gewisses x_0 sind; das ergibt sich wie in *4*. (Von der genauen Bestimmung von x_0 wollen wir absehen.) Ist $p_0 = \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k) > 1$, so konvergiert die Reihe mitsamt ihren $p_0 - 2$ ersten Ableitungen für $x > 0$ absolut. Ebenso wie oben ergibt sich, daß

$$\lim \hat{Y}(x) = 0 \qquad (x \to \infty) \tag{6.5}$$

ist, wenn alle r_j negative Realteile haben bzw. kleiner als $-\alpha$ sind.

Das durch (6.2) erklärte Quasipolynom $\tilde{A}(s)$ ist von kleinerer Ordnung als $A(s)$ (d. h. der Grad des von Exponentialfaktoren freien Polynoms ist kleiner als der bei $A(s)$), so daß wie in *5*. die Funktion $\tilde{A}(s)/A(s)$ als Bildfunktion angesehen werden kann. Durch Rücktransformation der aus (6.2) folgenden Bildgleichung

$$y(s) = \frac{f(s) - g(s)}{A(s)} + \frac{\tilde{A}(s)}{A(s)}$$

gelangt man zu einer Darstellung der Gestalt (5.8) für die Lösung. Aus (6.5) folgt dann die in *1*. formulierte Aussage 2).

Der Beweis des Stabilitätskriteriums, also der Aussage (6.5), für die bisher ausgeschlossenen Ausnahmefälle kann sehr leicht erbracht werden, wenn man beachtet, daß die Lösungen von den Spannen $h_\varkappa$ *stetig* abhängen[9]). Wählt man eine beschränkte Folge $\{h_\varkappa^{(\nu)}\}$ von Spannenkonstellationen, die gegen eine Ausnahmekonstellation $\{h_\varkappa^{(0)}\}$ konvergiert, und bezeichnet man die entsprechenden Lösungen $\hat{Y}(x)$ mit $\hat{Y}_\nu(x)$ bzw. $\hat{Y}_0(x)$, so ist nach (6.5) für hinreichend großes $x > X'$ sicher $|\hat{Y}_\nu(x)| < \varepsilon$, und zwar läßt sich diese Abschätzung gleichmäßig für die Konstellationen der genannten Folge wählen; denn da die Nullstellen r_j stetig von den Spannen abhängen, kann man die rechte Seite der Abschätzung (4.4) durch einen Ausdruck ersetzen, der für alle Funktionen $A(s)$ gilt, die zu den Konstellationen der Folge gehören. Andererseits ist bei festem x $\lim \hat{Y}_\nu(x) = \hat{Y}_0(x)$. Man darf also die Grenz-

[9]) Myškis [7]. Der Existenzsatz gilt auch für die Ausnahmewerte der Spannen.

übergänge bezüglich x und bezüglich $\{h_\varkappa^{(\nu)}\}$ vertauschen, und (6.5) ist damit auch für die Ausnahmefälle bewiesen.

Es bleibt noch die Behandlung eines *Systems* von m Funktionalgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{m} L_{\mu\nu}(Y_\nu(x)) = F_\mu(x) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{6.6}$$

übrig, in dem die mit $L_{\mu\nu}(Y)$ bezeichneten Operatoren von der Gestalt (6.1) sind. Für jede der unbekannten Funktionen $Y_\nu(x)$ besteht ein System von Anfangsbedingungen wie (5.2) und (5.3). Der Lösungsvorgang verläuft formal wie bei einer einzigen Gleichung. Durch Laplace-Transformation entsteht aus (6.6) ein Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_{\mu\nu}(s)\, y_\nu(s) = f_\mu(s) - g_\mu(s) + \tilde{A}_\mu(s) \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{6.7}$$

Die Bezeichnungen sind sinngemäße Verallgemeinerungen der in (6.2) eingeführten. Die Größen $A_{\mu\nu}(s)$ sind Quasipolynome wie (2.7); die Grade der darin erscheinenden Polynome müssen mit drei Indizes gekennzeichnet werden. Wir wollen voraussetzen, daß sich unter den größten in ein und derselben Zeile auftretenden Graden $p_i^{\mu\nu}$ ($i = 0, 1, \ldots, k$; $\nu = 1, \ldots, m$) mindestens einer mit dem unteren Index Null befindet (d. h. in jeder Gleichung von (6.6) befindet sich unter den auftretenden höchsten Ableitungen eine, die von Verzögerungen frei ist). Dieser Maximalgrad heiße q_μ. Die Größen $\tilde{A}_\mu(s)$ sind dann Quasipolynome, in denen kein Polynomfaktor mit einem Grade größer als $q_\mu - 1$ vorhanden ist. Wir bilden die *charakteristische Funktion des Systems*, nämlich die Determinante $A(s) = |A_{\mu\nu}(s)|$; von ihr wollen wir annehmen, daß sie die genaue Ordnung $q = q_1 + \cdots + q_m$ hat. Unter dieser Annahme ist $A(s)$ ein Quasipolynom, für das die in 2 b abgeleiteten Sätze gelten.

Die zu dem Element $A_{\mu\nu}$ gehörende Unterdeterminante von $|A_{\mu\nu}|$ heiße $A^{\mu\nu}$; sie ist ein Quasipolynom, in dem kein Polynomfaktor einen höheren Grad als $q - q_\mu$ hat. Löst man nun (6.7) nach den $y_\nu(s)$ auf, so erscheinen auf der rechten Seite Quotienten der Gestalt $\tilde{A}_\mu A^{\mu\nu}/A$. Beachtet man das über die Polynomgrade Gesagte, so erkennt man, daß der höchste im Zähler auftretende Grad höchstens gleich $q_\mu - 1 + q - q_\mu = q - 1$ ist. Da also der Nennergrad überwiegt, besitzen die Quotienten Originalfunktionen. Die weiteren Schlüsse verlaufen wie in *5.* bzw. wie oben in *6.* Nennt man die zu $1/A(s)$ gehörende Originalfunktion wieder $\hat{Y}(x)$ und führt die zu den Quasipolynomen $\tilde{A}_\mu(s)$ und $A^{\mu\nu}(s)$ gehörenden Operatoren $\tilde{L}_\mu$ und $L^{\mu\nu}$ ein, so findet man analog zu (5.8) die Darstellung

$$Y_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{m} (F_\mu - G_\mu) * \tilde{L}_\mu(\hat{Y}(x)) + \sum_{\mu=1}^{m} \tilde{L}_\mu L^{\mu\nu}(\hat{Y}(x)) \qquad (\nu = 1, \ldots, m). \tag{6.8}$$

Wir wollen unsere Ergebnisse noch auf Gleichungen mit komplexen Koeffizienten übertragen. Wenn die Spannen und die Variable x reell sind, müssen Realteile und Imaginärteile der Lösungsfunktionen einzeln Lösungsfunktionen

eines neuen Systems sein, das aus dem ursprünglichen durch Trennung von Real- und Imaginärteilen hervorgeht. Hat die ursprüngliche Gleichung bzw. das ursprüngliche System die charakteristische Funktion $A(s)$ von der Ordnung p_0 — diese hat jetzt komplexe Koeffizienten — so ist die charakteristische Funktion des neuen Systems gleich dem „reellen" Quasipolynom $A(s)\bar{A}(s)$ von der genauen Ordnung $2p_0$. Man kann das in den einfachsten Fällen, z. B. bei einer Gleichung, leicht unmittelbar nachprüfen. Wenn ein System vorliegt, überlegt man sich, daß das zu der in (6.7) erscheinenden Matrix $(A_{\mu\nu}(s))$ gehörende homogene algebraische Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_{\mu\nu}(s)\, z_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots m) \tag{6.9}$$

nichttriviale Lösungen $\{z_\nu\}$ besitzt, wenn s eine Nullstelle der Funktion $A(s)$ ist. Jeder Lösung entspricht eine Lösung desjenigen homogenen Systems, das durch Trennung der Real- und Imaginärteile entsteht. Für dieses System bekommt man aber auch eine Lösung, wenn man zu dem zu (6.9) formal konjugiert komplexen System übergeht. Umgekehrt kann man aus jeder Lösung des neuen Systems je eine Lösung von (6.9) und dem dazu konjugiert komplexen System zusammensetzen. Die Nullstellen der charakteristischen Funktion des neuen Systems verteilen sich ebenso auf die Halbebenen wie die von $A(s)$. Die Stabilitätsaussagen und die Entwicklungssätze gelten daher einzeln für Real- und Imaginärteile der Lösungen und somit für die Lösungen selbst.

7. Wir wollen noch auf die Ausnahmefälle etwas näher eingehen. Wir hatten diese bisher dadurch charakterisiert, daß gewisse Bildungen der Form

$$\frac{p_i - p_j}{h_i - h_j} \qquad (i = 1, \ldots, k,\ i \neq j) \tag{7.1}$$

einander gleich wurden. Diese Gleichheiten sind aber nur notwendig und keineswegs hinreichend für diejenigen Fälle, bei denen die Schlußweisen der bisherigen Betrachtungen möglicherweise versagen. Derartige Gleichheiten haben ja zunächst nur zur Folge, daß in der Bildung (2.7) mehr als zwei Glieder auf gewissen Wegen die gleiche Größenordnung haben. Zur Beschreibung der Lage der Nullstellen wird man auf eine mehrgliedrige Vergleichsfunktion geführt, die man auf die Gestalt

$$s^{p_r} e^{h_i s} \left[C_1 (s^\gamma e^s)^{\alpha_1} + C_2 (s^\gamma e^s)^{\alpha_2} + \cdots + C_m (s^\gamma e^s)^{\alpha_m}\right] \qquad (m \leq k) \tag{7.2}$$

bringen kann. Darin sind die Zahlen α_μ von der Form $h_i - h_j$, und zwar müssen sie kommensurabel sein, weil diese Bedingung für einen Ausnahmefall notwendig ist. Setzt man jetzt eine geeignete Potenz von $s^\gamma e^{-s}$ gleich z, so kann man die Klammer in (7.2) als Polynom in z schreiben und in Linearfaktoren zerlegen. Wenn diese Linearfaktoren voneinander verschieden sind, so entspricht jedem von ihnen eine Schar von Nullstellen des früher behandelten Typs mit der Gleichung $z =$ konst. (Etwaige Faktoren $z = 0$ sind ohne Bedeutung.) In diesem Fall bleiben die Betrachtungen unverändert gültig. (Für eine zweigliedrige Vergleichsfunktion sind die Polynome vom Typ $z^N + A$.)

Die Verhältnisse liegen anders, wenn in der Zerlegung einzelne Linearfaktoren mehrfach auftreten. Hier bestehen zwei Möglichkeiten:

a) Ein t-facher Linearfaktor der Vergleichsfunktionen entspricht einer Schar von t-fachen Nullstellen der Ausgangsfunktion.

b) Zu einem t-fachen Linearfaktor gehören mehrere Scharen, deren Nullstellen dann natürlich von geringerer Vielfachheit sind.

Die Möglichkeit a) bringt keine grundsätzlich neuen Gesichtspunkte. Der zweite Term von (3.1) enthält jetzt ebenso wie der erste unendlich viele Glieder. Nun sind aber die mit $\alpha_{l\tau}$ bezeichneten Koeffizienten rationale Funktionen der Ableitungen von $A(s)$ an der Stelle r'' (das soll eine Mehrfachnullstelle sein), und der Nenner der rationalen Funktion ist bezüglich r'' von höherem Grade als der Zähler. Ist z. B. r'' eine t-fache Nullstelle, also $A(s) = (s-r'')^t A_1(s)$ mit $A(r'') \neq 0$, so lehrt eine kurze Rechnung, daß

$$\alpha_{l t} = \frac{t!}{A^{(t)}(r'')}, \quad \alpha_{l,t-1} = -\frac{t!}{t+1} \frac{A^{(t+1)}(r'')}{(A^{(t)}(r''))^2}$$

ist usw. Im Fall a) bleibt nun — das ist das Entscheidende — die Betrachtung in 2 d) gültig. Die Formel (2.10) ist dann auch für Mehrfachnullstellen richtig, weil ja jede Mehrfachnullstelle zugleich Nullstelle eines Quasipolynoms mit weniger Spannen ist. Die Koeffizienten $\alpha_{l\tau}$ haben daher in r'' die gleiche Größenordnung wie die Koeffizienten der Reihe (3.3), und die für diese Reihe durchgeführten Konvergenzbetrachtungen können ebenso übertragen werden wie die Untersuchungen in *4*. Für die Funktion $1/A(s)$ gilt die Partialbruchzerlegung (3.6); die Aussage über die $B_{j\tau}$ ist so zu formulieren, daß von den $B_{j\tau}$ mit $\tau > k$ nur endlich viele von Null verschieden sind.

In dem oben mit b) bezeichneten Fall ist dagegen die Formel (2.10) und die entsprechende Formel für Mehrfachnullstellen nicht unbedingt richtig. Das zeigt beispielsweise die Funktion

$$A(s) = (s - e^{-s})^2 - 1. \tag{7.3}$$

Hier ist

$$A'(s) = 2(s - e^{-s})(1 + e^{-s}),$$

und für eine Nullstelle r von $A(s)$ ist

$$A'(r) = 2r \text{ bzw. } = -2(2+r), \text{ also sicher } A'(r) = O(r), \tag{7.4}$$

während nach (2.10) $A'(r) = O(r^2)$ sein müßte. In diesem Beispiel würde die durch (7.4) gegebene Größenordnung für den Konvergenzbeweis noch ausreichen; es sind aber Funktionen möglich, bei denen der „Abfall" der Größenordnung noch stärker ist — insbesondere bei Mehrfachnullstellen —, so daß man mit den oben gegebenen einfachen Summationsvorschriften für die Reihen nicht mehr auskommt[10]).

Man erkennt jedenfalls, daß die ursprüngliche Kennzeichnung der Ausnahmefälle sehr verfeinert werden kann. Es brauchen nur solche Quasipolynome ausgeschlossen zu werden, die unter den Fall b) unterzuordnen sind.

[10]) Vgl. die ziemlich komplizierten Summationsvorschriften bei Wright [11] und Leontev [6].

Daß das Stabilitätskriterium keine Ausnahmen erforderlich macht, wurde schon oben gezeigt.

8. Wenn nicht alle Nullstellen der charakteristischen Funktion negative Realteile haben, so besitzt die Gleichung (5.1) bzw. das System (6.6) gewiß Lösungen, die mit wachsendem x nicht gegen Null gehen. Das System ist dann also nicht mehr „stabil" zu nennen.

Auf Methoden, wie man die Bedingung $Re\, r_j < 0$ nachprüft, wollen wir hier nicht eingehen. Es sei auf die Berichte von Bellman und Danskin [11]) sowie auf die Arbeit von Èl'sgol'c[12]) verwiesen.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß das dargestellte Lösungsverfahren bei Gleichungen (1.5), in denen einzelne Spannen negativ sind, versagt. Das gleiche gilt, wenn $p_0 < \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k)$ ist. Die charakteristische Funktion besitzt dann Nullstellen mit beliebig großen Realteilen, und die Laplace-Transformation läßt sich nicht anwenden.

Bemerkung bei der Korrektur. Die Aussage (4.3) bleibt auch für die Lösungen von $L(Y) = 0$ richtig, wenn der auf S. 158 und 162 ausgeschlossene Fall $p_0 = \mathrm{Max}(p_1, \ldots, p_k) = 1$ vorliegt. Y befriedigt nämlich auch die Gleichung $L(L(Y)) = 0$, und für diese ist $p_0 = 2$, mithin (4.3) gesichert.

Literatur

[1] Bellman, R., and J. M. Danskin: The stability theory of differential difference equations. Proc. Symp. nonlinear circuit Analysis New York, April 23, 24, **1953**, 107—123. [2] Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937. — [3] Èl'sgol'c, L. È.: Die Stabilität der Lösungen von Differential-Differenzengleichungen. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 4, 95—112 (1954) (russ.). — [4] Hahn, W.: Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen. Jber. dtsch. Math.-Verein. **57**, 55—84 (1954). — [5] Langer, R. E.: The asymptotic location of the roots of a certain transcendental equation. Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 837—844 (1929). — [6] Leontev, A. F.: Differential-Differenzengleichungen. Mat. Sbornik (n. Ser.) **24**, (66), 348—374 (1949) (russ.). — [7] Myškis, A. D.: Lineare Differential-Differenzengleichungen mit nacheilendem Argument. Moskau u. Leningrad 1951 (russ.) [13]). — [8] Nejmark, Ju. I.: D-Zerlegung des Raumes der Quasipolynome. Prikladnaja Mat. Mech. **13**, 349—379 (1949) (russ.). — [9] Titchmarsh, E.: Theory of functions. Oxford 1939. — [10] Wilder, C. E.: Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points. Trans. Amer. Math. Soc. **18**, 414—442 (1917), § 3. — [11] Wright, E. M.: The linear difference-differential equation with constant coefficients. Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **62**, 387—393 (1949).

(Eingegangen am 21. Februar 1955)

---

[11]) Vgl. [1].

[12]) Vgl. [3]. Siehe auch Nejmark [8].

[13]) Deutsche Übersetzung Berlin 1955.

KANOLD, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 167—179 (1956)

Über einen Satz von L. E. Dickson

Von

HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

In einer Arbeit [1] aus dem Jahre 1913 zeigte L. E. DICKSON, daß es zu einer vorgegebenen Anzahl von verschiedenen ungeraden Primfaktoren und einer vorgegebenen Potenz von 2 nur endlich viele primitive nichtdefiziente Zahlen geben kann. Dabei heißt eine Zahl nichtdefizient, wenn die Summe aller ihrer (positiven) Teiler nicht kleiner als das Doppelte der Zahl selbst ist; ist jeder echte Teiler der Zahl defizient, so heißt sie insbesondere eine primitive nichtdefiziente Zahl. In diesem Ergebnis ist enthalten, daß es höchstens endlich viele ungerade vollkommene Zahlen mit vorgegebener Anzahl von verschiedenen Primfaktoren geben kann. Wir wollen in der vorliegenden Arbeit nicht nur vollkommene, sondern auch mehrfach vollkommene Zahlen betrachten und für diese ähnliche Ergebnisse wie den DICKSONschen Satz herleiten. Die Beweismethoden sind von denjenigen, die DICKSON verwendete, verschieden.

§ 1

Es bezeichne $\sigma(n)$ wie üblich die Summe aller (positiven) Teiler der natürlichen Zahl n. Wir denken uns diese in der Primzahlpotenzzerlegung

$$(1)\qquad n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$$

gegeben. Die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n bezeichnen wir auch mit $V(n)$, also

$$(2)\qquad k = V(n).$$

Wenn für eine natürliche Zahl s die Gleichung

$$(3)\qquad \sigma(n) = s \cdot n$$

erfüllt ist, nennen wir n eine $(s-1)$-fach vollkommene Zahl. Die „einfach vollkommenen" Zahlen $(s = 2)$ heißen dann auch einfach „vollkommene" Zahlen. Nach (1) und (3) ist eine $(s-1)$-fach vollkommene Zahl auch definiert durch

$$(4)\qquad s = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{\varkappa=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{p_\varkappa} + \frac{1}{p_\varkappa^2} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}\right).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(5)\qquad 1 + \frac{1}{p_\varkappa} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} = f_\varkappa .$$

Sind $p_\varkappa$ und $\alpha_\varkappa$ gegeben, so ist danach $f_\varkappa$ eindeutig bestimmt. Es gilt aber auch

die Umkehrung: Ist $f_\varkappa$ gegeben, so sind dadurch $p_\varkappa$ und $\alpha_\varkappa$ eindeutig bestimmt. Denn es ist

$$1 + \frac{1}{p_\varkappa} \leqq f_\varkappa < 1 + \frac{1}{p_\varkappa - 1}\,. \tag{6}$$

§ 2

Wir nehmen jetzt an, es gäbe unendlich viele verschiedene $(s-1)$-fach vollkommene Zahlen mit einer festen Anzahl k von verschiedenen Primfaktoren. Wir denken uns jetzt zunächst diese Zahlen in einer Folge (z. B. der Größe nach) angeordnet

$$\{n_\varrho\} = n_1, n_2, n_3, \ldots . \tag{7}$$

Wir können nach (4) und (5) schreiben

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{k} f_{\varrho\varkappa} \qquad \varrho = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Dabei haben wir die Bezeichnungen

$$n_\varrho = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}\,; \quad f_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}} \tag{9}$$

eingeführt. Wir greifen jetzt ein festes $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ heraus und betrachten die Folge

$$\{f_{\varrho\varkappa}\} = f_{1\varkappa},\ f_{2\varkappa}, \ldots . \tag{10}$$

Nach (6) ist bestimmt $1 < f_{\varrho\varkappa} < 2$. Also besitzt die Folge (10) einen Häufungswert $h_\varkappa$. Wir wählen nun aus der Folge (7) eine Teilfolge $\{n_\varrho^{(1)}\}$ so aus, daß

$$f_{\varrho 1}^{(1)} \to h_1 \tag{11}$$

gilt. Dann wählen wir aus $\{n_\varrho^{(1)}\}$ eine Teilfolge $\{n_\varrho^{(2)}\}$ so, daß auch

$$f_{\varrho 2}^{(2)} \to h_2\,. \tag{12}$$

Dieses Verfahren denken wir uns fortgesetzt. Schließlich erhalten wir eine Folge $\{n_\varrho^{(k)}\}$ derart, daß

$$f_{\varrho\varkappa}^{(k)} \to h_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k. \tag{13}$$

Es ist nun für alle $n_\varrho^{(k)}$ und $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$f_{\varrho\varkappa}^{(k)} = h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa}\,, \tag{14}$$

wobei

$$\lim_{\varrho\to\infty} \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0 \tag{15}$$

gilt. Ferner erhalten wir aus (8) und (14)

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{k} (h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa})\,. \tag{16}$$

Wir können durch passende Wahl von ϱ immer erreichen, daß bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$|\varepsilon_{\varrho\varkappa}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k \quad \text{und} \quad \varrho \geqq R \tag{17}$$

wird. Aus (16) folgt dann

$$|s - h_1 h_2 \dots h_k| < \varepsilon \cdot A, \tag{18}$$

wobei A eine positive Zahl bedeutet, die unterhalb einer festen Schranke liegt. Das liefert schließlich

$$s = h_1 h_2 \dots h_k . \tag{19}$$

§ 3

Wir betrachten im folgenden die Menge der Zahlen $\{n_\varrho^{(k)}\}$, wobei wir auch noch $\varrho \geqq R$ voraussetzen. Der Einfachheit halber lassen wir die oberen Indizes (k) weg. Wir wollen uns in diesem Paragraphen etwas näher mit der Gestalt der Häufungswerte bzw. Grenzwerte $h_\varkappa$ befassen. Wir werden zu einer Einteilung in mehrere Klassen gelangen.

In die Klasse I sollen alle $h_\varkappa$ kommen, für die

$$h_\varkappa = 1 \tag{20}$$

gilt. Die Bedingung (20) bedeutet genauer

$$f_{\varrho\varkappa} = h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \dots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}} \to 1, \tag{21}$$

ist also gleichbedeutend mit

$$p_{\varrho\varkappa} \to \infty; \tag{22}$$

außerdem sehen wir sogleich, daß für ein beliebiges ϱ

$$\varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0 \tag{23}$$

sein muß.

In die Klasse II, a) sollen alle die $h_\varkappa$ kommen, für die

$$h_\varkappa = 1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^\alpha} \tag{24}$$

ist, wobei p eine feste ungerade Primzahl und α ein fester Exponent bedeuten (p, α hängen also insbesondere nicht von ϱ ab). Die Bedingung (24) führt zu

$$f_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^\alpha} + \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \dots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}}. \tag{25}$$

Wegen $\varrho \geqq R$, also (17) und (6), liefert dies für ein beliebiges ϱ

$$p_{\varrho\varkappa} = p, \quad \alpha_{\varrho\varkappa} = \alpha, \quad \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0. \tag{26}$$

Denn sei etwa $|\varepsilon_{\varrho\varkappa}| < \frac{1}{p^{\alpha+2}}$, so ist einerseits $1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} \leqq f_{\varrho\varkappa} < 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa} - 1}$, andererseits aber auch $1 + \frac{1}{p+1} < 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} < f_{\varrho\varkappa} < 1 + \frac{1}{p-1}$, d. h. $p \leqq p_{\varrho\varkappa} \leqq p + 1$. Weil p eine *ungerade* Primzahl sein soll, kann $p + 1$ keine Primzahl sein. Daraus ergibt sich leicht (26). Aus (26) entnehmen wir, daß die Häufungswerte aus Klasse II, a) genau dann auftreten, wenn alle n_ϱ (mit $\varrho \geqq R$) ein und dieselbe Primzahl $p > 2$ in genau ein und derselben Potenz α enthalten.

12*

In die Klasse II, b) sollen die $h_\varkappa$, für die

$$h_\varkappa = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^\alpha} \tag{27}$$

mit festem $\alpha > 1$ gilt. Das führt zu

$$p_{\varrho\varkappa} = 2, \quad \alpha_{\varrho\varkappa} = \alpha, \quad \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0. \tag{28}$$

Schließlich nehmen wir in Klasse II, c) den Häufungswert

$$h_\varkappa = 1 + \frac{1}{2}, \tag{29}$$

wenn er als Grenzwert von

$$p_{\varrho\varkappa} = 2, \quad \alpha_{\varrho\varkappa} = 1 \tag{30}$$

entsteht. Auch hier ist für jedes ϱ

$$\varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0. \tag{31}$$

Wir fassen II, a) b) c) zu der Klasse II zusammen. Allen $h_\varkappa$ aus Klasse II ist gemeinsam, daß für ein beliebiges ϱ stets (31) gilt und daß sie genau dann auftreten, wenn alle n_ϱ ein und dieselbe Primzahl in ein und derselben Potenz enthalten.

In die Klasse III kommen jetzt die noch möglichen $h_\varkappa$. Sie haben die Gestalt

$$h_\varkappa = 1 + \frac{1}{p-1}, \tag{32}$$

wobei p eine feste Primzahl bedeutet. Ist $p \neq 3$, so liefert die Gleichung (32)

$$f_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p-1} + \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}{}^{\varkappa}} < 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa} - 1}. \tag{33}$$

Nehmen wir $|\varepsilon_{\varrho\varkappa}| < \frac{1}{p^2}$, so wird

$$\begin{gathered} \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}+1} + \frac{1}{(p_{\varrho\varkappa}+1)^2} < \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} < \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}; \\ \frac{1}{p} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}-1}; \quad p_{\varrho\varkappa} \leqq p \leqq p_{\varrho\varkappa} + 1. \end{gathered} \tag{34}$$

Daraus folgt

$$p_{\varrho\varkappa} = p; \quad \alpha_{\varrho\varkappa} \to \infty \tag{35}$$

und für ein beliebiges ϱ stets

$$\varepsilon_{\varrho\varkappa} < 0. \tag{36}$$

Ist $p = 3$, also $h_\varkappa = 1 + \frac{1}{2}$, so soll dieses $h_\varkappa$ genau dann in Klasse III gehören, wenn es als Grenzwert von

$$p_{\varrho\varkappa} = 3; \quad \alpha_{\varrho\varkappa} \to \infty \tag{37}$$

auftritt. Auch hier ist für ein beliebiges ϱ die Ungleichung (36) erfüllt.

§ 4

Es soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß keine der Klassen I, II, III leer ist, wenn wir gewisse einfach zu übersehende Fälle ausschließen. Wir

gehen aus von (16) und (19). Diese beiden Beziehungen ergeben

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{k} (h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa}) = \prod_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa . \tag{38}$$

Nun kennzeichnen wir die $h_\varkappa$ bzw. $\varepsilon_{\varrho\varkappa}$ aus den Klassen I, II, III mit einer entsprechenden Anzahl von oberen Strichen und bezeichnen die Anzahlen in den einzelnen Klassen mit a bzw. b bzw. c. Das liefert

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{a} (h'_\varkappa + \varepsilon'_{\varrho\varkappa}) \cdot \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} (h''_\varkappa + \varepsilon''_{\varrho\varkappa}) \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c=k} (h'''_\varkappa + \varepsilon'''_{\varrho\varkappa}). \tag{39}$$

Wir beachten, daß nach § 3 gilt

$$\varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0, \quad h'_\varkappa = 1, \quad \varepsilon''_{\varrho\varkappa} = 0, \quad \varepsilon'''_{\varrho\varkappa} < 0 . \tag{40}$$

Das führt zu

$$\prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + \varepsilon'_{\varrho\varkappa}) \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} (h'''_\varkappa + \varepsilon'''_{\varrho\varkappa}) = \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} h'''_\varkappa . \tag{41}$$

Die Bedingungen (40) und (41) ergeben sogleich:

(42) aus $a = 0$ folgt auch $c = 0$ und umgekehrt.

Es sei jetzt

$$a = 0 \tag{43}$$

angenommen. Dann liefert (39), (40) und (42)

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{k} h''_\varkappa . \tag{44}$$

Das bedeutet, daß alle $n_\varrho (= n_\varrho^{(k)}$ mit $\varrho \geqq R)$ einander gleich sind. Diesen trivialen Fall können wir wegen der Annahme am Beginn von § 2 von unseren Betrachtungen ausschließen. Also können wir von nun an

$$a\,c > 0 \tag{45}$$

voraussetzen. Wird jetzt

$$b = 0 \tag{46}$$

angenommen, so erhalten wir aus (32), (38), (39) und (40)

$$s = \prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + \varepsilon'_{\varrho\varkappa}) \cdot \prod_{\varkappa=a+1}^{a+c=k} (h'''_\varkappa + \varepsilon'''_{\varrho\varkappa}) = \prod_{\varkappa=a+1}^{a+c} h'''_\varkappa = \prod_{\varkappa=1}^{c} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} , \tag{47}$$

wobei $p_\varkappa$ feste Primzahlen bedeuten, die von ϱ unabhängig sind. Ist $c > 2$, so folgt aus (47) ein Widerspruch, weil der Nenner der rechten Seite durch 4 teilbar ist, während der Zähler die Primzahl 2 höchstens in der ersten Potenz enthält. Ein Widerspruch folgt ebenfalls, wenn der Zähler ungerade ist. Wir können also $p_1 = 2$ annehmen. Die Gleichung (47) führt schließlich auf

$$s = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{oder} \quad s = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3 . \tag{48}$$

Aus $p_1 = 2$ können wir sofort schließen, daß alle n_ϱ gerade Zahlen sind; im

Fall $s = 2 (c = 1)$ erhalten wir für die Menge $\{n_\varrho\}$ eine Menge, die nur aus geraden vollkommenen Zahlen besteht. Es ist dann bekanntlich n_ϱ von der Gestalt

$$n_\varrho = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1} \cdot p_2, \quad \text{d. h.} \quad k = 2. \tag{49}$$

Ob es unendlich viele gerade vollkommene Zahlen gibt, ist noch eine offene Frage, die beim augenblicklichen Stand der Kenntnisse ziemlich unangreifbar zu sein scheint. Wir wollen uns in dieser Arbeit nicht weiter damit befassen und somit

$$k > 2 \tag{50}$$

von jetzt ab voraussetzen. Im Fall $s = 3$ $(c = 2)$ leiten wir nun einen Widerspruch her. Wir haben dann

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad \text{somit} \quad 6 \mid n_\varrho; \quad s = 3. \tag{51}$$

Nach (35) und (37) können wir sogar annehmen, daß n_ϱ die Primteiler 2 und 3 je in einer hohen Potenz enthält, also daß z. B.

$$2^2 \cdot 3^2 \mid n_\varrho \tag{52}$$

gilt. Dann folgt der Widerspruch sofort aus einem kürzlich veröffentlichten Satz von Herrn R. STEUERWALD [4]. Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen zusammen:

Abgesehen von dem Fall, daß alle n_ϱ einander gleich sind, oder von dem Fall, daß alle n_ϱ gerade vollkommene Zahlen sind, können wir annehmen

$$a\,b\,c > 0, \tag{53}$$

d. h. keine der Klassen I, II, III ist leer.

§ 5

Wir wollen jetzt eine Folgerung aus $b > 0$ herleiten. Nach (32), (38), (39) und (40) ist

$$s = \prod_{\varkappa = a+1}^{a+b} h''_\varkappa \cdot \prod_{\varkappa = a+b+1}^{a+b+c} h'''_\varkappa = \prod_{\varkappa = a+1}^{a+b} \frac{1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}{p^{\alpha_\varkappa}} \cdot \prod_{\varkappa = a+b+1}^{a+b+c} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1}, \tag{54}$$

wobei alle auftretenden $p_\varkappa$ gegebene feste Primzahlen bedeuten, die in allen n_ϱ als Primteiler enthalten sind. Die $\alpha_\varkappa$ sind ebenfalls von ϱ unabhängige feste Exponenten. Der Einfachheit halber ändern wir etwas die Bezeichnungen ab. Wir setzen

$$\begin{array}{llll} \text{statt} & p_{a+1}, \ldots, & p_{a+b} & \text{jetzt } p_1, \ldots, p_b; \\ \text{statt} & \alpha_{a+1}, \ldots, & \alpha_{a+b} & \text{jetzt } \alpha_1, \ldots, \alpha_b; \\ \text{statt} & p_{a+b+1}, \ldots, & p_{a+b+c} & \text{jetzt } q_1, \ldots, q_c. \end{array} \tag{55}$$

In der neuen Bezeichnungsweise sieht (54) so aus:

$$s = \prod_{\varkappa = 1}^{b} \frac{1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{\varkappa}}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} \cdot \prod_{\gamma = 1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1}. \tag{56}$$

Wir beachten, daß

$$(57) \qquad \left(\prod_{\varkappa=1}^{b} p_\varkappa, \prod_{\gamma=1}^{c} q_\gamma\right) = 1$$

ist und erhalten aus (56)

$$(58) \qquad \prod_{\varkappa=1}^{b} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = m; \quad s = \frac{\sigma(m)}{m} \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1} = s' \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1}.$$

Dabei ist wesentlich, daß s' eine *ganze* Zahl ist, d. h. m ist eine $(s'-1)$-fach vollkommene Zahl; alle n_ϱ haben also die Gestalt

$$(59) \qquad n_\varrho = m \cdot n_\varrho^*,$$

wobei m von ϱ unabhängig ist und

$$(60) \qquad (m, n_\varrho^*) = 1; \quad 1 < \frac{\sigma(m)}{m} = s' < s; \quad \frac{\sigma(n_\varrho)}{n_\varrho} = s = \frac{\sigma(m)}{m} \cdot \frac{\sigma(n_\varrho^*)}{n_\varrho^*}$$

gilt. Aus $s = 2$ folgt $s' = 1$, also $b = 0$, d. h. nach dem vorigen Paragraphen, daß n_ϱ eine gerade vollkommene Zahl sein muß. Wir können dieses Ergebnis, welches dasjenige von Dickson über ungerade vollkommene Zahlen enthält, auch in Form eines Satzes so aussprechen:

Satz 1. Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) $\sigma(n) = 2n$,

b) $V(n) \leq K$, *wobei K eine beliebige, feste Zahl bedeutet. Dann enthält $\mathfrak{N}$, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmen, nur gerade vollkommene Zahlen.*

§ 6

Wir wollen in diesem Paragraphen den Fall

$$(61) \qquad s' \mid s$$

untersuchen. Nach (58) folgt aus $s = s' \cdot t$, daß

$$(62) \qquad \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1} = t$$

eine ganze Zahl sein muß. Wie im Anschluß an (47) liefert dies wieder entweder

$$(63) \qquad t = \frac{2}{1}, \qquad \text{d. h.} \quad c = 1, \quad q_1 = 2$$

oder

$$(64) \qquad t = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}, \quad \text{d. h.} \quad c = 2, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3.$$

Aus (60), (63) und (64) folgt in unserem Fall

$$(65) \qquad \frac{\sigma(n_\varrho^*)}{n^*} = t = 2 \quad \text{bzw.} = 3; \quad 2 \mid n_\varrho^* \quad \text{bzw.} \quad 2 \cdot 3 \mid n_\varrho^*.$$

Genau wie in § 4 führt (65) entweder wieder zu den geraden vollkommenen Zahlen $n^* = 2^{p-1}(2^p - 1)$ oder zu einem Widerspruch. Nun folgt allgemein

aus (58), wenn wir noch o.B.d.A.

(66) $$q_1 < q_2 < \cdots < q_c$$

annehmen, daß

(67) $$q_c \mid s$$

sein muß. Ist $s = 2^\xi$ mit einem positiven ganzen Exponenten ξ, so ergeben (66) und (67) sogleich

(68) $$c = 1, \quad q_1 = 2.$$

Nach (58) ist dann $s = 2\,s'$, also

(69) $$s' = 2^{\xi-1} \mid s = 2^\xi.$$

Wir erhalten daraus und aus den Folgerungen aus (61) den

Satz 2. Es gibt dann und nur dann unendlich viele $(2^\xi - 1)$-fach vollkommene Zahlen mit genau k verschiedenen Primfaktoren, wenn es mindestens eine ungerade $(2^{\xi-1} - 1)$-fach vollkommene Zahl mit $k-2$ verschiedenen Primfaktoren gibt und außerdem unendlich viele gerade vollkommene Zahlen.

Dieser Satz umfaßt den Satz 1, denn als einzige 0-fach vollkommene Zahl können wir die Zahl 1 ansehen; für sie ist auch $V(1) = 0$.

§ 7

Wir beachten jetzt zunächst, daß nach (40), (54), (55), (56) und (58) gilt

(70) $$\prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} (h''_\varkappa + \varepsilon''_{\varrho\varkappa}) = \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} h''_\varkappa = \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} \frac{1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}{p^{\alpha_\varkappa}} = s'.$$

Nach (39), (40) und (41) folgt damit

(71) $$s = \prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + \varepsilon_{\varrho\varkappa}) \cdot s' \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} (h'''_\varkappa + \varepsilon'''_{\varrho\varkappa}) = s' \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} h'''_\varkappa.$$

Nach (20), (21) sowie (32)ff. können wir schreiben

(72) $$\begin{aligned} s &= \prod_{\varkappa=1}^{a} \left(1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}}\right) \cdot s' \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_{\varrho\varkappa}}}\right) \\ &= s' \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{a+b+c} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa - 1}\right). \end{aligned}$$

Dabei gilt

(73) $$\lim_{\varrho\to\infty} p_{\varrho\varkappa} = \infty; \qquad \lim_{\substack{\varrho\to\infty \\ a+b+1 \leq \varkappa \leq a+b+c}} \alpha_{\varrho\varkappa} = \infty.$$

Wir benutzen nun wieder die Bezeichnungsweise (55), setzen ferner statt $\alpha_{\varrho\varkappa}$ mit $\varkappa > a + b$ den Exponenten $\beta_{\varrho\gamma}$ und erhalten damit

(74) $$\begin{aligned} s &= \prod_{\varkappa=1}^{a} \left(1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}} + \cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}}\right) \cdot s' \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} \left(1 + \frac{1}{q_\gamma} + \cdots + \frac{1}{q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}}}\right) \\ &= s' \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Wir beachten, daß statt (73) jetzt

$$\lim_{\varrho\to\infty} \beta_{\varrho\gamma} = \infty \tag{75}$$

gilt. Die q_γ sind feste, von ϱ unabhängige Primzahlen. Aus (74) können wir auch die Gleichung

$$\prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + p_{\varrho\varkappa} + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}) \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} (q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}+1} - 1) = \prod_{\varkappa=1}^{a} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}} \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}+1} \tag{76}$$

herleiten. Daraus sehen wir sofort: Ist $c > 1$, so ist die linke Seite von (76) durch 2 teilbar, also muß auch die rechte Seite von (76) gerade sein. Die $p_{\varrho\varkappa}$ können wir aber wegen (73) als groß voraussetzen. Dann können wir o.B.d.A.

$$q_1 = 2 \tag{77}$$

annehmen. Ist $c = 1$ und $q_1 > 2$, so wäre die linke Seite von (76) wieder gerade, die rechte aber ungerade. Also muß (77) auch im Fall $c = 1$ gelten. Nun ist

$$q_1^{\beta_{\varrho 1}} = 2^{\beta_{\varrho 1}} \mid n_\varrho\,; \quad \lim_{\varrho\to\infty} \beta_{\varrho 1} = \infty\,. \tag{78}$$

Nach (59) und (60) ist also m ungerade, d. h.

(79) m ist eine ungerade $(s'-1)$-fach vollkommene Zahl.

Wir können unsere Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 3. Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen n, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) $\sigma(n) = s \cdot n$ *(s fest),*

b) $V(n) \leqq K$, *wobei K eine beliebige, feste Zahl bedeutet,*

c) *Es gibt eine feste natürliche Zahl A so, daß $2^A \nmid n$ gilt. Dann ist $\mathfrak{N}$ eine endliche Menge.*

§ 8

Aus (74) und (77) erhalten wir für s' die Abschätzung

$$s = s' \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma}{q_\gamma - 1} \geqq 2\,s'. \tag{80}$$

Wir bezeichnen nun

$$\min_{\varkappa=1}^{a} p_{\varrho\varkappa} = p; \quad \min_{\gamma=1}^{c} q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}+1} = q^{\beta+1}. \tag{81}$$

Diese beiden Minima hängen zwar von ϱ ab, wir wollen aber als Vereinfachung der Schreibweise im Augenblick die Indizes ϱ weglassen. Aus (76) folgt damit

$$1 + \frac{1}{p} \leqq \prod_{\varkappa=1}^{a} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha_\varkappa}}\right) = \prod_{\gamma=1}^{c} \frac{q_\gamma^{\beta_\gamma+1}}{q_\gamma^{\beta_\gamma+1} - 1} \leqq \left(1 + \frac{1}{q^{\beta+1} - 1}\right)^c. \tag{82}$$

Wir beachten, daß wir wegen (75) annehmen können, daß $\frac{1}{q^{\beta+1}-1}$ sehr klein

ist. Dann wird

(83) $$\left(1+\frac{1}{q^{\beta+1}-1}\right)^c < 1+\frac{c+1}{q^{\beta+1}-1}\,.$$

Aus (82) und (83) folgt

(84) $$p > \frac{q^{\beta+1}-1}{c+1}\,.$$

Wir bezeichnen mit $F_l(x)$ das l-te Kreisteilungspolynom, dessen Wurzeln genau die primitiven l-ten Einheitswurzeln sind, und beachten, daß für $l > 6$, $x > 1$ stets $F_l(x)$ mindestens einen Primteiler der Restklasse 1 (mod l) enthält[1]). Es ist

(85) $$F_{\beta_\gamma+1}(q_\gamma)\,|\,q_\gamma^{\beta_\gamma+1}-1\,.$$

Nach (75) können wir annehmen, daß für $\gamma = 1, \ldots, c$ immer $q_\gamma^{\beta_\gamma+1}-1$ mindestens eine der Primzahlen $p_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, a)$ als Teiler enthält. Wegen (81) und (84) muß $q^{\beta+1}-1$ genau einen der Primteiler $p_\varkappa$ in genau der ersten Potenz enthalten. Wir wollen jetzt zeigen, daß

(86) $$\beta + 1 = l$$

eine Primzahl sein muß. Wäre nämlich $l = \beta + 1 = l_1 l_2$; $l_1 > l_2 > 1$, wobei l_1 und l_2 keine Primzahlen zu sein brauchen, so enthielte $q^{\beta+1}-1$ die Kreisteilungspolynome $F_l(q)$ und $F_{l_1}(q)$, also enthielte dann $q^{\beta+1}-1$ mindestens einen Primteiler $\equiv 1$ (mod l) und mindestens einen Primteiler $\equiv 1$ (mod l_1), die wir als verschieden annehmen dürfen[2]). Nun können wir l und l_1 als sehr groß voraussetzen. Das würde zu $q^{\beta+1}-1 > p^2$ führen und nach (84) zu dem Widerspruch $p > \frac{p^2}{c+1}$; $c + 1 > p$. Damit ist (86) als richtig erwiesen. Wir haben also

(87) $$p \leqq F_{\beta+1}(q) = \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} = 1 + q + \cdots + q^\beta < \frac{c+1}{q-1}\,p\,.$$

Wie früher gezeigt wurde[2]), enthält $F_{\beta+1}(q)$ nur Primteiler $\geqq \beta + 1$. Das führt nach (75), (81) und (87) zu

(88) $$F_{\beta+1}(q) = 1 + q + \cdots + q^\beta = p_\varkappa, \qquad 1 \leqq \varkappa \leqq a.$$

Weiterhin ergibt (87)

(89) $$q \leqq c + 1.$$

§ 9

Wir wollen jetzt für s die speziellen Werte

(90) $$s = 3^\xi \quad \text{bzw.} \quad s = 5^\xi \qquad (\xi \geqq 1, \text{ganz})$$

annehmen. Nach (67) und (77) ist

(91) $$q_c = 3, \quad c = 2 \quad \text{bzw.} \quad q_c = 5, \quad 2 \leqq c \leqq 3\,.$$

---

[1]) Das folgt aus früheren Überlegungen. Vgl. a. a. O. [2].

[2]) A. a. O. [2].

Nach (74) folgt

$$(92)\qquad \begin{cases} 3^{\xi} = s' \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3\,s'; \quad s' = 3^{\xi-1} \mid s; \quad \frac{\sigma(n_{\varrho}^{*})}{n_{\varrho}} = 3; \\ \text{bzw.}\quad 5^{\xi} = s' \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad 5^{\xi} = s' \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Nach § 6 ergibt sich im ersten Fall der

Satz 4. Es sei ξ eine natürliche Zahl. Dann gibt es höchstens endlich viele $(3^{\xi}-1)$-fach vollkommene Zahlen mit genau k verschiedenen Primfaktoren.

Im zweiten Fall, den wir von jetzt an allein betrachten, liefert die Bedingung (92)

$$(93)\qquad s' = 2 \cdot 5^{\xi-1} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{4}{3} \cdot 5^{\xi-1}.$$

Die zweite Möglichkeit fällt sofort weg, da ja s' eine ganze Zahl ist. Also haben wir

$$(94)\qquad q_1 = 2; \quad q_2 = q_c = 5.$$

Die Beziehung (76) nimmt jetzt die folgende Gestalt an

$$(95)\quad \prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + p_{\varrho\varkappa} + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}) \cdot (2^{\beta_{\varrho 1}+1} - 1) \cdot (5^{\beta_{\varrho 2}+1} - 1) = \prod_{\varkappa=1}^{a} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}} \cdot 2^{\beta_{\varrho 1}+1} \cdot 5^{\beta_{\varrho 2}+1}.$$

Wir lassen jetzt wieder die Indizes ϱ weg. Nach (81), (87), (88), (89) und (94) können wir

$$(96)\qquad q = 2; \quad 2^{\beta_1+1} - 1 = p_1 < 5^{\beta_2+1} - 1$$

annehmen. Nach (81) und (84) ist

$$(97)\qquad \min_{\varkappa=1}^{a} p_{\varkappa} = p > \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{3}.$$

Ist nun $5^{\beta_2+1} - 1$ durch eine der Primzahlen $p_{\varkappa}$ mit $\varkappa > 1$ teilbar, z. B. durch p_2, so erhalten wir den Widerspruch

$$(98)\quad \left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{4\,p_2 + 1}\right) = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1 + 1}\right)\left(1 - \frac{1}{4\,p_2 + 1}\right) \leqq 1.$$

Wir können also voraussetzen

$$(99)\qquad (1 + 5 + \cdots + 5^{\beta_2}) \mid 2^{\beta_1+1} \cdot p_1^{\alpha_1}.$$

Da aber $2 \mid (1 + 5 + \cdots + 5^{\beta_2})$ zu $3 \mid \prod_{\varkappa=1}^{a} p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}}$ führt, bleibt nur noch die Möglichkeit

$$(100)\qquad 1 + 5 + \cdots + 5^{\beta_2} = p_1^{x} \quad \text{mit ganzem} \quad x \geqq 1$$

übrig. Aus (95) erhalten wir dann

$$(101)\quad \frac{4(1 + p_1 + \cdots + p_1{}^{+1})}{1 + p_1 + 4\,p_1^{x} + 4\,p_1^{x+1}} = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^{x+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1+1}\right)\left(1 - \frac{1}{4\,p_1^{x} + 1}\right) \leqq 1.$$

Diese Ungleichung stellt für $x > 1$ einen Widerspruch dar.

Für $x = 1$ schließen wir nun so: Nach (96) und (100) gilt dann $2^{\beta_1+1} - 1 = \frac{5^{\beta_1+1} - 1}{4}$. Das führt zu

$$(102) \qquad 2^{\beta_1+3} = 5^{\beta_1+1} + 3.$$

Nach (75) und einem bekannten Satz [3] stellt auch (102) einen Widerspruch dar. Wir erhalten damit das folgende Ergebnis:

Satz 5. Es sei ξ eine natürliche Zahl. Dann gibt es höchstens endlich viele $(5^\xi - 1)$-fach vollkommene Zahlen mit genau k verschiedenen Primfaktoren.

§ 10

Wir wollen in diesem abschließenden Paragraphen eine Vermutung aussprechen und daran einige Bemerkungen knüpfen. Als Verallgemeinerung der Sätze 2, 3, 4 und 5 vermuten wir die Gültigkeit von

Satz 6. Es gibt dann und nur dann unendlich viele natürliche Zahlen n, die

a) $\sigma(n) = s \cdot n$ *(s fest)*

und

b) $V(n) = k$ *(fest)*

erfüllen, wenn

α) $s \equiv 0 \pmod 2$,

β) *es mindestens eine ungerade Zahl m gibt, die den Bedingungen $\sigma(m) = \frac{s}{2} m$ und $V(m) = k - 2$ genügt,*

γ) *es unendlich viele gerade vollkommene Zahlen gibt.*

In der einen Richtung ist der Beweis fast trivial. Denn sei

$$(103) \qquad m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}} \equiv 1 \pmod 2; \quad \sigma(m) = \frac{s}{2} \cdot m.$$

Gibt es nun unendlich viele gerade vollkommene Zahlen, so gibt es darunter auch unendlich viele, für die

$$(104) \qquad v_\varrho = 2^{\beta_\varrho} \cdot q_\varrho; \quad q_\varrho = 2^{\beta_\varrho} \quad - 1 > p_{k-2} > \cdots > p_1$$

gilt. Dann besitzt aber $m\, v_\varrho$ genau k verschiedene Primteiler, und es ist ferner

$$(105) \qquad \sigma(m\, v_\varrho) = \sigma(m)\, \sigma(v_\varrho) = \frac{s}{2} m \cdot 2\, v_\varrho = s \cdot m\, v_\varrho.$$

In der anderen Richtung können wir wenigstens sagen: Wenn es unendlich viele n gibt, die die Bedingungen a) und b) aus Satz 6 erfüllen, so gibt es nach (59), (60), (78) und (79) jedenfalls eine Zahl m so, daß

$$(106) \qquad m \equiv 1 \pmod 2; \quad 1 < \frac{\sigma(m)}{m} = s' \leqq \frac{s}{2} \qquad (s' \text{ ganz})$$

gilt und unendlich viele n_ϱ dargestellt werden können in der Gestalt

$$(107) \qquad n_\varrho = m \cdot n_\varrho^*; \quad (m, n_\varrho^*) = 1; \quad 2^{\beta_{\varrho 1}} \mid n_\varrho^*; \quad \lim_{\varrho \to \infty} \beta_{\varrho 1} = \infty.$$

$s' = \frac{s}{2}$ führt jedenfalls zu $\sigma(n_\varrho^*) = 2$. Dann ist n_ϱ^* eine gerade vollkommene Zahl und der Satz 6 richtig. Es bleibt also noch übrig zu zeigen, daß aus der

Annahme

$$s' < \frac{s}{2} \tag{108}$$

ein Widerspruch folgt.

Zusatz bei der Korrektur. Man kann mit den obigen Methoden leicht zeigen, daß Satz 6 richtig ist für alle $s \leq 25$.

Literatur

[1] Dickson, L. E.: Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. Amer. J. of Math. 35, 413—422 (1913). — [2] Kanold, H. J.: Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I. J. f. reine u. angew. Math. 187, 169—182 (1949). — [3] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, 3, S. 64, Satz 696. Leipzig: S. Hirzel 1927. — [4] Steuerwald, R.: Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N) = 3N$. Alexander Ostrowski zum 60. Geburtstag gewidmet. Arch. d. Math. 5, 449—451 (1954).

(Eingegangen am 26. August 1955)

Voss, K.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 180—218 (1956)

Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen

Von

K. Voss in Zürich

Einleitung

In dieser Arbeit werden n-dimensionale Flächen im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum untersucht. Die Flächen sollen mehrmals differenzierbar und regulär im Sinne der Differentialgeometrie sein. Es wird sich besonders darum handeln, Aussagen über geschlossene Flächen zu gewinnen. Zum Teil wird nur der Fall $n = 2$ durchgeführt werden, jedoch lassen sich die Ergebnisse ausnahmslos auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

1. Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die Frage, ob zwischen den Hauptkrümmungen k_1, k_2 einer geschlossenen (2-dimensionalen) Fläche eine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen kann. Dies ist ein Teil der allgemeineren Frage nach geschlossenen Flächen mit einer Relation

$$W(k_1, k_2) = 0$$

zwischen den Hauptkrümmungen, die von H. Hopf [1][1]) untersucht worden ist. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang zunächst folgenden Satz:

Satz A. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer Eifläche kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel.*

Darin sind z. B. die bekannten — zuerst von H. Liebmann bewiesenen — Spezialfälle $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = c$ und $K = k_1 k_2 = c$ enthalten.

Der Satz A folgt aus einem allgemeineren Satze von A. D. Alexandrov [2], auf den wir noch zurückkommen werden[2]). Unabhängig davon ist der Satz A von S. S. Chern [5] in der obenstehenden Form ausgesprochen worden. Der Beweis wird mit der gleichen Methode geführt, wie sie Hilbert für den Fall $K = c$ angegeben hat, etwa in der Fassung, die in dem Lehrbuch von W. Blaschke [6] dargestellt ist[3]). Diese Methode besteht darin, daß man denjenigen Punkt der Fläche betrachtet, in dem die größere Hauptkrümmung ihr Maximum erreicht. Dann ist der Satz A ein Korollar des folgenden lokalen Satzes:

Satz B. *Auf einem positiv gekrümmten Flächenstück, welches nicht Teil einer Kugel ist, kann nicht in einem Punkt die größere Hauptkrümmung ein Maximum und gleichzeitig die kleinere ein Minimum haben.*

---

[1]) Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Man vgl. auch die Arbeiten von Pogorelov [3] und Hartman und Wintner [4], wo die Voraussetzung der Analytizität in [2] wesentlich abgeschwächt wird.

[3]) Vgl. die Ausführungen in [1], Einleitung, Nr. 5.

Dieser Satz hat wesentlich allgemeineren Charakter als der Satz A, da jetzt von einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen nicht die Rede ist.

Der Beweis des Satzes B sei hier im Anschluß an Blaschke kurz wiedergegeben[4]): Wir betrachten ein beliebig gekrümmtes Flächenstück, auf dem die größere Hauptkrümmung in einem Punkte o ein Maximum und die kleinere ein Minimum erreicht. Dann wird behauptet: *Entweder ist die Fläche ein Kugelstück, oder die Gaußsche Krümmung in o ist nicht positiv.* Falls o ein Nabelpunkt ist, so sind wir fertig, denn dann stimmt das Maximum der größeren Hauptkrümmung mit dem Minimum der kleineren überein, und somit sind die Hauptkrümmungen überall gleich, und die Fläche ist Teil einer Kugel oder Ebene. Sei also o kein Nabelpunkt. Dann lassen sich in der Umgebung von o Krümmungslinien-Parameter u, v so einführen, daß auf den beiden Krümmungslinien durch o außerdem noch u bzw. v die Bogenlänge ist. Die ersten Fundamentalgrößen seien mit E, F, G $(F = 0)$ und die zu den u- bzw. v-Linien gehörigen Hauptkrümmungen mit k' bzw. k'' bezeichnet. Drückt man nun in der Gleichung des Gaußschen theorema egregium die Ableitungen E_v, E_{vv}, G_u, G_{uu} auf Grund der Codazzischen Gleichungen durch k', k'' und ihre Ableitungen aus und beachtet noch, daß in o $E = G = 1$ ist, so erhält man für die Gaußsche Krümmung im Punkte o einen Ausdruck der Form

$$K = \frac{k'_{vv} - k''_{uu}}{k' - k''} + A\,k'_v + B\,k''_u.$$

Haben nun k' und k'' in o die vorausgesetzte Extremaleigenschaft, so liest man ab: in o ist $K \leqq 0$, q.e.d. Übrigens sieht man an Beispielen, daß diese Situation tatsächlich vorkommt.

Man könnte nun vermuten, daß auf nicht-konvexen geschlossenen Flächen — etwa vom Geschlecht 0 — monoton abnehmende Relationen möglich sind. Dies ist jedoch nicht der Fall. Beschränken wir uns auf differenzierbare Funktionen $f(k_1)$ mit negativer Ableitung. Dann folgt aus Sätzen von H. Hopf:

Satz C. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer analytischen geschlossenen Fläche vom Geschlecht* 0 *kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel*[5]).

Damit ist unsere Frage (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) für Flächen vom Geschlecht 0 beantwortet; dagegen ist — soviel ich weiß — die Frage offen, ob es Flächen vom Geschlecht $g \geqq 1$ mit einer Relation der genannten Art gibt. Einzig für die spezielle Relation $H = c$ existieren Teilergebnisse, denen zufolge es unter allen geschlossenen Flächen mit $g \geqq 1$ einer gewissen Flächenklasse keine Flächen mit $H = c$ gibt. Diese noch zu erläuternden Sätze, die sich auch auf nicht-konstantes H beziehen, sind in einer

[4]) W. Blaschke [6], S. 195—197. Übrigens ist das am Schluß des dortigen § 91 formulierte Ergebnis falsch: Z. B. auf den bekannten Rotationsflächen mit $K = 1$ werden die Hauptkrümmungen in den Punkten des größten Parallelkreises extremal, ohne daß diese Punkte Nabelpunkte sind (die größere Hauptkrümmung hat ein Minimum).

[5]) Vgl. [1], S. 237, Satz B′. Dort braucht die Relation nur in der Umgebung der Nabelpunkte zu existieren und monoton zu sein. Vgl. auch den Satz C auf S. 238 und dazu die Bemerkung in [7], S. 53, über die Voraussetzung der Analytizität.

gemeinsamen Note von H. Hopf und mir [8] dargestellt worden. (Vgl. auch den Vortrag [7], wo die Anwendung auf Flächen mit konstantem H ausführlich diskutiert wird.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in einer Ausarbeitung und Erweiterung der Ideen von [8]. Erstens werden den in [8] abgeleiteten Integralformeln für H, aus denen sich die dortigen Sätze ergeben, Integralformeln und Sätze für K — allgemeiner: für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche — an die Seite gestellt. Zweitens wird noch eine andersartige Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich die entsprechenden Sätze folgern lassen, wenn man H bzw. K durch eine symmetrische Funktion $W(k_1, k_2)$ ersetzt, die in beiden Variablen monoton ist, und zwar *gleichsinnig monoton*, d. h. etwa monoton wachsend in beiden Variablen; dies wird allerdings nur unter Beschränkung auf analytische Flächen geschehen. Wir werden beweisen (Sätze IV und IV′):

Auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht $g \geqq 1$ *mit „genügend vielen" Konvexitätsrichtungen* (in einem noch zu präzisierenden Sinne) *kann keine monoton abnehmende Relation* $k_2 = f(k_1)$ *bestehen* (insbesondere keine derartige symmetrische Relation $W(k_1, k_2) = 0$)[6].

Dabei heiße die geschlossene Fläche F konvex in einer Richtung, wenn jede Gerade dieser Richtung höchstens zwei Punkte mit F gemeinsam hat (genaue Definition im § 2). Eine Eifläche ist in jeder Richtung konvex; aber es gibt auch nicht-konvexe Flächen von beliebigem Geschlecht, welche Konvexitätsrichtungen besitzen. Zum Beispiel ist die gewöhnliche Torusfläche in der Richtung der Rotationsachse und in allen benachbarten Richtungen konvex.

Beim obenstehenden Satz sind also nur Flächen von verhältnismäßig einfacher Gestalt zugelassen, und die Frage bleibt offen, wie die Verhältnisse für beliebige geschlossene Flächen sind.

2. Die in Nr. 1 angedeuteten Sätze IV und IV′ werden sich aus einem allgemeineren Satze ergeben, den wir den *Symmetriesatz* nennen (Satz II; genaue Formulierung im § 5):

F sei eine in der Richtung $\mathfrak{c}$ konvexe Fläche und $W(k_1, k_2)$ eine symmetrische Funktion, die in beiden Variablen gleichsinnig monoton ist. Falls dann für jede Schnittgerade der Richtung $\mathfrak{c}$ die Funktion W in den beiden Schnittpunkten den gleichen Wert hat, so besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$.

Von der Funktion W wird hier nicht vorausgesetzt, daß sie auf F konstant sei; ist dies aber der Fall, so folgt, daß es zu jeder Konvexitätsrichtung eine Symmetrieebene gibt. Eine Fläche mit genügend vielen Symmetrieebenen muß aber eine Kugel sein.

3. Um den Symmetriesatz zu beweisen, leiten wir folgenden allgemeineren Satz her, den wir den *Translationssatz* nennen wollen (Satz I):

Zwischen den Flächen F und $\bar{F}$ bestehe eine „Parallelabbildung", d. h. eine Abbildung, bei der die Verbindungsgeraden von Punkt und Bildpunkt eine feste

[6]) Für die Relation $H = c$ siehe [7], Satz II.

Richtung haben. Wir setzen voraus, *eine Funktion $W(k_1, k_2)$ der in Nr. 2 betrachteten Art habe in einander entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ den gleichen Wert,* und zeigen: *dann ist die Abbildung eine Translation.*

Daraus, daß die beiden Flächen die Funktion W im Sinne der Parallelabbildung gemeinsam haben, folgt also ihre Kongruenz.

Man kann den Translationssatz mit dem Satz von ALEXANDROV [2] vergleichen, der im Zusammenhang mit dem Satz A genannt wurde: Dort werden zwei Eiflächen betrachtet, die so aufeinander abgebildet sind, daß die Normalen parallel und eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen invariant ist. Daraus folgt, daß die Abbildung eine Translation ist. Unserm Symmetriesatz entspricht folgendes Korollar aus dem ALEXANDROVschen Satze: *Die Eifläche F habe die Eigenschaft, daß in antipodischen Punktepaaren, d. h. in Punkten mit parallelen Tangentialebenen, eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen den gleichen Wert hat. Dann ist F zentralsymmetrisch.*

4. Die Paragraphen 1—4 haben vorbereitenden Charakter. Im § 1 sind Bezeichnungen und Formeln der Flächentheorie zusammengestellt. Im § 2 werden die Parallelabbildungen definiert und ihre Eigenschaften diskutiert. § 3 enthält Hilfssätze über symmetrische Funktionen von zwei Variablen, § 4 Formeln für die Variation der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche. Anschließend werden in § 5 und 6 die Sätze I und II bewiesen und im § 7 auf Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen angewandt.

Das beim Translationssatz vorliegende Problem läßt sich, wie sich zeigen wird, durch eine Funktion charakterisieren, welche einer *elliptischen Differentialgleichung* genügt. Daher kann man das Maximumprinzip anwenden. Jedoch erfordern gewisse Punkte, in denen die Differentialgleichung ausartet, eine besondere Betrachtung. Diese *Verfeinerung des Maximumprinzips* wird im § 5 geliefert (Satz 1), und zwar für analytische Flächen.

Untersucht man, wann die erwähnte Differentialgleichung selbstadjungiert ist, so zeigt sich, daß dies (bei 2-dimensionalen Flächen) für die Funktionen $W = H$ und $W = K$ zutrifft, und in gewissem Sinne nur für diese Funktionen. In diesen beiden Fällen werden im § 8 die angekündigten Integralformeln hergeleitet, aus denen sich der Translationssatz unter den üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergibt. Zur Herleitung der Integralformeln wird ein besonderer Kalkül verwendet, der sich auch sonst als nützlich erweist. Übrigens sind die Integralformeln vom gleichen Typus wie die Greensche Formel, mit der man zeigt, daß die einzigen harmonischen Funktionen auf einer geschlossenen Fläche die Konstanten sind.

Anschließend werden die Integralformeln im § 9 auf n-dimensionale Flächen im R_{n+1} mit beliebigem n verallgemeinert. Man erhält Kongruenzsätze von folgender Art (Sätze V und VI): *Wenn bei einer Parallelabbildung einer geschlossenen Fläche auf eine andere eine der elementarsymmetrischen Funktionen der n Hauptkrümmungen k_i invariant ist, so sind die Flächen kongruent.* Daraus ergibt sich dann: *Falls in je zwei Punkten, in denen eine Eifläche von den*

Geraden einer Parallelenschar getroffen wird, eine der obigen Krümmungsfunktionen den gleichen Wert hat, so ist die Fläche symmetrisch. Dies ist eine Verschärfung der Sätze von W. Süss [9], daß die Kugel die einzige Eifläche ist, auf der eine der genannten Krümmungsfunktionen konstant ist[7]). Übrigens läßt sich dieser Satz auf Linearkombinationen der Krümmungsfunktionen mit positiven Koeffizienten erweitern (Satz VII).

Die Tatsache, daß eine gewisse Differentialgleichung selbstadjungiert ist, hängt mit Variationsproblemen zusammen. Um den Integralformeln — und damit auch den Kongruenzsätzen — eine entsprechende Deutung zu geben, werden im § 10 die *Flächenintegrale der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen* betrachtet[8]). Dann zeigt sich, daß diese Krümmungsintegrale *bei einer linearen Parallelvariation* (Variation in konstanter Richtung) *konvexe Funktionen des Variationsparameters* sind (Satz IX). Im Falle des Symmetriesatzes liefert der betrachtete Variationsprozeß die *Steinersche Symmetrisierung* an einer Ebene und damit die Tatsache, daß die *Krümmungsintegrale monoton abnehmen*, es sei denn, die Fläche ist bereits symmetrisch (Satz X). Während diese Tatsache für die Oberfläche wohlbekannt ist, scheint sie für den allgemeinen Fall noch nicht bewiesen worden zu sein[9]).

Schließlich werden im § 11 berandete Flächen betrachtet, denen an Stelle der Bedingung der Geschlossenheit geeignete Randbedingungen auferlegt werden. Dann gelten zum Translationssatz analoge Kongruenzsätze. Nimmt man speziell etwa 2-dimensionale Flächen, die sich eineindeutig in die x, y-Ebene projizieren lassen, so erhält man Einzigkeitssätze für die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, die sich z. T. mit bekannten Sätzen überdecken, z. B. (im Falle der Gaußschen Krümmung K) mit einem Satz von F. Rellich [11] über das erste Randwertproblem bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. (Außer dem ersten Randwertproblem wird im § 11 noch eine andersartige Randwertaufgabe vorkommen [Randbedingung (11.2)], bei der die ersten Ableitungen am Rande gegen ∞ gehen.) Unsere Methode ergibt somit für gewisse spezielle Differentialgleichungen neuartige Beweise von Unitätssätzen mit Hilfe von Integralformeln.

Zum Schluß wird im § 12 mit der Methode des § 5 ein allgemeiner Einzigkeitssatz für elliptische Differentialgleichungen bewiesen, der den zitierten Satz von Rellich umfaßt: Die Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo p, q und r, s, t erste bzw. zweite Ableitungen einer Funktion sind, enthalte die unbekannte Funktion $u(x, y)$ nicht. Dann wird unter gewissen Annahmen über die Konvexität der beiden Gebiete, in denen der Differentialausdruck Φ positiv bzw. negativ elliptisch ist, bewiesen (Satz XI):

---

[7]) In [9] wird der Satz gleich für die relativgeometrischen Krümmungsfunktionen bewiesen.

[8]) Bei konvexen Flächen sind diese bis auf einen Faktor gleich Quermaßintegralen.

[9]) Pólya und Szegö [10], S. 168—170, zeigen, daß das $(n-1)$-te Krümmungsintegral für die symmetrisierte Fläche nicht größer ist als für die Ausgangsfläche.

Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\Phi = 0$ besitzt höchstens zwei Lösungen, für welche Φ elliptisch ist, und zwar höchstens je eine positiv bzw. negativ elliptische Lösung.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor H. Hopf. Ihm, meinem verehrten Lehrer, sei an dieser Stelle mein herzlichster Dank zum Ausdruck gebracht.

§ 1. Bezeichnungen und Formeln

Die n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ sei h-mal stetig differenzierbar ($h \geq 2$) oder auch analytisch, d. h. die beim Übergang von einem lokalen Parametersystem $u^1, \ldots, u^n$ zu einem anderen entstehenden Parametertransformationen werden durch h-mal stetig differenzierbare bzw. reell analytische Funktionen mit positiver Funktionaldeterminante vermittelt. Wir nennen $\mathfrak{F}$ die Parameterfläche.

Eine n-dimensionale Fläche F im euklidischen Raum R_{n+1} ist gegeben durch eine Vektorfunktion $\mathfrak{x}(p)$, $p \in \mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{x}$ als Funktion lokaler Parameter h-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch sein soll. Partielle Ableitung nach u^i sei durch Anhängen des Index u^i angedeutet. Wir setzen voraus, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_{u^i} = \mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind. Demzufolge ist die Abbildung von $\mathfrak{F}$ in den Raum lokal eineindeutig; dagegen kann F Selbstdurchdringungen haben, d. h. es können mehrere Punkte p von $\mathfrak{F}$ auf einen Punkt des Raumes abgebildet werden. Die Punkte von F (also Punkte des Raumes) werden wir ebenfalls mit p bezeichnen; unter einer Umgebung eines Flächenpunktes ist dann das Bild einer Umgebung auf $\mathfrak{F}$ zu verstehen.

Sei $g_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j$ der metrische Fundamentaltensor der Fläche F, $|g_{ij}| = g$ seine Determinante, g^{ij} der zu g_{ij} inverse Tensor und $dA = \sqrt{g}\, du^1 \ldots du^n$ das Flächenelement von F. Wir benutzen die Schreibweise der Tensorrechnung, wobei mit Hilfe der g^{ij} bzw. g_{ij} Indizes herauf- und heruntergezogen werden. Die zu den g_{ij} gehörigen Christoffelschen Symbole werden mit Γ^k_{ij} bezeichnet, die kovarianten Ableitungen einer Funktion f bezüglich der Γ durch Anhängen eines Index, insbesondere also

$$f_i = f_{u^i}, \quad f_{ij} = f_{u^i u^j} - \Gamma^k_{ij} f_k .$$

Die aus $n + 1$ räumlichen Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ gebildete Determinante bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1})$. Da F orientiert ist und die $\mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind, läßt sich der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen eindeutig definieren durch die Forderungen

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_i = 0, \quad (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = +\sqrt{g}\,.$$

Weiter setzen wir

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{g}\, \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)\,, \tag{1.1}$$

wobei unter $\operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)$ das Signum der Indexpermutation $i_1 \ldots i_n$ zu verstehen ist bzw. die Zahl 0, falls zwei Indizes gleich sind. ε ist ein Tensor bei Beschränkung auf Parametertransformationen mit positiver Funktional-

determinante. Man kann dies aus der Darstellung

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_n})$$

ablesen. Für das n-fache Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_n}$ erhält man also

$$\mathfrak{x}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{x}_{i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \mathfrak{n}\,. \tag{1.2}$$

Zieht man in (1.1) alle n Indizes nach oben, so findet man unter Beachtung von Determinanteneigenschaften:

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} = g^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)\,. \tag{1.3}$$

Bezeichnet man das alternierende Produkt der Differentiale du^i mit $du^i \wedge du^j$:

$$du^i \wedge du^j = -du^j \wedge du^i, \tag{1.4}$$

so folgt

$$du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} dA. \tag{1.5}$$

Auf Grund der Definition der Γ^k_{ij} ist $\mathfrak{x}_{ij}$ parallel zu $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{x}_{ij} = l_{ij} \mathfrak{n}, \tag{1.6}$$

und durch diese Gleichung ist der zweite Fundamentaltensor l_{ij} der Fläche definiert. Für die Ableitungen von $\mathfrak{n}$ gilt:

$$\mathfrak{n}_i = -l^j_i \mathfrak{x}_j\,. \tag{1.7}$$

Der gemischte zweite Fundamentaltensor l^j_i hat — da er in jedem Flächenpunkt durch eine symmetrische Matrix repräsentiert werden kann — reelle Eigenwerte k_i, die Hauptkrümmungen der Fläche.

Bei Änderung der Orientierung der Fläche wechseln $\mathfrak{n}, l_{ij}, l^j_i$ und die k_i das Vorzeichen.

Die elementarsymmetrischen Funktionen der k_i — dividiert durch die Anzahl der Summanden — werden mit H_ν bezeichnet:

$$\binom{n}{\nu} H_\nu = k_1 \ldots k_\nu + \ldots, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad H_0 = 1. \tag{1.8}$$

Die H_ν genügen der Gleichung

$$g^{-1} |\lambda\, l_{ij} + g_{ij}| = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^\nu \binom{n}{\nu} H_\nu\,, \tag{1.9}$$

wo λ eine Unbestimmte ist.

Ist A eine quadratische Matrix, so sei A^* die aus den algebraischen Komplementen der a_{ij} gebildete Matrix, also $A \cdot A^* =$ (*Determinante von* A) $\cdot$ *Einheitsmatrix*. Die Elemente der Matrix $(\lambda\, l_{ij} + g_{ij})^*$ sind Polynome in λ vom Grade $n-1$. Wir setzen

$$g^{-1} (\lambda\, l_{ij} + g_{ij})^* = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^{\nu-1} \binom{n-1}{\nu-1} c^{ij}_{(\nu)}\,. \tag{1.10}$$

Dadurch werden Tensoren $c^{ij}_{(\nu)}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ definiert. Speziell ist

$$c^{ij}_{(1)} = g^{ij}, \quad c^{ij}_{(n)} = g^{-1} l^*_{ij} = c^{ij}. \tag{1.11}$$

Durch eine affine Parametertransformation kann man stets erreichen, daß g_{ij} in einem Punkt der Fläche die Einheitsmatrix ist und l_{ij} Diagonalform hat:

$$(1.12)\qquad g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j, \\ 1 \text{ für } i = j; \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j, \\ k_i \text{ für } i = j. \end{cases}$$

In einem solchen Parametersystem wird nach (1.10)

$$(1.13)\qquad c^{ij}_{(\nu)} = 0 \text{ für } i \neq j, \quad c^{ii}_{(\nu)} = \frac{n}{\nu} \frac{\partial H_\nu}{\partial k_i}\ ^{10)}.$$

Wir behaupten, daß für $c^{ij}_{(\nu)}$ auch die folgende Darstellung gilt:

$$(1.14)\qquad (n-1)!\, c^{ij}_{(\nu)} = \varepsilon^{i}{}_{r_1 \ldots r_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, \varepsilon^{j s_1 \ldots s_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, l^{r_1}_{s_1} \cdot \ldots \cdot l^{r_{\nu-1}}_{s_{\nu-1}}.$$

Zum Beweis kann man etwa verifizieren, daß (1.14) in einem Parametersystem (1.12) mit (1.13) übereinstimmt.

Von jetzt an beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$, also auf gewöhnliche Flächen im R_3. Erst in § 4 und §§ 9—11 wird wieder von Flächen beliebiger Dimension die Rede sein.

Für $n = 2$ hat man in (1.8) die mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ und die Gaußsche Krümmung $K = k_1 k_2$. Zwischen den Tensoren (1.1) und (1.3) für $n = 2$ besteht die Beziehung

$$(1.15)\qquad \varepsilon^{is}\, \varepsilon_{js} = \delta^i_j = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j, \\ 1 \text{ für } i = j, \end{cases}$$

und für die Tensoren (1.11) ergeben sich aus (1.14) die Darstellungen

$$(1.16)\qquad g^{ij} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{js} g_{rs}, \qquad c^{ij} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{js}\, l_{rs}.$$

Es sei noch erwähnt, daß man die Determinante eines gemischten Tensors a^j_i in der Form

$$(1.17)\qquad |a^j_i| = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^{ir}\, \varepsilon_{js}\, a^j_i\, a^s_r$$

darstellen kann.

§ 2. Parallelabbildungen einer Fläche auf eine andere

Unter einer *Parallelabbildung einer Fläche F auf eine Fläche $\overline{F}$* verstehen wir eine *topologische Abbildung $\overline{p} = T p$, bei der die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und $\overline{p}$ eine feste Richtung haben.* Diese Richtung wird im folgenden immer durch einen festen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ festgelegt.

Die Parallelabbildung heißt *regulär*, falls sie — ausgedrückt durch lokale Flächenparameter — *stetig differenzierbar* und falls ihre *Funktionaldeterminante von Null verschieden* ist.

Das x, y, z-Koordinatensystem des Raumes sei stets so gewählt, daß $\mathfrak{e}$ die z-Richtung ist. Falls dann T eine Parallelabbildung von F auf $\overline{F}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ ist und falls die Tangentialebenen in p und in $\overline{p}$ nicht parallel zu $\mathfrak{e}$ sind, so ist T sicher regulär in der Umgebung von p, denn man kann auf

10) Dies sind die bei Weglassung von k_i gebildeten $H_{\nu-1}$.

beiden Flächen x und y als Parameter einführen, so daß die Abbildung durch Gleichheit der Parameterwerte gegeben ist.

Die Menge der Punkte von F, in denen die *Tangentialebene parallel zu* $\mathfrak{e}$ ist, nennen wir die *Schattengrenze von* F. In den Punkten der Schattengrenze braucht eine Parallelabbildung nicht regulär zu sein. Jedoch werden wir zeigen, daß folgende Bedingung hinreichend für Regularität ist (daß man ohne die Bedingung nicht auskommt, wird weiter unten gezeigt):

(a) *In Punkten, in denen* F *von einer Parallelen zu* $\mathfrak{e}$ *berührt wird, ist* $\mathfrak{e}$ *nicht Asymptotenrichtung.*

Zum Beispiel positiv gekrümmte Flächen haben diese Eigenschaft in jeder Richtung. An Stelle von (a) kann man auch sagen:

(a') *In Punkten mit* $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ *ist der Gradient der Funktion* $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ *von Null verschieden und die Tangente an die Kurve* $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ *nicht parallel zu* $\mathfrak{e}$.

Die Schattengrenze besteht dann also aus glatten Kurven mit von $\mathfrak{e}$ verschiedener Tangente. Die Äquivalenz von (a) und (a') folgt aus der Gleichung $l^{ij}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_i)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_j) = -g^{ij}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_j)$. Die Bedingung ($a$) besagt, daß die linke Seite dieser Gleichung von Null verschieden ist, (a') das gleiche für die rechte Seite. Wir behaupten nun:

Lemma 1. *Die Flächen* F *und* $\overline{F}$ *seien* $(h+1)$*-mal stetig differenzierbar* $(h \geq 1)$ *bzw. analytisch, und es bestehe eine Parallelabbildung* $\overline{p} = Tp$ *in der Richtung* $\mathfrak{e}$. *Falls dann* F *und* $\overline{F}$ *in der Richtung* $\mathfrak{e}$ *die Bedingung* (a) *erfüllen, so ist* T *regulär, und zwar* h*-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch*[11]).

Beweis: Gehören p und $\overline{p}$ nicht zur Schattengrenze, so ist T regulär und sogar $(h+1)$-mal differenzierbar bzw. analytisch. Sei also p_0 ein Punkt auf F mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$. Da die Funktion $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ in der Umgebung U von p_0 das Vorzeichen wechselt, wird U bei Projektion in die x, y-Ebene gefaltet, d. h. in der x, y-Ebene wird ein Gebiet, welches die Projektion der Schattengrenze am Rande enthält, zweifach bedeckt. Das gleiche muß dann auch für $\overline{F}$ gelten, d. h. T bildet die Schattengrenze von F auf diejenige von $\overline{F}$ ab.

a) Zuerst sei der analytische Fall behandelt: p_0 sei der Nullpunkt des räumlichen Koordinatensystems, die y, z-Ebene Tangentialebene in p_0 und die Fläche F durch

$$x = \varphi(y, z), \quad [\varphi(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = \varphi_z(0, 0) = 0], \tag{2.1}$$

mit einer reell analytischen Funktion φ der Parameter y, z dargestellt. Da die z-Richtung nicht Asymptotenrichtung ist, gilt $\varphi_{zz}(0, 0) = 2a \neq 0$. Man kann annehmen: $a > 0$. Die Schattengrenze ist durch

$$\varphi_z(y, z) = 0$$

gegeben, und wegen $\varphi_{zz} \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit

$$z = \psi(y), \qquad [\psi(0) = 0], \tag{2.2}$$

wo $\psi(y)$ analytisch ist. Wir führen Parameter u, v ein durch

$$\begin{aligned} u &= y \\ v &= z - \psi(y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

---

[11]) Für Eiflächen wurde ein ähnlicher Satz schon von A. Deicke ausgesprochen. Vgl. [12], S. 49.

und setzen

(2.4) $$f(u, v) = \varphi(u, v + \psi(u)) - \varphi(u, \psi(u)).$$

Dann gilt

(2.5) $$f(u, 0) = f_v(u, 0) = 0, \quad f_{vv}(0, 0) = 2a > 0,$$

also

$$f(u, v) = a\, v^2(1 + g(u, v)), \qquad [g(0, 0) = 0],$$

wobei $g(u, v)$ analytisch ist. Führt man noch $h(u, v)$ ein durch $1 + h(u, v) = \sqrt{1 + g(u, v)}$, $h(0, 0) = 0$, so ist

(2.6) $$\begin{aligned} \eta &= u \\ \zeta &= \sqrt{a} \cdot v(1 + h(u, v)) \end{aligned}$$

eine analytische Parametertransformation, und man findet

(2.7) $$\begin{aligned} x &= \varphi(\eta, \psi(\eta)) + \zeta^2 \\ y &= \eta \end{aligned}$$

Dadurch wird übrigens in Evidenz gesetzt, daß die Projektion von F in die x, y-Ebene das Gebiet $x \geqq \varphi(y, \psi(y))$ zweifach bedeckt. Den Teilen $z \gtrless \psi(y)$ der Fläche entspricht $\zeta \gtrless 0$.

Ist nun $\overline{F}$ analog durch $x = \overline{\varphi}(y, z)$ gegeben, so haben die Schattengrenzen von F und $\overline{F}$ die gleiche Projektion, d. h. es ist $\varphi(y, \psi(y)) = \overline{\varphi}(y, \overline{\psi}(y))$. Außerdem ist $\operatorname{sgn} \varphi_{zz} = \operatorname{sgn} \overline{\varphi}_{zz}$. Da bei Parallelabbildung $\overline{x} = x$ und $\overline{y} = y$ ist, erhält man aus (2.7) die Gleichungen $\overline{\eta} = \eta$, $\overline{\zeta}^2 = \zeta^2$. Nimmt man etwa an, daß $\zeta > 0$ auf $\overline{\zeta} > 0$ abgebildet wird, so folgt: Nach analytischen Parametertransformationen lauten die Gleichungen der Parallelabbildung $\overline{\eta} = \eta$, $\overline{\zeta} = \zeta$ (bzw. $\overline{\zeta} = -\zeta$) q.e.d.

b) Im Falle $(h + 1)$-mal differenzierbarer Flächen verläuft der Beweis analog wie bei a): Die Funktion $\psi(y)$ in (2.2) und damit die Transformation (2.3) sind jetzt h-mal stetig differenzierbar. Daher ist man fertig, sobald bewiesen ist, daß

(2.6′) $$\begin{aligned} \eta &= u \\ \zeta &= \operatorname{sgn} v \cdot \sqrt[+]{f(u, v)} \end{aligned}$$

eine h-mal stetig differenzierbare Parametertransformation ist. Dabei ist f durch (2.4) definiert, besitzt also stetige Ableitungen bis zur Ordnung $h + 1$ mit Ausnahme der $(h + 1)$-ten Ableitung nach u und erfüllt (2.5). Da f für $v \neq 0$ nicht verschwindet, ist ζ für $v \neq 0$ differenzierbar. Wir werden zeigen, daß der Limes der Ableitungen von ζ für $u \to u_0$, $v \to 0$ existiert; daraus läßt sich auf Grund des Mittelwertsatzes die Existenz (und Stetigkeit) der Ableitungen für $v = 0$ folgern.

Zunächst sei der Beweis für $h = 1$ und $h = 2$ ausführlich dargestellt (nur diese beiden Fälle werden später vorkommen). Wir bilden Taylor-Entwicklungen nach Potenzen von v mit Restglied; $o(v^l)$ bezeichne Funktionen mit der Eigenschaft, daß $v^{-l} o(v^l)$ für $u \to u_0$, $v \to 0$ gegen 0 strebt. Für $h = 1$ gilt

wegen (2.5)

$$f = a(u)\,v^2 + o(v^2), \quad f_u = o(v), \quad f_v = 2\,a(u)\,v + o(v)\,,$$

wobei $a(u)$ stetig und positiv ist. Daraus folgt: $\zeta = \sqrt{a(u)}\,v + o(v)$. Wegen $f = \zeta^2$ ist

$$\zeta_{u^i} = \tfrac{1}{2} f_{u^i} \zeta^{-1}, \tag{2.8}$$

wo für den Moment u^1, u^2 für u, v geschrieben ist. Setzt man die Entwicklungen für f_{u^i} und ζ in (2.8) ein, so ergibt sich

$$\zeta_u = o(1), \quad \zeta_v = \sqrt{a(u)} + o(1)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß (2.6') eine stetig differenzierbare Parametertransformation ist.

Sei nun $h = 2$. Dann gilt

$$f = a(u)v^2 + b(u)v^3 + o(v^3)\,, \tag{2.9}$$

wo jetzt $a(u)$ stetig differenzierbar und $b(u)$ stetig ist. Aus (2.9) folgt

$$\zeta = \sqrt{a(u)}\,v + \frac{b(u)}{2\sqrt{a(u)}}\,v^2 + o(v^2)\,. \tag{2.10}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen von f gelten Taylor-Entwicklungen, die sich aus (2.9) durch *formale Differentiation* gewinnen lassen, d. h. man hat das auf der rechten Seite von (2.9) stehende Polynom in v nach u bzw. nach v zu differenzieren und zugleich bei jeder Differentiation den Grad der Entwicklung um 1 zu reduzieren. Damit erhält man zunächst aus (2.8):

$$\zeta_u = \left(\sqrt{a(u)}\right)' v + o(v), \quad \zeta_v = \sqrt{a(u)} + \frac{b(u)}{\sqrt{a(u)}}\,v + o(v)\,. \tag{2.10'}$$

Setzt man dies in

$$\zeta_{u^i u^j} = \left(\tfrac{1}{2} f_{u^i u^j} - \zeta_{u^i}\zeta_{u^j}\right)\zeta^{-1}$$

ein, so folgt

$$\zeta_{uu} = o(1), \quad \zeta_{uv} = \left(\sqrt{a(u)}\right)' + o(1), \quad \zeta_{vv} = -\frac{b(u)}{\sqrt{a(u)}} + o(1), \tag{2.10''}$$

und somit ist ζ zweimal stetig differenzierbar nach u und v.

Bei beliebigem h begnügen wir uns mit folgender Andeutung des Beweises: Man findet für ζ eine Entwicklung nach v vom Grade h. Analog wie (2.10') und (2.10'') durch formale Differentiation aus (2.10) entstehen, zeigt man jetzt, daß die Ableitungen von ζ bis zur Ordnung h gleich formalen Derivierten der Entwicklung von ζ sind, und zwar läßt sich dies durch Induktion nach der Ordnung der Ableitungen beweisen, indem man durch Differentiation von $f = \zeta^2$ Rekursionsformeln für die Ableitungen von ζ aufstellt.

Wir betrachten nun zwei Flächen F und $\bar{F}$, zwischen denen eine reguläre Parallelabbildung besteht. Wir werden stets annehmen, daß man auf F und $\bar{F}$ gemeinsame Parameter u^i hat, so daß entsprechende Punkte gleiche Parameterwerte haben. Ist $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor von F, so gilt für den Ortsvektor $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\bar{F}$:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}. \tag{2.11}$$

w ist eine stetig differenzierbare Funktion auf der Fläche. Aus (2.11) folgt: $(\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2) = (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$, also

$$(\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{n}})\,d\bar{A} = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\,dA. \tag{2.12}$$

Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ ergibt sich daraus: *Bei einer regulären Parallelabbildung entsprechen sich die Schattengrenzen von F und von $\bar{F}$*; außerdem haben die beiden Flächen in solchen Punkten eine *gemeinsame Tangentialebene*, da die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ in einer Ebene liegen, also $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ die gleiche Ebene aufspannen wie $\bar{\mathfrak{x}}_1$, $\bar{\mathfrak{x}}_2$. Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ sind übrigens beide Seiten von (2.12) gleich $dx\,dy$.

Bei gegebenem F ist die Fläche $\bar{F}$ durch die Funktion w gemäß (2.11) festgelegt. Im Falle einer regulären Parallelabbildung kann man daher sagen: *$\bar{F}$ entsteht aus F durch Abtragen einer Funktion w in der Richtung $\mathfrak{e}$, wobei w differenzierbar ist und in den Punkten der Schattengrenze einer Nebenbedingung genügt.*

Trägt man nämlich von F aus eine beliebige Funktion w ab, so erhält man für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ eine reguläre Fläche $\bar{F}$; dagegen muß w in den Punkten mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ einer Bedingung genügen, damit $\bar{F}$ regulär wird. Um diese Bedingung zu finden, sei F in der Form (2.1) gegeben. Für $\bar{F}$ gilt $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z + w(y, z)$, und da $\bar{y}$, $\bar{z}$ reguläre Parameter auf $\bar{F}$ sind, muß

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

sein. Man kann diese Bedingung für w auch in beliebigen Flächenparametern u^i ausdrücken. Sie lautet, da man w in der Richtung $\mathfrak{e}$ ableiten muß und da der Tangentialvektor $\mathfrak{e}$ die Komponenten $\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_i = z_i$ hat:

$$1 + g^{ij} z_i w_j \neq 0 \qquad \text{für } \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0.$$

Gelegentlich werden wir diese Annahme verschärfen zu:

$$1 + g^{ij} z_i w_j > 0 \qquad \text{für } \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0. \tag{2.13}$$

Das bedeutet, daß in den Punkten der Schattengrenze $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ (nicht $= -\mathfrak{n}$) ist. In diesem Falle ist durch

$$F_t\colon \quad \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,w\,\mathfrak{e}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{2.14}$$

eine Schar F_t regulärer Flächen gegeben, denn aus (2.13) folgt $1 + t\,g^{ij} z_i w_j > 0$ für $0 \leqq t \leqq 1$. F läßt sich also durch eine stetige Schar von Parallelabbildungen in $\bar{F}$ überführen.

Man kann auch *Parallelabbildungen einer Fläche auf sich selbst* betrachten. Wir erwähnen einen besonderen Fall, wo solche Abbildungen sicher existieren:

Die Fläche F heiße konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$, wenn jede Gerade parallel zu $\mathfrak{e}$ entweder gar keinen Punkt oder einen Berührungspunkt oder zwei Punkte mit F gemeinsam hat[12]).

[12]) Wir weichen hier von [8] ab. Dort wurde zusätzlich angenommen, daß die beiden Punkte keine Berührungspunkte sind. Bei solchen Flächen besteht die Schattengrenze aus stetigen, eineindeutig über der x, y-Ebene liegenden Kurven, an denen $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ das Vorzeichen wechselt.

Man erhält eine Parallelabbildung $p' = Ap$ von F auf sich, wenn man durch jeden Punkt p von F die Parallele zu $\mathfrak{e}$ legt und den zweiten Schnittpunkt p' mit F bestimmt (falls die betreffende Parallele die Fläche F nur in p berührt, sei $Ap = p$). A ist eine *topologische Abbildung von F auf sich.*

Um die *Regularität* dieser Abbildung sicherzustellen, setzen wir voraus, *F habe in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft* (a). F heiße dann *konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne.*

Gelegentlich wird die Voraussetzung (a) folgendermaßen abgeschwächt werden *(Konvexität im weiteren Sinne)*:

(a_0) *Die Schattengrenze besteht aus endlich vielen stetigen rektifizierbaren Kurven und aus isolierten Punkten.*

Die Gestalt einer *geschlossenen* in der z-Richtung (im engeren Sinne) konvexen Fläche F vom Geschlecht g kann folgendermaßen beschrieben werden: F zerfällt in zwei zusammenhängende Gebiete mit $\mathfrak{e}\mathfrak{n} > 0$ bzw. $\mathfrak{e}\mathfrak{n} < 0$, deren gemeinsamer Rand aus $g+1$ geschlossenen Kurven besteht. Die beiden Gebiete besitzen die gleiche eineindeutige Projektion in die x, y-Ebene, während längs der Randkurven (Schattengrenzen) die Tangentialebenen parallel zur z-Achse sind.

Zum Schluß geben wir Beispiele von Flächen an, welche zeigen, daß man ohne die Bedingung (a) beim Lemma 1 nicht auskommt:

1. F sei gemäß (2.1) durch $x = (z^3 - y)^2$ gegeben. F ist konvex in der z-Richtung, denn zu (x, y) gehören zwei Werte $z = \left(y + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $z = \left(y - \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Die Schattengrenze besteht aus den Kurven $z = 0$ und $y = z^3$. Der Nullpunkt O des Koordinatensystems ist ein parabolischer Punkt und die z-Achse Asymptotenrichtung in O. Die Parallelabbildung A von F auf sich wird durch $\bar{y} = y$, $\bar{z} = (2y - z^3)^{\frac{1}{3}}$ beschrieben, ist also nicht differenzierbar.

2. $x = yz + z^4$. Hier ist $K < 0$ in O, $\operatorname{grad}(\mathfrak{e}\mathfrak{n}) \neq 0$, aber $\mathfrak{e}$ tangential an die Schattengrenze $y + 4z^3 = 0$. F ist konvex in der z-Richtung; bei Parallelabbildung in dieser Richtung geht die Kurve $z = 0$ über in $\bar{y} + \bar{z}^3 = 0$; somit ist $\bar{z}(y, 0) = (-y)^{\frac{1}{3}}$, also ist die Abbildung nicht differenzierbar.

§ 3. Hilfssätze über symmetrische und monotone Funktionen

Die Hauptkrümmungen einer Fläche lassen sich als stetige Funktionen auf der Fläche definieren durch

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Es ist also $k_1 \geqq k_2$. Es wird sich darum handeln, Funktionen der Hauptkrümmungen zu untersuchen, speziell symmetrische Funktionen von zwei Variablen, für welche dann die Hauptkrümmungen einer Fläche einzusetzen sind.

Demgemäß sei die Funktion $V(k_1, k_2)$ für $k_1 \geqq k_2$ definiert und besitze stetige partielle Ableitungen V_1, V_2. Durch Spiegelung an der Geraden $k_1 = k_2$ läßt sich $V(k_1, k_2)$ zu einer *symmetrischen Funktion* $W(k_1, k_2)$:

$$W(k_2, k_1) = W(k_1, k_2)$$

in der ganzen k_1, k_2-Ebene erweitern. Offenbar ist W dann und nur dann überall stetig differenzierbar, wenn $V_1(k, k) = V_2(k, k)$ ist.

Spezielle symmetrische Funktionen erhält man, wenn man von einer Funktion $U(H, K)$ ausgeht, die für $H^2 \geqq K$ definiert und stetig differenzierbar ist, und

$$W(k_1, k_2) = U(\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2), k_1 k_2) \tag{3.1}$$

setzt. Die Reichweite dieser Funktionenklasse wird durch folgendes Lemma beleuchtet:

Lemma 2. *Die symmetrische Funktion $W(k_1, k_2)$ sei in der Umgebung der Geraden $k_1 = k_2$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $U(H, K) = W(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K})$ stetig differenzierbar nach H und K.*

Beweis: Für $H^2 > K$ ist U stetig differenzierbar. Sei also $H_0^2 = K_0$. Wir zeigen, daß $\lim U_H(H, K)$ für $H \to H_0$, $K \to K_0$, $H^2 > K$ existiert. Daraus folgt dann erstens durch Anwendung des Mittelwertsatzes, daß U an der Stelle H_0, K_0 nach H differenzierbar ist, und zweitens die Stetigkeit der Ableitung U_H. Man findet:

$$U_H(H, K) = W_1 + W_2 + H\{W_1(k_1, k_2) - W_2(k_1, k_2)\} \cdot (H^2 - K)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Aus der Symmetrie von W folgt $W_2(k_1, k_2) = W_1(k_2, k_1)$. Setzt man dies in (3.2) ein, wendet auf die Differenz $W_1(k_1, k_2) - W_1(k_2, k_1)$ den Mittelwertsatz an und läßt k_1, k_2 gegen $H_0 = k$ gehen, so erhält man

$$\lim U_H(H, K) = 2W_1(k, k) + 2k[W_{11}(k, k) - W_{12}(k, k)].$$

Analog beweist man die Differenzierbarkeit nach K.

Wir bemerken noch, daß es symmetrische einmal differenzierbare Funktionen W gibt, die als Funktionen von H und K nicht differenzierbar sind, z. B. $W = |k_1|^\alpha + |k_2|^\alpha$ mit $1 < \alpha < 2$.

Eine besondere Rolle werden solche Funktionen W spielen, die in beiden Variablen *gleichsinnig monoton* — etwa monoton wachsend — sind. Sei also $W(x, y)$ für alle $x \geqq y$ definiert und *eigentlich monoton wachsend in x* (bei festem y) *und in y* (bei festem x). Man kann zur anschaulichen Darstellung solcher Funktionen die Fläche $z = W(x, y)$ betrachten: sie steigt in der x- und y-Richtung monoton an. Die Niveaulinien $W(x, y) = c$ bilden in der x, y-Ebene monoton abfallende Kurven. Wir werden später im Zusammenhang mit derartigen Funktionen W folgenden Hilfssatz benötigen:

Lemma 3. *l_{ij} und $\bar{l}_{ij}$ seien symmetrische zweireihige Matrizen mit den Eigenwerten $k_1 \geqq k_2$ bzw. $\bar{k}_1 \geqq \bar{k}_2$. Falls dann $W(k_1, k_2) = W(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ gilt, so ist die quadratische Form $Q = (\bar{l}_{ij} - l_{ij})\, x^i x^j$ entweder indefinit oder $\equiv 0$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß $k_1 \leqq \bar{k}_1$ ist. Wegen der Monotonie von W ist dann entweder $k_1 < \bar{k}_1$ und $k_2 > \bar{k}_2$ oder $k_1 = \bar{k}_1$ und $k_2 = \bar{k}_2$. Für $\Sigma(x^i)^2 = 1$ wird $k_2 \leqq l_{ij} x^i x^j \leqq k_1$, wobei die Extrema für die Eigenvektoren angenommen werden. Wählt man für die x^i einen zu $\bar{k}_1$ gehörigen Eigenvektor, so wird

$$Q = (\bar{l}_{ij} - l_{ij})\, x^i x^j = \bar{k}_1 - l_{ij} x^i x^j \geqq \bar{k}_1 - k_1 \geqq 0.$$

Dabei ist entweder $Q > 0$, oder es steht an beiden Stellen das Gleichheitszeichen; dann muß aber $\bar{l}_{ij} = l_{ij}$ sein. Ebenso folgt: falls Q nicht $= 0$ ist, so nimmt Q negative Werte an (für einen zu $\bar{k}_2$ gehörigen Eigenvektor).

Zum Lemma 3 ist noch folgendes zu bemerken:

1. Erweitert man W zu einer symmetrischen Funktion, so bleibt die gleichsinnige Monotonie erhalten; auf die Reihenfolge der Variablen kommt es dann nicht an (beim obigen Beweis ist aber wesentlich, daß man das größere k_i mit dem größeren $\bar{k}_i$ vergleicht).

2. Sind die k_i Hauptkrümmungen einer Fläche, so ist der Funktionswert $W(k_1, k_2)$ nicht eindeutig definiert, denn bei Änderung der Orientierung hat man an Stelle der k_i die Werte $k_i^* = -k_i$. Geht man aber von W zu $W^*(k_1, k_2) = -W(-k_1, -k_2)$ über, so ist W^* wieder monoton wachsend in beiden Variablen, und der Funktionswert $W^*(k_1^*, k_2^*) = -W(k_1, k_2)$ ändert nur das Vorzeichen. Die Voraussetzung im Lemma 3 wird davon nicht tangiert.

Wir beschränken uns jetzt auf stetig differenzierbare symmetrische Funktionen W und fordern die Monotonie in der Form

$$W_{k_1} > 0, \quad W_{k_2} > 0. \tag{3.3}$$

Geht man von einer Funktion U aus und bildet W nach (3.1), so wird unter der Annahme (3.3)

$$W_{k_1} \cdot W_{k_2} = \tfrac{1}{4} U_H^2 + H\, U_H U_K + K\, U_K^2 > 0. \tag{3.4}$$

Setzt man umgekehrt (3.4) für U voraus, so kann man einerseits annehmen, daß auch (3.3) gilt, indem man allenfalls zu $-U$ übergeht; andererseits sind (3.3) und (3.4) invariant gegen den Übergang von W zu W^*. Somit hat es einen invarianten Sinn, von monoton wachsenden Funktionen W oder U der Hauptkrümmungen einer Fläche zu sprechen.

Gelegentlich wird nicht eine Funktion $W(k_1, k_2)$ in der ganzen Ebene gegeben sein, sondern nur eine Kurve. Wir nehmen an, die Funktion $f(k_1)$ sei stetig differenzierbar für alle k_1, es sei $f'(k_1) < 0$, und die Kurve $k_2 = f(k_1)$ sei symmetrisch bezüglich der Geraden $k_1 = k_2$ (d. h. es ist $f^{-1} = f$). Dann gilt:

Lemma 4. *Zu $f(k_1)$ gibt es eine symmetrische stetig differenzierbare Funktion $W(k_1, k_2)$ mit (3.3), so daß $k_2 = f(k_1)$ gleichbedeutend ist mit $W(k_1, k_2) = 0$. Die Funktion W ist ebensooft differenzierbar wie f.*

Beweis: Wir definieren eine Kurvenschar C_t in der k_1, k_2-Ebene durch $k_2 = f(k_1 - t) + t$. C_t entsteht aus der Ausgangskurve C_0 durch Translation in der Richtung der Geraden $k_1 = k_2$. Da $k_2 = f(k_1)$ monoton abnimmt, hat C_t mit jeder Geraden $k_2 = k_1 + a$ ($a = \text{const}$) genau einen Schnittpunkt. Die Kurven C_t sind daher punktfremd zueinander und bedecken die ganze Ebene. Wir definieren:

$$W(k_1, k_2) = t \qquad \text{für } (k_1, k_2) \in C_t.$$

Wegen der Symmetrie der Kurven C ist W symmetrisch. Ordnet man dem Wertepaar k_1, t das Paar $k_1, k_2 = f(k_1 - t) + t$ zu, so erhält man eine eineindeutige, differenzierbare Abbildung mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(k_1, k_2)}{\partial(k_1, t)} = 1 - f'(k_1 - t) > 0.$$

Die Umkehrabbildung ordnet dem Punkt k_1, k_2 das Paar $k_1, t = W(k_1, k_2)$ zu. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von W sowie die Eigenschaft (3.3).

§ 4. Variation der Krümmungsfunktionen H_ν

Wir betrachten eine Fläche F, gegeben durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ als Funktion lokaler Parameter $u^1, \ldots, u^n$. Vorläufig sei n beliebig ≥ 2. Mit Hilfe einer Vektorfunktion $\mathfrak{w}$ auf F definiert man eine *lineare Variation von* F durch

$$F_t\colon \quad \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}. \tag{4.1}$$

In der Umgebung eines Punktes von F sind die Flächen F_t für kleine t sicher regulär. Wir berechnen Ableitungen nach t — bezeichnet durch einen Strich — für $t = 0$ (oder allgemeiner für $t = t_0$). Man findet $\mathfrak{x}' = \mathfrak{w}$, also

$$g'_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{w}_j + \mathfrak{x}_j \mathfrak{w}_i \,. \tag{4.2}$$

Aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ und $\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_i = 0$ folgt $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$ und $\mathfrak{n}'\,\mathfrak{x}_i + \mathfrak{n}\,\mathfrak{w}_i = 0$, somit

$$\mathfrak{n}' = -\,g^{ij}(\mathfrak{w}_i \mathfrak{n})\,\mathfrak{x}_j \,. \tag{4.3}$$

Wegen (1.6) ist $l_{ij} = \mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n}$ und daher $l'_{ij} = \mathfrak{x}'_{ij}\,\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n}'$, also

$$l'_{ij} = \mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n}. \tag{4.4}$$

Wir setzen nun $\lambda\, l_{ij} + g_{ij} = L_{ij}$, $g^{-1} L^*_{ij} = M^{ij}$, wo λ eine reelle Variable ist. Nach den Regeln für die Differentiation von Determinanten ist

$$(g^{-1}\,|L_{ij}|)' = M^{ij} L'_{ij} - g^{-2} g'\,|L_{rs}|, \qquad g^{-1} g' = g^{ij} g'_{ij}\,,$$

also wegen (4.2) und (4.4):

$$(g^{-1}\,|L_{ij}|)' = \lambda\, M^{ij}(\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n}) + 2\,\{M^{ij} - g^{-1}\,|L_{rs}|\, g^{ij}\}\,(\mathfrak{x}_j \mathfrak{w}_i)\,. \tag{4.5}$$

Nun ist

$$M^{ij} - g^{-1}\,|L_{rs}|\, g^{ij} = M^{ir}(\delta^j_r - L_{rs} g^{sj}) = -\,\lambda\, M^{ir}\, l^j_r.$$

Setzt man dies in (4.5) ein, benutzt (1.7) und verwendet noch für die linke Seite von (4.5) den Ausdruck (1.9) und für M^{ij} die Entwicklung (1.10), so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda^\nu \binom{n}{\nu} H'_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu \binom{n-1}{\nu-1} c^{ij}_{(\nu)}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\,\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n}_j\}\,.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von λ^ν ergeben sich daraus für die Variation der H_ν folgende Formeln:

$$n\, H'_\nu = \nu\, c^{ij}_{(\nu)}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Setzt man hier $n = 2$, $\nu = 1, 2$, so erhält man für die Variation von H und K die Formeln:

$$2\,H' = g^{ij}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}, \tag{H}$$

$$K' = c^{ij}\,\{\mathfrak{w}_{ij}\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{w}_i\mathfrak{n}_j\}\ ^{13}), \tag{K}$$

wobei gemäß (1.11) $c^{ij} = g^{-1}\, l^*_{ij}$ ist.

[13]) Für $\mathfrak{w} = \mu\,\mathfrak{n}$ ergibt dies bekannte Variationsformeln. Vgl. [6], S. 257.

§ 5. Der Translationssatz

In diesem Paragraphen werden die bisherigen Betrachtungen auf geschlossene Flächen angewandt. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz I. *F und $\bar{F}$ seien orientierte geschlossene Flächen, die analytisch sind und zwischen denen eine die Orientierung erhaltende analytische reguläre Parallelabbildung $\bar{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ besteht. (Definition im § 2.) Außerdem sei in entsprechenden Punkten $U(\bar{H},\bar{K}) = U(H,K)$, wobei die Funktion U stetig differenzierbar ist und der Ungleichung* (3.4) *genügt. Dann ist T eine Translation.*

Der Satz I ist bewiesen, sobald wir folgenden lokalen Satz bewiesen haben:

Satz 1. *Zwischen den analytischen Flächenstücken F und $\bar{F}$, die nicht auf einem Zylinder mit Erzeugenden parallel zu $\mathfrak{e}$ liegen sollen, bestehe eine die Orientierung erhaltende analytische reguläre Parallelabbildung in der Richtung* $\mathfrak{e}$, *und in entsprechenden Punkten p und $\bar{p}$ sei $U(H,K) = U(\bar{H},\bar{K})$, wo U der Bedingung* (3.4) *genügt. Dann kann der Abstand $w = p\bar{p}$ in einem inneren Punkt kein relatives Extremum annehmen, es sei denn, w ist konstant.*

Beweis: Die Ortsvektoren von p und $\bar{p}$ sind nach (2.11) $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + w\,\mathfrak{e}$. Auf Grund der Voraussetzungen über T können wir auf F und $\bar{F}$ gemeinsame Parameter einführen, so daß w eine analytische Funktion dieser lokalen Parameter wird.

Wir nehmen an, w sei nicht konstant, und es gebe auf F einen Punkt o, in dem $w_i = 0$ ist. Dann zeigen wir: *in o hat w kein relatives Extremum.* o sei durch $u^i = 0$ gegeben. In o ist

$$\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i, \quad \bar{g}_{ij} = g_{ij}, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}, \quad \bar{l}_{ij} - l_{ij} = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, w_{u^i u^j}\,.$$

Durch eine affine Parametertransformation können wir erreichen, daß $(\bar{g}_{ij})_0 = (g_{ij})_0 = \delta_{ij}$ wird, so daß die Matrizen $(l_{ij})_0$ und $(\bar{l}_{ij})_0$ die Eigenwerte k_i bzw. $\bar{k}_i$ erhalten. Nach Lemma 3 (§ 3) ist daher die quadratische Form $(\bar{l}_{ij} - l_{ij})_0 u^i u^j = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})_0 (w_{u^i u^j})_0 u^i u^j$ *entweder indefinit oder* $\equiv 0$.

Im *ersten Fall* ist der Satz 1 bewiesen.

Im *zweiten Fall*, wo $(\bar{l}_{ij})_0 = (l_{ij})_0$ ist, die Flächen also in o bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen, betrachten wir die Funktion w in der Umgebung von o. Wir definieren eine Flächenschar F_t durch (2.14). Wegen $(w_i)_0 = 0$ sind alle Flächen F_t in einer Umgebung von o regulär, und wir können die flächentheoretischen Größen in Abhängigkeit von t betrachten (die auftretenden Größen hängen außerdem noch von den Flächenparametern u^i ab). Setzt man $\psi(t) = U(H(t), K(t))$, so ist

$$(5.1) \qquad \psi(1) - \psi(0) = 0 = \int_0^1 \psi'(t)\, dt = \int_0^1 (U_H H' + U_K K')\, dt,$$

wobei der Strich Ableitung nach t bedeutet. Auf Grund der Variationsformeln (H) und (K) im § 4 kann man dafür schreiben:

$$(5.2) \qquad \int_0^1 a^{ij}(t)\, \{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t)\, [w_{u^i u^j} - \Gamma^k_{ij}(t)\, w_k] + 2\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i(t)\, w_j\}\, dt = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$a^{ij}(t) = \tfrac{1}{2}\, U_H(t)\, g^{ij}(t) + U_K(t)\, c^{ij}(t)$$

gesetzt ist. Nun gilt nach (2.12):

(5.3) $$\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t) = \mathfrak{e}\,\mathfrak{n}\, g^{\frac{1}{2}}\, g(t)^{-\frac{1}{2}}$$

und damit

(5.4) $$\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i(t) = g^{\frac{1}{2}}\, g(t)^{-\frac{1}{2}} \{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i + \mathfrak{e}\,\mathfrak{n}\,[\Gamma^s_{si} - \Gamma^s_{si}(t)]\},$$

wobei die Formel $(\sqrt{g})_i = \sqrt{g}\,\Gamma^s_{si}$ benutzt wurde. Setzt man (5.3) und (5.4) in (5.2) ein und führt noch ein

(5.5) $$A^{ij} = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}}\, a^{ij}(t)\, dt,$$

$$B^k = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}} \{2\, a^{ik}(t)\, [\Gamma^s_{si} - \Gamma^s_{si}(t)] - a^{ij}(t)\, \Gamma^k_{ij}(t)\}\, dt,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, A^{ij} w_{u^i u^j} + 2\, A^{ij} (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)\, w_j + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\, B^k w_k = 0$$

oder nach Multiplikation mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$:

(*D*) $$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 A^{ij} w_{u^i u^j} + A^{ij} (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2_i\, w_j + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 B^k w_k = 0\,;$$

Wir behaupten nun: *die quadratische Form $A^{ij} x_i x_j$ ist positiv definit.* Beweis: Führt man in einem Punkt ein Parametersystem (1.12) ein, so kommt der Tensor a^{ij} auf Diagonalform, und zwar wird nach (1.13)

(5.6) $$a^{ii} = U_{k_i} > 0\,.$$

$a^{ij} x_i x_j$ ist also positiv definit, und daraus folgt nach (5.5) durch Mittelbildung über t die Behauptung.

Wegen der Analytizität der Funktionen w und $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}$ gelten Entwicklungen

(5.7) $$\begin{aligned} w &= w^{(0)} + w^{(m)} + o(r^m), \quad && w^{(m)} \not\equiv 0, \quad m \geqq 2\,^{14)} \\ \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} &= f^{(l)} + o(r^l), && f^{(l)} \not\equiv 0 \quad l \geqq 0, \end{aligned}$$

wobei $w^{(\nu)}$, $f^{(\nu)}$ homogene Formen in den u^i vom Grade ν sind und $r^2 = \Sigma(u^i)^2$ gesetzt ist. Führt man (5.7) in (*D*) ein, dividiert durch r^{2l+m-2} und läßt r gegen 0 streben, so erhält man für die Anfangsglieder $w^{(m)}$, $f^{(l)}$ folgende Differentialgleichung:

(D_0) $$(A^{ij})_0 \left\{ f^{(l)^2} w^{(m)}_{u^i u^j} + (f^{(l)^2})_i\, w^{(m)}_j \right\} = 0\,.$$

Um nun den Beweis des Satzes 1 zu beenden, bringen wir durch eine affine Parametertransformation $(A^{ij})_0$ auf die Gestalt δ_{ij} und beweisen folgendes

Lemma 5. *Die reelle homogene Form $w^{(m)} \not\equiv 0$, $m \geqq 2$, der Variablen u^i genüge der Differentialgleichung*

(D_0') $$f^{(l)^2} \cdot \Delta\, w^{(m)} + \operatorname{grad} f^{(l)^2} \cdot \operatorname{grad} w^{(m)} = 0$$

mit einer reellen Form $f^{(l)} \not\equiv 0$, $l \geqq 0$. Dann ist $w^{(m)}$ indefinit.

---

[14]) Der Fall $m = 2$ wurde schon erledigt.

Beweis: Durch Integration der Gleichung (D_0') über eine Kreisscheibe $r \leqq R$ und Anwendung der Greenschen Formel folgt

$$0 = \oint_{r=R} f^{(l)^2} \frac{\partial w^{(m)}}{\partial r} R\, d\varphi = m \oint_{r=R} f^{(l)^2} w^{(m)}\, d\varphi\,.$$

Da die Nullstellen von $f^{(l)}$ auf einer Kreislinie isoliert sind, muß $w^{(m)}$ das Vorzeichen wechseln.

Übrigens wird die Integration besonders einfach beim Übergang zu Polarkoordinaten r, φ: Ist $f^{(l)} = r^l F(\varphi)$, $w^{(m)} = r^m W(\varphi)$, so geht (D_0') über in die Gleichung

$$(F^2 W')' + m(m+2l) F^2 W = 0,$$

die man über eine Periode von φ zu integrieren hat.

An den Beweis des Satzes I schließen wir noch folgende Bemerkungen:

1. Die Funktion w genügt der linearen Differentialgleichung (D). Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ ist diese elliptisch (und enthält kein Glied mit w). Dann läßt sich auch für nicht-analytische Flächen beweisen, daß die Funktion w, falls sie nicht konstant ist, in einem inneren Punkt kein Extremum haben kann[15]). Ob diese Eigenschaft in den Punkten mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ ohne die Voraussetzung der Analytizität erhalten bleibt, ist mir nicht bekannt.

2. Beim Satz I wurde angenommen, daß die Funktion U in der ganzen k_1, k_2-Ebene der Bedingung (3.4) genügt. Diese Voraussetzung wurde beim obenstehenden Beweis aber nicht voll ausgenutzt. Daher kann man dem Satz I die folgende allgemeinere Fassung geben: *Die Funktion U sei etwa in einem konvexen* (offenen) *Gebiet G der k_1, k_2-Ebene definiert und erfülle dort die Ungleichung* (3.4)[16]). *F und $\overline{F}$ seien geschlossenen Flächen, deren Krümmungsbild in G enthalten ist. Dann gilt für F und $\overline{F}$ der Translationssatz I.*

Erstens läßt sich nämlich wegen der Konvexität von G das Lemma 3 beweisen [etwa durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Differenz $W(\bar{k}_1, \bar{k}_2) - W(k_1, k_2)$]. Zweitens gilt (3.4) im Punkte $(k_1)_0$, $(k_2)_0$ der k_1, k_2-Ebene. Da der Punkt o — beim Fall 2 des obigen Beweises — auf allen Flächenstücken F_t dieselben Hauptkrümmungen hat, ist also (5.6) in o für alle t erfüllt und daher $A^{ij} x_i x_j$ in einer Umgebung von o positiv definit.

Zum Beispiel liefert unser Beweis auch folgenden Satz:

Satz I_0. *Die analytischen Eiflächen F und $\overline{F}$ seien gleichartig orientiert* (z. B. Flächennormale nach innen), *und es bestehe eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\bar{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ von F auf $\overline{F}$. Falls dann in entsprechenden Punkten $U(H, K) = U(\overline{H}, \overline{K})$ ist, wobei U für $k_1, k_2 > 0$ definiert ist und der Ungleichung* (3.4) *genügt, so ist T eine Translation.*

Wir haben nur zu zeigen, daß die Abbildung T analytisch und regulär ist. Dies folgt aber aus Lemma 1 (§ 2), da Eiflächen in jeder Richtung die Bedingung (a), § 2, erfüllen. G ist hier der Quadrant $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Für U kann man z. B. ein symmetrisches Polynom (oder eine Potenzreihe) in k_1, k_2 mit

[15]) Vgl. E. Hopf [13], S. 147.

[16]) Allgemeiner: in einem in der k_1-Richtung und in der k_2-Richtung konvexen Gebiet.

positiven Koeffizienten nehmen, aber z. B. auch die Funktion $U = -1/k_1 - 1/k_2 = -2\,H/K$. Bei Flächen mit der Eigenschaft (a) werden übrigens nur die Spezialfälle $l = 0$ und $l = 1$ des Lemma 5 benötigt, in denen (D_0') in $\Delta\, w^{(m)} = 0$ bzw. $\Delta\,(f^{(1)} w^{(m)}) = 0$ übergeht.

§ 6. Der Symmetriesatz

Aus dem Translationssatz I folgt:

Satz II. *Die analytische geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{c}$ im engeren Sinne (Definition im § 2). Für jedes Punktepaar p, p', das von einer Parallelen zu $\mathfrak{c}$ aus F geschnitten wird, habe die Funktion $U(H,K)$ in p und p' den gleichen Wert, wobei U der Bedingung* (3.4) *genügt. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$.*

Bezeichnet man nämlich mit $p' = A\,p$ die Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{c}$ von F auf sich (vgl. § 2) und mit S die Spiegelung an einer zu $\mathfrak{c}$ senkrechten Ebene, so erfüllt die Abbildung $T = S\,A$ von F auf die Fläche $\bar{F} = S(F)$ die Voraussetzungen des Satzes I: Erstens folgt nämlich aus Lemma 1 (§ 2), daß A analytisch und regulär ist. Zweitens kehrt A die Orientierung um; orientiert man nun $\bar{F}$ derart, daß auch S die Orientierung umkehrt, so erhält T die Orientierung. Außerdem bleiben dann bei S die Hauptkrümmungen ungeändert, und daraus resultiert die Invarianz von $U(H,K)$. Somit ist nach Satz I die Abbildung $SA = T$ eine Translation, also $A = S\,T$ eine Spiegelung an einer zu $\mathfrak{c}$ senkrechten Ebene.

Da Eiflächen in jeder Richtung konvex im engeren Sinne sind, darf F im Satz II insbesondere eine analytische Eifläche sein, wobei U dann nur für $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ definiert zu sein braucht bzw. nur dort die Bedingung (3.4) erfüllen muß (entsprechend zum Satz I_0).

§ 7. Geschlossene Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen

Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geq c$ definiert und zweimal stetig differenzierbar. Es sei $f(c) = c$ und $f'(x) < 0$ für alle x (daher also $f(x) < x$ für $x > c$).

Wir betrachten Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungen die monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ besteht. Dabei ist k_1 die größere Hauptkrümmung, also $k_1 \geq k_2$. Aus dem Satze II ergibt sich nun:

Satz III. *Die geschlossene analytische Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{c}$ (im engeren Sinne), und es bestehe eine Relation $k_2 = f(k_1)$ der oben beschriebenen Art. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$.*

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $f'(c) = \varkappa = -1$.

Durch Spiegelung an der Geraden $k_1 = k_2$ entsteht aus der Kurve $k_2 = f(k_1)$ eine symmetrische Kurve. Nach Lemma 4 (§ 3) kann diese Kurve durch eine symmetrische Relation $W(k_1, k_2) = 0$ gegeben werden, wobei die Funktion W in der ganzen Ebene definiert ist. Nach Lemma 2 (§ 3) ist $U(H, K) = W\left(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}\right)$ stetig differenzierbar. Da $U(H, K)$ in allen Punkten von F den gleichen Wert hat (nämlich den Wert Null), folgt der Satz III aus dem Symmetriesatz II.

2. Fall: $f'(c) = \varkappa \neq -1$.
In diesem Falle ist unsere Methode nicht ausreichend; man kommt jedoch zum Ziel, wenn man Ergebnisse von H. Hopf zu Hilfe nimmt: Auf einem analytischen Flächenstück mit einer beliebigen Relation $W(k_1, k_2) = 0$ zwischen den Hauptkrümmungen, welches nicht Stück einer Kugel oder Ebene ist, sei o ein Nabelpunkt. Der Krümmungsdifferentialquotient $\frac{dk_2}{dk_1}$ in o werde mit $\varkappa$ bezeichnet. Dann gelten folgende Sätze (vgl. [1], S. 236):

(H_1) *Falls* $\varkappa < 0$ *(und* $\neq \infty$*) ist, so ist* $\varkappa = -1$.

(H_2) *Falls* $\varkappa < 0$ *(also* $= -1$*) ist, so ist* o *ein isolierter Nabelpunkt, und der Index von* o *im Netz der Krümmungslinien ist* < 0.

Wir betrachten nun zunächst Flächen vom Geschlecht $g \neq 1$. Da es auf einer solchen Fläche einen Nabelpunkt geben muß, folgt aus (H_1): *Auf einer analytischen Fläche vom Geschlecht* $g \neq 1$ *kann keine Relation mit* $\varkappa < 0$, $\varkappa \neq -1$ *bestehen.* (Darüber hinaus folgt aus (H_2) der Satz C in der Einleitung, der im Falle $g = 0$ den Satz III entbehrlich macht.)

Sei nun F eine Fläche vom Geschlecht 1 mit einer Relation $k_2 = f(k_1)$. Auf Grund von (H_2) kann es auf F keinen Nabelpunkt geben. Von der Kurve $k_2 = f(k_1)$ kommt daher nur ein Teil $k_1 > c' > c$ in Betracht, der von der Geraden $k_1 = k_2$ positiven Abstand hat. Eine Modifikation von Lemma 4 (§ 3) liefert dann eine Funktion $W(k_1, k_2)$, die in einem konvexen Gebiet $k_1 - k_2 > c'' > 0$ definiert ist. Setzt man $U(H, K) = W\left(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}\right)$, so läßt sich der Satz II in der erweiterten Fassung anwenden, die im Anschluß an den Satz I gewonnen wurde (Bemerkung 2, § 5). Damit ist der Satz III bewiesen. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß man sich auf Grund der Ergebnisse von H. Hopf auf symmetrische Relationen beschränken kann.

Nun behaupten wir:

Satz IV. *Die geschlossene analytische Fläche F sei konvex (im engeren Sinne) in der Richtung $\mathfrak{e}$ und in allen zu $\mathfrak{e}$ benachbarten Richtungen. Dann kann, falls F keine Kugel ist, zwischen den Hauptkrümmungen von F keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ der oben beschriebenen Art bestehen.*

Beweis: Falls auf F eine Relation $k_2 = f(k_1)$ besteht, so besitzt F zu jeder Konvexitätsrichtung eine senkrechte Symmetrieebene. Mit zwei Symmetrieebenen E, E' ist auch die Ebene E'', die durch Spiegelung von E' an E entsteht, Symmetrieebene von F. Daher hat F in jeder Richtung eine Symmetrieebene, muß also eine Kugel sein. Wir werden diese Überlegung sogleich präzisieren und gleichzeitig die Voraussetzung über Konvexitätsrichtungen im Satz IV abschwächen.

Zunächst bemerken wir, daß alle Symmetrieebenen einer beschränkten Punktmenge F des Raumes durch einen festen Punkt O gehen; denn gäbe es 4 Ebenen, die nicht durch einen Punkt gehen, so erhielte man bei fortgesetzter Spiegelung der Konfiguration der Ebenen schließlich beliebig weit entfernte Symmetrieebenen, was der Beschränktheit von F widerspricht. Die Symmetrieebenen von F (durch O) erzeugen eine Gruppe von Bewegungen, die F in sich transformieren. Man kann sich auf die Drehungen beschränken. Die Gruppe

aller Drehungen von F in sich ist abgeschlossen, da F abgeschlossen ist. Nach Sätzen der Lieschen Theorie hat die Gruppe aller Drehungen nur die folgenden echten abgeschlossenen Untergruppen: 1. Die endlichen Drehgruppen, 2. die Drehungen um eine Achse und 3. die Drehungen um eine Achse a und um Achsen senkrecht zu a mit dem Winkel π. Man kann nun offenbar den Satz IV folgendermaßen erweitern:

Satz IV'. *Die geschlossene analytische Fläche F sei keine Kugel, besitze aber drei linear unabhängige Konvexitätrichtungen, von denen nicht zwei senkrecht auf der dritten stehen, derart, daß die zugehörigen Spiegelungen eine unendliche Gruppe erzeugen.* (Dafür ist z. B. hinreichend, daß die drei Winkel zwischen den Richtungen irrationale Vielfache von π sind.) *Dann kann zwischen den Hauptkrümmungen von F keine Relation $k_2 = f(k_1)$ der betrachteten Art bestehen.*

Die Gruppe aller Drehungen von F in sich enthielte nämlich andernfalls alle Drehungen, und F wäre eine Kugel.

Der Satz IV enthält übrigens den Satz A in der Einleitung bei Beschränkung auf analytische Eiflächen.

Als Beispiel für die Reichweite unserer Ergebnisse betrachten wir *lineare Relationen* $k_2 = \varkappa k_1 + c$, wo $\varkappa$ und c Konstanten sind. Zunächst sei $\varkappa < 0$. Nach dem Satz C in der Einleitung gibt es außer der Kugel keine analytische Fläche vom Geschlecht 0 mit einer solchen linearen Relation. Wir können nun neu hinzufügen: Unter allen Flächen vom Geschlecht 1 von der in den Sätzen IV und IV' geschilderten Art gibt es keine Fläche mit einer derartigen linearen Relation. Das gleiche gilt für Flächen vom Geschlecht $g \geqq 2$ (wobei nach (H_1) zudem $\varkappa = -1$ sein müßte, so daß höchstens die Relation $k_1 + k_2 - c = 0$ in Frage käme).

Für $\varkappa \geqq 0$ versagt unsere Methode. In diesen Fällen lassen sich Flächen angeben: Eine lineare Relation mit $\varkappa = 0$ besteht auf geschlossenen Röhrenflächen (vom Geschlecht 1). *Die einzigen analytischen geschlossenen Flächen vom Geschlecht $g \neq 1$ mit einer linearen Relation und mit $\varkappa > 0$ sind gewisse Rotationsflächen vom Geschlecht* 0. Dies wird in einer späteren Arbeit gezeigt werden.

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob sich die bisherigen Sätze auch für Flächen beweisen lassen, die mehrmals differenzierbar, aber nicht analytisch sind. Dies wird in zwei Fällen gelingen: Erstens werden im nächsten Paragraphen Integralformeln hergeleitet, aus denen sich der Translationssatz I — und damit auch die Sätze II—IV — im Falle der speziellen Funktionen $U = H$ und $U = K\,(K > 0)$ unter schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergeben werden. Zweitens betrachten wir Flächen mit einer Relation $W(k_1, k_2) = 0$ und setzen voraus, daß diese Relation analytisch sei. Dann werden die Sätze dieses Paragraphen durch folgende Bemerkung ergänzt[17]:

Das Flächenstück F sei dreimal stetig differenzierbar, aber nicht analytisch. Dann kann auf F keine symmetrische analytische Relation $W(k_1, k_2) = 0$ mit (3.3) *bestehen.*

[17]) Vgl. auch [7], S. 53.

Man kann nämlich die Potenzreihe $W(k_1,k_2)$ durch H und K ausdrücken. Stellt man dann F durch $z = z(x, y)$ dar und setzt für H und K die entsprechenden Ausdrücke ein, so erhält man eine analytische Differentialgleichung $U(H,K) = 0$ für die Funktion $z(x,y)$, die wegen (3.3) elliptisch ist. Nach einem Satz von S. Bernstein läßt eine solche Differentialgleichung aber nur analytische Lösungen zu (vgl. etwa E. Hopf [14]).

Im Falle analytischer Relationen stellt es also keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, wenn wir bei den Sätzen III und IV nur analytische Flächen zulassen.

§ 8. Integralformeln im Falle von H und K

Zunächst wird ein Kalkül entwickelt, der zur Herleitung von Integralformeln dient.

$\mathfrak{v}$ sei eine Vektorfunktion auf einer Fläche F. Bei Festhaltung des räumlichen Koordinatensystems bilden die Komponenten von $\mathfrak{v}$ ein Tripel skalarer Funktionen auf der Fläche. Ein *Tripel linearer Differentialformen* $\omega = a_i(u)du^i$ nennen wir eine *vektorielle Differentialform*; z. B. ist das Differential $d\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_i du^i$ eine solche. Sind $\alpha = \mathfrak{a}_i du^i$ und $\beta = \mathfrak{b}_i du^i$ vektorielle Differentialformen, so definieren wir das *vektorielle Produkt* von α und β durch

$$\alpha \hat{\times} \beta = (\mathfrak{a}_i \times \mathfrak{b}_j)\, du^i \wedge du^j. \tag{8.1}$$

Dabei ist $\mathfrak{a}_i \times \mathfrak{b}_j$ das gewöhnliche Vektorprodukt der räumlichen Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ und $du^i \wedge du^j$ das alternierende Produkt (1.4) der Differentiale. Abweichend von den üblichen Regeln des Vektorproduktes gilt jetzt

$$\alpha \hat{\times} \beta = \beta \hat{\times} \alpha,$$

und $\alpha \hat{\times} \alpha$ braucht nicht gleich Null zu sein. Das skalare Produkt von $\mathfrak{v}$ mit $\alpha \hat{\times} \beta$ wird auch als Determinante geschrieben:

$$(\mathfrak{v}, \alpha, \beta) = \mathfrak{v}(\alpha \hat{\times} \beta).$$

Sind in einer Determinante zwei Zeilen vektorielle Differentialformen, so ändert sich der Wert der Determinante bei Vertauschung dieser Zeilen nicht.

Wählt man speziell $\alpha = a_i^j \mathfrak{x}_j du^i$ und $\beta = d\mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor von F ist, so erhält man

$$\alpha \hat{\times} d\mathfrak{x} = a_i^i\, \mathfrak{n}\, dA, \qquad \alpha \hat{\times} \alpha = 2\,|a_i^j|\, \mathfrak{n}\, dA. \tag{8.2}$$

Man bestätigt dies entweder direkt oder mit Hilfe der Formeln (1.2), (1.5), (1.15) und (1.17). Setzt man $\alpha = d\mathfrak{n}$, d. h. $a_i^j = -l_i^j$, so ergeben sich aus (8.2) die Formeln

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} \hat{\times} d\mathfrak{x} &= 2\,\mathfrak{n}\, dA, \qquad d\mathfrak{x} \hat{\times} d\mathfrak{n} = -2\,H\,\mathfrak{n}\, dA, \\ d\mathfrak{n} \hat{\times} d\mathfrak{n} &= 2\,K\,\mathfrak{n}\, dA. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Wir betrachten nun zwei Flächen F und $\bar{F}$, zwischen denen eine Parallelabbildung (2.11) besteht.

Wir bilden die lineare Differentialform $(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})$ und behaupten, daß für ihre *äußere Ableitung* folgende Formel gilt:

$$(8.4)\qquad d(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n})^2(d\bar{A}+dA) + 2(\bar{H}-H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA.$$

Der Beweis dieser bzw. einer allgemeineren Formel wird im § 9 geführt werden (Formel (9.5) für $n = 2$).

Integriert man nun (8.4) über F und wendet den Satz von STOKES an, so folgt

$$(8.5)\quad 2\iint(\bar{H}-H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \tfrac{1}{2}\iint(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n})^2(d\bar{A}+dA) = \oint(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}).$$

Dabei sind die beiden Integrale links über F und das Integral rechts über den Rand von F zu erstrecken. Speziell ist für geschlossene Flächen

$$(8.5')\qquad 2\iint(\bar{H}-H)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \tfrac{1}{2}\iint(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n})^2(d\bar{A}+dA) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Integralformeln läßt sich nun der Translationssatz I (§ 5) im Falle der mittleren Krümmung H unter den folgenden schwächeren Voraussetzungen beweisen:

Satz $\mathrm{I_{II}}$. *F und $\bar{F}$ seien geschlossene orientierte zweimal stetig differenzierbare Flächen, zwischen denen eine reguläre Parallelabbildung $\bar{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$ besteht. T sei zweimal stetig differenzierbar und erhalte die Orientierung. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Flächen keine Zylinderstücke mit Erzeugenden parallel zu $\mathfrak{e}$ enthalten. Falls dann in entsprechenden Punkten $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ von F und $\bar{F}$ die mittlere Krümmung H den gleichen Wert hat, so ist T eine Translation.*

Beweis: Da $\bar{H} = H$ ist, folgt aus (8.5'):

$$\iint(\bar{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n})^2(d\bar{A}+dA) = 0,$$

und da der Integrand nicht negativ ist, muß

$$\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$$

sein. Bei der Parallelabbildung T sind also in entsprechenden Punkten die Normalen parallel. Somit ist

$$(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\,\mathfrak{n} = 0 = \mathfrak{w}_i\mathfrak{n} = w_i(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}).$$

In der Umgebung eines Punktes mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$ ist daher $w_i = 0$. Dasselbe gilt aber auch für die Umgebung eines Punktes der Schattengrenze, da die Punkte mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ nach Voraussetzung nirgends dicht liegen. Da also die partiellen Ableitungen von w nach lokalen Flächenparametern überall verschwinden, muß w konstant sein, q.e.d.

Die Voraussetzung beim Satz $\mathrm{I_{II}}$, daß die Schattengrenzen der Flächen keine inneren Punkte enthalten, kann offenbar in folgender Weise abgeschwächt werden: *S_0 sei die Menge der inneren Punkte der Schattengrenze von F. Falls dann $F - S_0$ zusammenhängend ist, so gibt es eine Translation, welche F in $\bar{F}$ überführt.*

Entsprechend zum Symmetriesatz II gilt nun folgender Satz:

Satz II_H. *Die geschlossene zweimal stetig differenzierbare Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ im weiteren Sinne* [Bedingung (a_0), § 2 [18])]. *Für jedes Punktepaar $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$, das von einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ aus F geschnitten wird, habe die mittlere Krümmung H in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ den gleichen Wert. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Beweis: Wie beim Beweis des Satzes II sei $\overline{F} = S(F)$ die an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene gespiegelte Fläche und T die induzierte Parallelabbildung von F auf $\overline{F}$. Weiter sei C die Menge derjenigen Punkte von F, die entweder zur Schattengrenze von F oder zum Urbild der Schattengrenze von $\overline{F}$ gehören. Wegen (a_0) besteht C aus endlich vielen rektifizierbaren Kurven und aus isolierten Punkten. Die Abbildung T ist regulär in $F - C$. Daher gilt die Gleichung (8.5) für jeden Teil von $F - C$, der etwa von stückweise glatten Kurven berandet wird. Da T überall stetig ist, sind $\overline{\mathfrak{n}}$ und $\overline{\mathfrak{x}}$ stetige Funktionen auf ganz F. Somit ist der Integrand auf der rechten Seite von (8.5) stetig. Da sich C durch in $F - C$ verlaufende Kurven endlicher Länge gleichmäßig approximieren läßt, folgt aus (8.5) durch Grenzübergang die Gleichung (8.5'), wo jetzt über ganz F zu integrieren ist. Auf Grund der Voraussetzung über H schließt man nun weiter wie beim Satz I_H, daß w in jeder Gebietskomponente von $F - C$ konstant ist; diese (endlich vielen) Konstanten haben aber wegen der Stetigkeit von w den gleichen Wert. Da sich also F und $S(F)$ nur durch eine Translation unterscheiden, ist F symmetrisch.

Außer für die mittlere Krümmung H läßt sich auch noch für die Gaußsche Krümmung K eine Integralformel finden. Dazu gehen wir von zwei Flächen F und $\overline{F}$ mit (2.11) aus, von denen wir annehmen, daß sie sich gemäß (2.14) durch eine Schar regulärer Flächen F_t verbinden lassen, d. h. wir setzen voraus, daß (2.13) gilt. Wir bilden die lineare Differentialform $(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\,\mathfrak{n})$, wobei der Strich Ableitung nach t bedeutet und alle Größen für ein bestimmtes t zu nehmen sind. Durch zeilenweise Differentiation findet man:

$$d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) = (\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) - (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}), \tag{8.6}$$

wobei wegen $d\,d\mathfrak{n} = 0$ nur zwei Glieder auftreten. Nun ist nach (8.3)

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{n})' = (K\,\mathfrak{w}\mathfrak{n}\;dA)',$$

und da $(\mathfrak{w}\;\mathfrak{n})\;dA$ nach (2.12) unabhängig von t ist:

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t)) = K(t)'(\mathfrak{w}\;\mathfrak{n})\;dA. \tag{8.7}$$

Weiter ist nach der Variationsformel (4.3) und nach (1.7):

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}) &= g^{ij}(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\,l^r_s\,(\mathfrak{w}_k, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_r)\,du^k \wedge du^s \\ &= g^{ij}\varepsilon_{jr}\,l^r_s\,\varepsilon^{ks}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{n})\,(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\,dA, \end{aligned}$$

[18]) Ähnliche Einschränkungen sind auch in [8] beim Satz I anzubringen. Man beachte, daß bei Flächen mit konstantem H, da diese analytisch sind, die Bedingung (a_0) erfüllt ist, wenn man nur Konvexität in der betreffenden Richtung voraussetzt.

wobei noch (1.2) und (1.5) benutzt wurde. Nach (1.16) und (1.15) ist $g^{ij}\varepsilon_{jr} = \varepsilon^{ij} g_{jr}$, also $g^{ij}\varepsilon_{jr} l^r_s \varepsilon^{ks} = \varepsilon^{ij}\varepsilon^{ks} l_{js} = c^{ik}$, und damit wird

$$-(\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t))^2 c^{ik}(t)\, w_i\, w_k\, dA(t).$$

Verwendet man rechts noch (2.12) bzw. (5.3), so ist also

$$-(\mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t)) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 g^{\frac{1}{2}} g(t)^{-\frac{1}{2}} c^{ik}(t)\, w_i w_k dA. \tag{8.8}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}} c^{ik}(t)\, dt = C^{ik}. \tag{8.9}$$

Führt man nun (8.7) und (8.8) in (8.6) ein und integriert über t von 0 bis 1, so folgt

$$(\bar{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k dA = d \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t))\, dt. \tag{8.10}$$

Hier wurde noch Integration nach t und Differentiation nach u^i vertauscht. Nach dem Satz von Stokes findet man schließlich

$$\iint (\bar{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \iint (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k\, dA = \oint \int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t))\, dt, \tag{8.11}$$

wo wieder über F bzw. den Rand von F zu integrieren ist. Für geschlossene Flächen hat man demnach

$$\iint (\bar{K} - K)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \iint (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k\, dA = 0. \tag{8.11'}$$

Damit lassen sich nun folgende Sätze beweisen:

Satz $\mathrm{I_K}$. *F und $\bar{F}$ seien dreimal stetig differenzierbare gleichartig orientierte Eiflächen, die durch eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\bar{\mathfrak{p}} = T\mathfrak{p}$ aufeinander bezogen sind. In entsprechenden Punkten $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ sei $K = \bar{K}$. Dann ist T eine Translation.*

Satz $\mathrm{II_K}$. *F sei eine dreimal stetig differenzierbare Eifläche. Die Gaußsche Krümmung K von F stimme in je zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, die auf einer Parallelen zu $\mathfrak{e}$ liegen, überein. Dann besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$.*

Beweis des Satzes $\mathrm{I_K}$: Nach Lemma 1 (§ 2) ist T regulär und zweimal stetig differenzierbar, mit Ausnahme der Schattengrenze sogar dreimal stetig differenzierbar. Da außerdem auf Grund der Orientierung niemals $\bar{\mathfrak{n}} = -\mathfrak{n}$ ist, sind die Flächen F_t in (2.14) regulär für alle t. Daher kann man (8.11) auf die beiden Gebiete anwenden, in die F von der Schattengrenze zerlegt wird. (Die Schattengrenze ist eine glatte Kurve, und der Integrand des Randintegrals ist definiert.) Es gilt daher (8.11'). Wir zeigen nun noch, daß die quadratische Form $C^{ik} x_i x_k$ positiv definit ist. Dann folgt aus (8.11') wegen $\bar{K} = K$:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 C^{ik} w_i w_k = 0,$$

also $w_i = 0$ für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} \neq 0$, somit $w = \text{const}$.

Wegen (8.9) genügt es nun, wenn man zeigt, daß $c^{ik}(t)\, x_i x_k$ für alle t ($0 \leq \leq t \leq 1$) positiv definit ist, und dies ist gleichbedeutend mit der Definitheit der Form $l_{ij}(t)\, y^i y^j$. Da $\sqrt{g}\, l_{ij} = (\mathfrak{x}_{u^i u^j}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ nach Einsetzen von (2.14) eine lineare Funktion von t wird, so ist

$$\sqrt{g(t)} \cdot l_{ij}(t) = (1-t)\sqrt{g}\, l_{ij} + t\sqrt{\bar g}\, \bar l_{ij}\,. \tag{8.12}$$

Da zu l_{ij} und $\bar l_{ij}$ gleichartig definite quadratische Formen gehören, liest man aus (8.12) ab: wenn F und $\bar F$ Eiflächen sind, so ist F_t eine Schar regulärer Eiflächen, q.e.d.

Der Satz II_K ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze I_K.

§ 9. Integralformeln und Kongruenzsätze für n-dimensionale Flächen

Die gleiche Methode, die im § 8 zu Sätzen für H und K, also für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen geführt hat, läßt sich auch auf n-dimensionale Flächen im R_{n+1} mit beliebigem $n \geq 2$ anwenden[19]).

Analog zu (8.1) werde jetzt das vektorielle Produkt von n vektoriellen Differentialformen definiert; es ändert sich nicht bei Vertauschung zweier Faktoren. Weiter lassen sich $(n+1)$-reihige Determinanten bilden, bei denen $n-1$ oder n Zeilen vektorielle Differentialformen, die übrigen Zeilen gewöhnliche Vektoren sind.

Den Formeln (8.3) entspricht jetzt

$$\underbrace{d\mathfrak{n} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{n}}_{\nu} \hat{\times} \underbrace{d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x}}_{n-\nu} = (-1)^\nu n!\, H_\nu \mathfrak{n}\, dA, \qquad 0 \leq \nu \leq n. \tag{9.1}$$

Wir beginnen mit der Herleitung einer Integralformel. $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}$ seien n-dimensionale Flächen, die durch eine reguläre Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{e}$ aufeinander bezogen sind. Zunächst folgt durch zeilenweise Differentiation unter Beachtung von $dd = 0$:

$$\begin{aligned} &d(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &\qquad = (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) - (\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Setzt man $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{w}$ in das Vektorprodukt $d\bar{\mathfrak{x}} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\bar{\mathfrak{x}}$ ein und multipliziert aus, so erhält man Null, sobald zwei Faktoren $d\mathfrak{w} = dw\,\mathfrak{e}$ auftreten. Also ist

$$d\bar{\mathfrak{x}} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\bar{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x} = n(d\mathfrak{w} \hat{\times} d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x})$$

oder wegen (9.1) für $\nu = 0$:

$$d\mathfrak{w} \hat{\times} d\mathfrak{x} \hat{\times} \ldots \hat{\times} d\mathfrak{x} = (n-1)!\,(\bar{\mathfrak{n}}\, d\bar A - \mathfrak{n}\, dA).$$

Da $(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})(\bar{\mathfrak{n}}\, d\bar A - \mathfrak{n}\, dA) = (1 - \bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})(d\bar A + dA)$ ist, wird das erste Glied auf der rechten Seite von (9.2):

$$(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = (n-1)!\,(1 - \bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})(d\bar A + dA). \tag{9.3}$$

[19]) Für $n = 1$, also für Kurven in der Ebene, vgl. [8], Abschnitt 5.

Beim zweiten Glied ist nach (9.1):

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = -n!\, H_1(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA,$$

$$(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, d\bar{\mathfrak{x}}) = -n!\, \bar{H}_1(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A},$$

und da $(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, d\bar{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar{A} = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA$ ist, folgt

$$(9.4) \qquad -(\mathfrak{w}, d\bar{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = n!\, (\bar{H}_1 - H_1)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA.$$

Mit (9.3) und (9.4) geht (9.2) über in

$$(9.5) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{(n-1)!}\, d\,(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &\qquad = n(\bar{H}_1 - H_1)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \tfrac{1}{2}\,(\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2 (d\bar{A} + dA). \end{aligned}$$

Für $n = 2$ ist dies die Formel (8.4), die noch zu beweisen war. Aus (9.5) folgt nun durch Integration:

$$(9.6) \qquad \begin{aligned} &n\int\limits_F (\bar{H}_1 - H_1)(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + \frac{1}{2}\int\limits_F (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})^2\, (d\bar{A} + dA) \\ &\qquad = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\partial F} (\bar{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

wo ∂F den Rand von F bezeichnet.

Damit sind wir in der Lage, den Satz I_{H} (§ 8) auf n-dimensionale Flächen zu verallgemeinern:

Satz V. *F und $\bar{F}$ seien n-dimensionale geschlossene orientierte zweimal stetig differenzierbare Flächen, zwischen denen eine Parallelabbildung in der Richtung $\mathfrak{c}$ besteht, die regulär und zweimal stetig differenzierbar ist und die Orientierung erhält. Außerdem enthalte die Schattengrenze von F in der Richtung $\mathfrak{c}$ keine inneren Punkte. Falls dann die Summe der Hauptkrümmungen in entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ den gleichen Wert hat, so unterscheiden sich F und $\bar{F}$ nur durch eine Translation.*

Der Beweis verläuft genau so, wie beim Satz I_{H}: Da in (9.6) das Randintegral rechts verschwindet und da $\bar{H}_1 = H_1$ ist, folgt $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ und damit $(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\,\mathfrak{n} = w_i(\mathfrak{c}\,\mathfrak{n}) = 0$, also $w = \text{const}$.

Eine analoge Überlegung, wie sie im § 8 beim Beweis des Satzes II_{H} angestellt wurde, liefert jetzt dessen Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen:

Satz V'. *Die n-dimensionale zweimal stetig differenzierbare geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{c}$ (im weiteren Sinne). Die Summe der Hauptkrümmungen habe in je zwei Punkten, die auf einer zu $\mathfrak{c}$ parallelen Geraden liegen, den gleichen Wert. Dann ist F symmetrisch bezüglich einer n-dimensionalen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$.*

Der Satz I_{K} läßt sich ebenfalls auf n-dimensionale Flächen verallgemeinern. Man erhalte Sätze für die Krümmungsfunktionen H_ν, $2 \leqq \nu \leqq n$, wobei wir

uns wieder auf Eiflächen beschränken, d. h. auf geschlossene Flächen mit definiter zweiter Fundamentalform. Der Fall $\nu = 1$ (Satz V) wird dabei nochmals mitbewiesen werden.

Wir berechnen zunächst wieder Integralformeln für zwei Flächen F und $\bar{F}$, die sich durch eine lineare Schar regulärer Flächen

$$F_t\colon\ \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

verbinden lassen, wobei $F_0 = F$ und $F_1 = \bar{F}$ ist. Nach (9.1) ist für jedes ν $(1 \leq \nu \leq n)$:

$$(-1)^\nu n!\, H_\nu(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = (\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}),$$

wobei alle Größen für ein gewisses t genommen seien. Differenziert man diese Gleichung nach t und beachtet erstens, daß $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA$ unabhängig von t ist, und zweitens, daß $d\mathfrak{x}' = d\mathfrak{w}$ parallel zu $\mathfrak{e}$ ist, so folgt

$$(9.7)\qquad (-1)^\nu n!\, H_\nu'(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = \nu(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Die rechte Seite von (9.7) läßt sich umformen:

$$(9.8)\qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &= (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}', d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) \\ &= (-1)^{\nu-1} g^{ij}(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\, l_{s_1}^{r_1} \cdot \ldots \cdot l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}} (\mathfrak{w}_k, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_{r_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{r_{\nu-1}}, \mathfrak{x}_{r_\nu}, \ldots, \mathfrak{x}_{r_{n-1}}) \cdot \\ &\qquad \cdot du^k \wedge du^{s_1} \wedge \ldots \wedge du^{s_{\nu-1}} \wedge du^{r_\nu} \wedge \ldots \wedge du^{r_{n-1}}, \end{aligned}$$

und wegen (1.2) und (1.5) ist dieser Ausdruck gleich

$$(-1)^{\nu-1} g^{ij}\, \varepsilon_{j r_1 \ldots r_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, \varepsilon^{k s_1 \ldots s_{\nu-1} r_\nu \ldots r_{n-1}}\, l_{s_1}^{r_1} \cdot \ldots \cdot l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}} (\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\, dA,$$

also ist nach (1.14)

$$(9.9)\quad (\mathfrak{n}', d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) = (-1)^{\nu-1}(n-1)!\, c_{(\nu)}^{ik}\, w_i\, w_k\, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2\, dA.$$

Mit (9.8) und (9.9) geht (9.7) über in

$$(9.10)\quad \begin{aligned} (-1)^\nu n!\, H_\nu(t)'(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA &= \nu(-1)^{\nu-1}(n-1)!\, g^{\frac{1}{2}}\, g(t)^{-\frac{1}{2}}\, c_{(\nu)}^{ik}(t)\, w_i\, w_k (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 dA + \\ &+ \nu\, d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

wo jetzt noch die Abhängigkeit von t angegeben ist. (Für $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}(t)$ wurde die Formel (5.3) benutzt, die für n-dimensionale Flächen gilt.) Setzt man

$$C_{(\nu)}^{ik} = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t)^{-\frac{1}{2}}\, c_{(\nu)}^{ik}(t)\, dt,$$

so folgt, wenn man (9.10) nach t integriert:

$$
\begin{aligned}
&n(\overline{H}_\nu - H_\nu)\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \nu(\mathfrak{c}\,\mathfrak{n})^2\,C^{ik}_{(\nu)}\,w_i\,w_k\,dA \\
(9.11)\qquad &= \frac{\nu(-1)^\nu}{(n-1)!}\,d\int_0^1 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})\,dt.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln gelten für $1 \leqq \nu \leqq n$. Für $\nu = 1$ ergibt sich nochmals die Formel (9.5), wenn man die Integration nach t ausführt (für $\nu = 1$ sind beide Glieder auf der rechten Seite von (9.8) Ableitungen nach t). Im Spezialfall $\nu = n = 2$ geht (9.11) in die Formel (8.10) über. Nun wird behauptet:

Satz VI. *Die n-dimensionalen Eiflächen F und $\overline{F}$ seien dreimal stetig differenzierbar und gleichartig orientiert* (etwa so, daß die zweiten Fundamentalformen positiv definit sind). *Zwischen F und $\overline{F}$ bestehe eine die Orientierung erhaltende Parallelabbildung $\overline{p} = Tp$. Falls dann eine der Krümmungsfunktionen $H_\nu (1 \leqq \nu \leqq n)$ in entsprechenden Punkten p und $\overline{p}$ von F und $\overline{F}$ den gleichen Wert hat, so ist T eine Translation.*

Beweis: Bildet man $\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{w}$, so wird die Determinante $(\mathfrak{x}_{u^i u^j}(t), \mathfrak{x}_1(t), \ldots, \mathfrak{x}_n(t))$ linear in t; daher gilt die Formel (8.12) auch für beliebigdimensionale Flächen. Daraus folgt erstens, daß $g(t)$ für alle t von Null verschieden ist, und zweitens, daß $l_{ij}(t)\,x^i x^j$ positiv definit ist, d. h. F_t ist eine Schar regulärer Eiflächen. Nach (1.13) ist dann auch $c^{ik}_{(\nu)}(t)\,x_i x_k$ positiv definit für alle t und somit $C^{ik}_{(\nu)}\,x_i x_k$ positiv definit. Integriert man nun (9.11) über F und wendet den Satz von Stokes an, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{\nu}\int_F (\overline{H}_\nu - H_\nu)\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\,dA + \int_F (\mathfrak{c}\,\mathfrak{n})^2\,C^{ik}_{(\nu)}\,w_i\,w_k\,dA \\
(9.12)\qquad &= \frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\int_{\partial F}\int_0 (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}(t)', \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \ldots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})\,dt.
\end{aligned}
$$

Da $\overline{H}_\nu = H_\nu$ ist und da das Randintegral (analog wie beim Beweis des Satzes I_K, § 8) verschwindet, ist also $w_i = 0$ und $w = \mathrm{const}$, q.e.d.

Die Voraussetzung beim Satz VI, daß F und $\overline{F}$ Eiflächen sind, wurde benötigt, um die Definitheit der Formen $c^{ik}_{(\nu)}\,x_i x_k$ sicherzustellen. Für $\nu = 1$ ist $c^{ik}_{(1)} = g^{ik}$, also ist die Definitheitsbedingung sogar für beliebige Flächen erfüllt: dementsprechend beziehen sich die Sätze V und V′ auf beliebige geschlossene Flächen (allerdings unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Regularität der Abbildung bzw. die Konvexität der Fläche in einer Richtung). Für $\nu = n$ ist die Definitheit von $c^{ik}\,x_i x_k = \Sigma g^{-1}\,l^*_{ik}\,x_i x_k$ gleichbedeutend mit der Definitheit der zweiten Fundamentalform; $c^{ik}\,x_i x_k$ ist also nur auf Eiflächen definit.

Dagegen gibt es für $2 \leqq \nu \leqq n - 1$ (falls $n \geqq 3$) auch nicht-konvexe geschlossene Flächen, auf denen $c^{ik}_{(\nu)}\,x_i x_k$ überall definit ist; z. B. lassen sich Flächen vom topologischen Typus $S_1 \times S_{n-1}$ mit dieser Eigenschaft konstruieren: man geht von einer geschlossenen Kurve aus und trägt in jedem Punkt

in der n-dimensionalen Ebene senkrecht zur Tangente eine Sphäre S_{n-1} von konstantem Radius r ab. Auf der entstehenden Fläche sind $n-1$ Hauptkrümmungen konstant gleich $1/r$, während die n-te Hauptkrümmung, wie man ausrechnen kann, $\geqq -k/1 - r\,k$ ist, wo k die Krümmung der Kurve bedeutet. Bei genügend kleinem r wird $\frac{\partial H_\nu}{\partial k_i} > 0$ für $2 \leqq \nu \leqq n-1$, und dies ist nach (1.13) gleichbedeutend mit der gewünschten Definitheit.

Für $2 \leqq \nu \leqq n-1$ gilt der Satz VI also auch für gewisse nicht-konvexe Flächen, wobei allerdings die Definitheitsbedingung nicht nur für F und $\bar{F}$, sondern für alle Flächen F_t benötigt wird.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz VI ist:

Satz VI′. *Die dreimal stetig differenzierbare Eifläche F habe die Eigenschaft, daß eine Krümmungsfunktion H_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ in je zwei Punkten, die auf einer zu $\mathfrak{c}$ parallelen Geraden liegen, den gleichen Wert hat. Dann gibt es eine Spiegelung an einer n-dimensionalen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$, welche F in sich überführt.*

Aus diesem Satze ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes von *W*. Süss [9], daß die Sphären die einzigen Eiflächen mit konstantem H_ν sind. Bei einer solchen Fläche sind nämlich die Voraussetzungen des Satzes VI′ in jeder Richtung $\mathfrak{c}$ erfüllt. Daher ist F in jeder Richtung symmetrisch, muß also eine Sphäre sein.

Multipliziert man die Integralformeln (9.12) mit positiven Konstanten a_ν und summiert, so erhält man eine Integralformel, aus welcher der Translations- und der Symmetriesatz (etwa für Eiflächen) im Falle der Funktion $U = \Sigma\, a_\nu H_\nu$ folgt. Insbesondere gilt:

Satz VII. *Die einzigen (dreimal stetig differenzierbaren) n-dimensionalen Eiflächen mit konstantem*

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu H_\nu, \qquad a_\nu > 0,$$

sind die n-dimensionalen Sphären.

Allgemeiner kann man Funktionen $W(k_1, \ldots, k_n)$ betrachten, die in allen n Variablen symmetrisch und *gleichsinnig monoton* sind, genauer gesagt, bei denen etwa $W_{k_i} > 0$ für positive k_i ist (W sei n-mal differenzierbar). Beschränkt man sich auf analytische Flächen, so lassen sich die Methoden des § 5 anwenden[20]; man erhält z. B. folgenden Satz:

Satz VIII. *Die Sphäre ist die einzige analytische n-dimensionale Eifläche, auf der eine Funktion $W(k_1, \ldots, k_n)$ der obigen Art konstant ist.*

Wir untersuchen zum Schluß noch, ob man die hier verwendete Methode der Integralformeln außer auf die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen auch auf allgemeinere Funktionen anwenden kann. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$.

[20]) In der Formel (5.2) hat man a^{ij} durch $1/n\, \Sigma\, \nu\, U_{H_\nu} e^{ij}_{(\nu)}$ zu ersetzen.

Die Voraussetzung $\overline{U} = U$ beim Translationssatz I hat gemäß § 5 die lineare Differentialgleichung (D) für die Funktion w zur Folge. Das zugehörige *infinitesimale* Problem liefert den Differentialausdruck

$$L(w) = (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\,a^{ij} w_{u^i u^j} + \{-(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\,a^{ij}\,\Gamma^k_{ij} + 2\,a^{ik}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_i)\}\,w_k = U(H,K)',$$

der unter dem Integral (5.2) auftritt, wobei

$$a^{ij} = \tfrac{1}{2}\,U_H\,g^{ij} + U_K\,c^{ij}$$

ist. Wir führen ein skalares Produkt zweier Funktionen v und w auf F ein durch

$$(v, w) = \int_F v\,w(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\,dA = \int_F v\,w\,dx\,dy\,. \tag{9.13}$$

Dann sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen in folgender Weise gegenüber anderen Funktionen ausgezeichnet:

Der Differentialausdruck $L(w)$ ist dann und nur dann selbstadjungiert für alle Flächen F bezüglich des Skalarproduktes (9.13), *wenn U_H und U_K konstant, also $U = a\,H + b\,K$ ist.*

Die Tatsache, daß $L(w)$ für $U = H$ bzw. K selbstadjungiert ist, folgt aus der Formel (9.10), genauer gesagt: aus der Formel, die entsteht, wenn man bei der Herleitung von (9.10) den Vektor $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}$ ersetzt, wo v eine zweite Funktion ist. Daß $U = a\,H + b\,K$ die einzige Krümmungsfunktion ist, für welche dies bei allen Flächen F eintritt, kann durch eine Rechnung eingesehen werden, die wir hier nicht durchführen.

Im § 5 wurden die Fälle, in denen die Differentialgleichung (D) nicht selbstadjungiert ist, durch Übergang zur selbstadjungierten Gleichung (D_0) behandelt.

§ 10. Verhalten der Krümmungsintegrale bei Steinerscher Symmetrisierung

Die Integrale in § 8 und § 9 können geometrisch gedeutet werden. Dazu führen wir das *ν-te Krümmungsintegral* einer n-dimensionalen Fläche ein durch

$$C_\nu = \int_F H_\nu\,dA, \qquad 0 \leqq \nu \leqq n.$$

$C_0 = A$ ist der Flächeninhalt von F und C_n der Inhalt des sphärischen Bildes.

Bei einer Variation (4.1) von F mit beliebigem Variationsvektor $\mathfrak{w}$ wird C_ν eine Funktion von t. Zunächst berechnen wir C'_ν: Nach (9.1) ist

$$(-1)^\nu n!\,H_\nu dA = (\mathfrak{n}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}), \tag{10.1}$$

also unter Beachtung von $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$:

$$\begin{aligned}(-1)^\nu n!\,(H_\nu dA)' = {} & \nu(\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + \\ & + (n-\nu)\,(\mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).\end{aligned} \tag{10.2}$$

Zur Abkürzung führen wir Differentialformen φ_ν und ψ_ν vom Grade $n-1$ ein durch

$$(-1)^\nu n!\ \varphi_\nu = \nu(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$$

$$(-1)^\nu n!\ \psi_\nu = (n-\nu)\,(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Wegen $\mathfrak{n}'\mathfrak{n} = 0$ wird

$$(-1)^\nu n!\ d\varphi_\nu = \nu(\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}', d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x});$$

außerdem

$$(-1)^\nu n!\ d\psi_\nu = (n-\nu)\,(\mathfrak{n}, d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x})$$

$$-(n-\nu)\,(\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu+1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}).$$

Also kann man für (10.2) schreiben:

$$(10.3)\quad (-1)^\nu n!\,(H_\nu dA)' = (n-\nu)\,(\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu+1}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) + (-1)^\nu n!\, d(\varphi_\nu + \psi_\nu),$$

oder nach (9.1):

$$(10.3')\qquad (H_\nu dA)' = -(n-\nu)\, H_{\nu+1}(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA + d(\varphi_\nu + \psi_\nu).$$

Für eine geschlossene Fläche folgt daraus:

$$(10.4)\qquad C_\nu' = -(n-\nu) \int_F H_{\nu+1}(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA.$$

Für $\nu = 0$, d. h. für die Variation der Oberfläche, ist diese Formel bekannt; für $\nu = n$ ist C_n' gleich dem Randintegral von φ_n, das nur von $\mathfrak{n}$ abhängt.

Von jetzt an sei $0 \leq \nu \leq n-1$. Außerdem beschränken wir uns auf *Parallelvariationen*, d. h. auf Variationen in konstanter Richtung $\mathfrak{e}$:

$$\mathfrak{w} = w\,\mathfrak{e}.$$

Differenziert man (10.3) nach t und beachtet, daß jetzt $d\mathfrak{x}' = d\mathfrak{w}$ parallel zu $\mathfrak{w}$ ist, so folgt

$$(10.5)\quad \begin{aligned}(-1)^\nu n!\,(H_\nu dA)'' &= (n-\nu)\,(\nu+1)\,(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}', \underbrace{d\mathfrak{n}, \ldots, d\mathfrak{n}}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \ldots, d\mathfrak{x}) +\\ &+ (-1)^\nu n!\, d(\varphi_\nu' + \psi_\nu').\end{aligned}$$

In (10.5) kann man die rechte Seite nach (9.8) umformen und (9.9) (für $\nu + 1$) einsetzen; dann erhält man

$$(10.6)\qquad n\,(H_\nu dA)'' = (n-\nu)\,(\nu+1)\, c^{ik}_{(\nu+1)}\,(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{n})\,(\mathfrak{w}_k\,\mathfrak{n})\, dA + d\,\omega_\nu,$$

wobei die ω_ν gewisse Formen vom Grade $n-1$ sind. Aus (10.6) ergibt sich nun:

Bei Parallelvariation einer geschlossenen Fläche ist

$$C_\nu'' = \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{n} \int_F c_{(\nu+1)}^{ik}\, w_i\, w_k\, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})^2 dA . \tag{10.7}$$

Eine Fläche mit $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ nennen wir einen *Zylinder*. Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = 0$ gleichbedeutend damit, daß F von einer $(n-1)$-parametrigen Schar zu $\mathfrak{e}$ paralleler Geraden gebildet wird. Bei Parallelvariation in dieser Richtung wird F also in sich transformiert. Schließt man diese Möglichkeit aus, so folgt aus (10.7):

Satz IX. *F sei eine n-dimensionale (dreimal stetig differenzierbare) geschlossene Fläche, welche keine Zylinderstücke enthält und bei der die quadratische Form $c_{(\nu+1)}^{ik} x_i x_k$ für ein gewisses ν $(0 \leq \nu \leq n-1)$ überall positiv definit ist. Dann ist bei jeder linearen Parallelvariation von F*

$$C_\nu'' \geq 0,$$

und das Gleichheitszeichen steht nur, wenn die Variation eine Translation ist.

Die folgenden Spezialfälle des Satzes IX seien besonders hervorgehoben:

1. Für $\nu = 0$ wird $c_{(1)}^{ik} = g^{ik}$, also folgt: *Bei Parallelvariation einer beliebigen Fläche ist $A'' \geq 0$.* Darüber hinaus ist in (10.6) die Form $\omega_0 = 0$, wie man bei direkter Herleitung aus (10.1) für $\nu = 0$ sieht. Daher gilt sogar $dA'' \geq 0$. (Dabei genügt es, wenn die Flächen einmal stetig differenzierbar sind.)

2. *Bei jeder nichttrivialen Parallelvariation einer Eifläche ist $C_\nu'' > 0$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$.*

Es gibt aber auch nicht-konvexe Flächen, bei denen die ersten $n-1$ Krümmungsintegrale C_ν $(\nu = 0, \ldots, n-2)$ bei jeder (hinreichend kleinen) Parallelvariation konvexe Funktionen des Variationsparameters sind, z. B. die im § 9 konstruierten n-dimensionalen Röhrenflächen.

Der im § 9 gegebene Beweis des Translationssatzes V bzw. VI läßt sich nun folgendermaßen beschreiben: Bei der linearen Parallelvariation, welche F in $\bar F$ überführt, ist in (10.4) nach Voraussetzung $H_{\nu+1} = \bar H_{\nu+1}$ $(0 \leq \nu \leq n-1)$ und $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{n})\, dA = (\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{n}})\, d\bar A$, also

$$C_\nu'(0) = C_\nu'(1). \tag{10.8}$$

Die konvexe Funktion $C_\nu(t)$ ist daher linear, also ist die Variation eine Translation.

Ist speziell F eine in der Richtung $\mathfrak{e}$ konvexe Fläche und $\bar F$ das Spiegelbild von F an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene E, so ergibt der betrachtete Variationsprozeß für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ die *kontinuierliche Steinersche Symmetrisierung* an E[21]): Für $t = \frac{1}{2}$ ist F_t die symmetrisierte Fläche, während die Flächen F_t und F_{1-t} spiegelbildlich (aber gleichartig orientiert) sind. Wegen $C_\nu(t) = C_\nu(1-t)$ ist

$$C_\nu'(1) = -C_\nu'(0), \tag{10.9}$$

[21]) Vgl. W. Blaschke [6], S. 250. — Pólya und Szegö [10], S. 200. An beiden Stellen wird der Fall $\nu = 0$ des untenstehenden Satzes X bewiesen.

also

$$C'_\nu(1) - C'_\nu(0) = -2\,C'_\nu(0) = \int_0^1 C''_\nu(t)\,dt.$$

Auf Grund des Satzes IX folgt daraus:

Satz X. *Die geschlossene Fläche F sei konvex in der Richtung $\mathfrak{e}$ (im engeren Sinne) und erfülle die Voraussetzungen des Satzes IX. Dann nimmt C_ν bei kontinuierlicher Steinerscher Symmetrisierung monoton ab:*

$$C'_\nu < 0,$$

außer wenn F bereits symmetrisch ist.

Darin ist enthalten: *Bei Symmetrisierung einer Eifläche nehmen alle $C_\nu (\nu = 0, \ldots, n-1)$ monoton ab.*

Beim Satz X wurde angenommen, daß die Flächen dreimal stetig differenzierbar und konvex im engeren Sinne sind, insbesondere also in der Richtung $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft (a), § 2, haben. Bezieht man die gespiegelte Fläche $\bar{F}$ und damit die ganze Flächenschar F_t auf die Parameter von F, so folgt also aus Lemma 1 (§ 2) bzw. dessen n-dimensionaler Verallgemeinerung, daß bei kontinuierlicher Symmetrisierung die variierten Flächen zweimal stetig differenzierbar sind. (Für die Oberfläche genügt einmalige Differenzierbarkeit, also zweimalige Differenzierbarkeit der Ausgangsfläche.)

Der Symmetriesatz V′ bzw. VI′ ergibt sich nun so: nach der Voraussetzung über $H_{\nu+1}$ gilt (10.8); zusammen mit (10.9) folgt $C'_\nu(0) = 0$, also ist F symmetrisch.

§ 11. Randwertsätze für berandete Flächen

Die bisherigen Sätze beziehen sich auf geschlossene Flächen. Man kann mit den gleichen Methoden Sätze über berandete Flächen gewinnen, wenn man diesen geeignete Randbedingungen auferlegt. Wir führen dies für die Resultate des § 9 durch.

Wir betrachten also zwei im Endlichen liegende, von endlich vielen geschlossenen Mannigfaltigkeiten berandete Flächen F und $\bar{F}$, die durch eine Parallelabbildung aufeinander bezogen sind und im übrigen die Voraussetzungen des Satzes V erfüllen. Insbesondere hat also H_1 in Punkt und Bildpunkt den gleichen Wert. Dann gelten die Sätze

Satz Va. *Falls am Rande $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$ ist, so ist überall $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$, die Flächen sind also identisch.*

Satz Vb. *Falls am Rande $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ ist, so unterscheiden sich die Flächen nur durch eine Translation.*

In beiden Fällen verschwindet nämlich auf Grund der Randbedingungen das Randintegral in (9.6), so daß der Beweis wie beim Satz V geführt werden kann.

Für die Krümmungsgrößen H_ν $(2 \leq \nu \leq n)$ erhält man analoge Sätze, wenn man etwa Flächen mit definiter zweiter Fundamentalform betrachtet, welche im übrigen den im Satz VI gestellten Forderungen genügen sollen. Ins-

besondere soll in entsprechenden Punkten von F und $\bar{F}$ also $H_\nu = \bar{H}_\nu$ sein. Dann folgt:

Satz VIa. *Falls die Flächen am Rande übereinstimmen, so sind sie überall identisch.*

Satz VIb. *Falls die Flächen am Rande das gleiche sphärische Bild haben, so sind sie kongruent.*

Zum Beweis hat man die Integralformel (9.12) zu betrachten: Im ersten Falle ist am Rande $\mathfrak{w} = 0$; im Falle b ist dort $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$, also gilt am Rande $(\bar{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i)\,\mathfrak{n} = \mathfrak{w}_i \mathfrak{n} = 0$ und daher nach (4.3) und (5.3) $\mathfrak{n}(t)' = 0$ für alle Flächen F_t; in beiden Fällen verschwindet demnach das Randintegral in (9.12), und daher muß w konstant (im Falle a sogar gleich Null) sein.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $n = 2$ und auf Flächen, die sich in der Form

$$z = f(x, y) \tag{11.1}$$

darstellen lassen. Die soeben formulierten Sätze ergeben dann Aussagen über die Einzigkeit der Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen: Zum Beispiel sagt der Satz Va aus, daß die bekannte Differentialgleichung „*H = gegebene Funktion von x, y*" *höchstens eine Lösung* $f(x, y)$ besitzt, *welche vorgeschriebene Randwerte annimmt.* Da die genannte Differentialgleichung für jede Lösung elliptisch ist, folgt dies auch aus bekannten Einzigkeitssätzen (vgl. E. Hopf [13]).

Der Satz VIa besagt, daß die entsprechende Differentialgleichung „*K = gegebene positive Funktion von x, y*" *zu vorgeschriebenen Randwerten höchstens zwei Lösungen* besitzt (nämlich höchstens eine mit gegebenem Vorzeichen der zweiten Fundamentalform, d. h. mit $f_{xx} > 0$ bzw. $f_{xx} < 0$). Diese Aussage ist ein Spezialfall eines Satzes von Rellich [11] über Monge-Ampèresche Differentialgleichungen.

Die beiden genannten Sätze (für H und K) wurden hier mit Hilfe der Integralformeln (8.5) bzw. (8.11) bewiesen. Dabei ergeben sich außer für das erste Randwertproblem auch noch Aussagen über eine andersartige Randwertaufgabe (Fall b). Betrachtet man speziell Flächen, bei denen die *Randkurven Schattengrenzen* sind, wo also am Rande $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ horizontal ist, so läßt sich diese Randbedingung bei Beschränkung auf Flächen (11.1) folgendermaßen ausdrücken:

Die ersten Ableitungen $p = f_x$, $q = f_y$ der Funktion $f(x, y)$ genügen bei Annäherung an die Randkurven C des Gebietes in der x, y-Ebene den Bedingungen

$$p^2 + q^2 \to \infty, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \to \alpha, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \to \beta, \tag{11.2}$$

wobei (α, β) die Kurvennormale von C ist.

§ 12. Ein Unitätssatz für elliptische partielle Differentialgleichungen

Zum Schluß kommen wir nochmals auf die Betrachtungen des § 5 zurück und zeigen, daß die dort verwendete Methode bei Beschränkung auf Flächen (11.1) einen allgemeinen Satz über Differentialgleichungen liefert.

Wir betrachten eine Funktion $\Phi(x, y, p, q, r, s, t)$, die für alle Werte x, y aus einem beschränkten (zusammenhängenden) Gebiet G und für beliebige p, q, r, s, t stetig definiert ist und stetige erste Ableitungen nach p, q, r, s, t besitzt. Den Bereich der 7 Variablen x, y, p, q, r, s, t nennen wir R. Setzt man für p, q und r, s, t die ersten bzw. zweiten Ableitungen einer in G zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u(x, y)$ ein, so ist

$$\Phi(x, y, p, q, r, s, t) = 0$$

eine Differentialgleichung für u. Diese heißt *elliptisch für eine Lösung* u, wenn

$$\Phi_r \Phi_t - (\tfrac{1}{2}\Phi_s)^2 > 0 \tag{12.1}$$

ist, und zwar für alle von $u(x, y)$ induzierten Wertekombinationen x, y, p, q, r, s, t, d. h. für alle Punkte der von $u(x, y)$ erzeugten 2-dimensionalen Fläche in R.

Diejenigen Punkte von R, die der Ungleichung (12.1) genügen, bilden eine offene Menge in R, welche in zwei Teile mit $\Phi_r > 0$ bzw. $\Phi_r < 0$ zerfällt. Wir werden nun gewisse Annahmen über die Form dieser Gebiete machen und den folgenden Einzigkeitssatz beweisen:

Satz XI. *Die Funktion* Φ *sei so beschaffen, daß bei beliebigem festem* x_0, y_0, p_0, q_0 *die beiden durch*

$$\Phi_r \Phi_t - (\tfrac{1}{2}\Phi_s)^2 > 0, \quad \Phi_r > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Phi_r < 0$$

definierten Gebiete des r, s, t*-Raumes stets konvex sind* (wobei auch die leere Menge als konvex angesehen wird). *Dann hat die Differentialgleichung* $\Phi = 0$ *zu gegebenen Randwerten höchstens zwei Lösungen, für welche sie elliptisch ist, und zwar höchstens je eine Lösung mit* $\Phi_r > 0$ *bzw.* $\Phi_r < 0$.

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden:

1. Da es zwei Klassen von elliptischen Lösungen gibt, nämlich solche mit $\Phi_r > 0$ bzw. $\Phi_r < 0$, so genügt es, wenn man zeigt, daß jede Klasse höchstens eine Lösung (mit gegebenen Randwerten) enthält. Falls eines der beiden im Satz XI genannten konvexen Gebiete für alle x, y, p, q leer ist, so kann überdies nur eine Lösung auftreten[22]).

2. Die Funktionen u und $\bar{u}$ seien Lösungen aus derselben Klasse, die auf dem Rande übereinstimmen. Da $w = \bar{u} - u$ am Rande verschwindet, braucht man nur den Fall zu betrachten, wo die Funktion w ihr Maximum oder Minimum im Innern von G annimmt. Wir beweisen: *falls* w *im Punkte* o *ein Extremum hat, so ist* w *konstant in einer Umgebung von* o. Daraus folgt dann, daß $w \equiv c = 0$, also $\bar{u} \equiv u$ ist.

a) In o ist $\bar{p}_0 = p_0$, $\bar{q}_0 = q_0$ und

$$\Phi(x_0, y_0, p_0, q_0, \bar{r}_0, \bar{s}_0, \bar{t}_0) = \Phi(x_0, y_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0).$$

---

[22]) E. Hopf beweist einen Satz von dieser Art: das eine Gebiet ist der ganze r, s, t-Raum, das andere ist leer. Vgl. [13], S. 150, Voraussetzung c) (für die Differenz zweier Lösungen).

Nach dem Mittelwertsatz folgt daraus, daß die zweiten Ableitungen von w im Punkte o einer Gleichung

(12.2) $$\Phi_r^* (w_{xx})_0 + \Phi_s (w_{xy})_0 + \Phi_t^* (w_{yy})_0 = 0$$

genügen, wo die Ableitungen von Φ an einer Stelle r^*, s^*, t^* zwischen r_0, s_0, t_0 und $\bar{r}_0, \bar{s}_0, \bar{t}_0$ zu nehmen sind. Da in den Endpunkten dieser Strecke (12.1) gilt, ist dies wegen der vorausgesetzten Konvexität auch an der Zwischenstelle der Fall, und daher folgt aus (12.2), daß das zweite Differential von w in o entweder indefinit oder $\equiv 0$ ist. Da w in o ein Extremum hat, verschwinden also in o auch die zweiten Ableitungen von w.

b) Nun zeigt man in üblicher Weise, daß w einer linearen elliptischen Differentialgleichung genügt (die Konvexitätsbedingung wird dazu nicht mehr benötigt): Man bildet die Funktionenschar $u_\tau = u + \tau w$ für $0 \leq \tau \leq 1$ und setzt diese in Φ ein. Dann findet man durch eine zu (5.1) analoge Betrachtung für w die Differentialgleichung

(12.3) $$A\, w_{xx} + 2\, B\, w_{xy} + C\, w_{yy} + D\, w_x + E\, w_y = 0,$$

wo A, B, C, D, E stetige Funktionen von x, y sind, die aus Φ_r, $\frac{1}{2}\Phi_s$, Φ_t, Φ_p, Φ_q durch Mittelbildung über τ entstehen. Da die ersten und zweiten Ableitungen von u_τ in o unabhängig von τ sind, gilt (12.1) im Punkte o für alle τ, und daher ist in o auch $A\,C - B^2 > 0$, d. h. die Gleichung (12.3) ist in einer Umgebung von o elliptisch. Dann muß aber w in dieser Umgebung von o konstant sein, denn nach dem Maximumprinzip könnte sonst w in o kein Extremum haben (vgl. [13], S. 147).

Als Spezialfall des Satzes XI erhält man den im § 11 zitierten Satz von Rellich [11], wenn man

$$\Phi = E(rt - s^2) + A\,r + 2\,B\,s + C\,t + D$$

wählt, wo A, B, C, D, E Funktionen von x, y, p, q sind. Bei einer solchen Funktion Φ sind nämlich die Konvexitätsbedingungen des Satzes XI stets erfüllt: Kürzt man die Ableitungen von Φ nach r, s, t für den Moment mit $a, 2b, c$ ab, so ist

(12.4) $$a = E\,t + A, \quad b = -E\,s + B, \quad c = E\,r + A.$$

Die Funktionen A, B, C, D, E sind für feste x, y, p, q konstant. Von den beiden Gebieten

(12.5) $$ac - b^2 > 0, \quad a > 0 \quad \text{bzw.} \quad a < 0$$

ist daher für $E = 0$ das eine leer, das andere entweder leer (falls $A\,C - B^2 \leq 0$) oder der ganze Raum; für $E \neq 0$ stellt (12.5) das Innere eines elliptischen Kegels dar, zerfällt also in zwei konvexe Gebiete. Man sieht dies ein, wenn man im r, s, t-Raum durch die lineare Transformation (12.4) neue Koordinaten a, b, c einführt.

Literatur

[1] H. Hopf: Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen. Math. Nachr. 4, 232—249 (1951). — [2] A. D. Alexandrov: Ein allgemeiner Eindeutigkeitssatz für geschlossene Flächen. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 19, 227—229 (1938).—

Sur les théorèmes d'unicité pour les surfaces fermées. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **22**, 99—102 (1939). — [3] A. V. Pogorelov: Ausdehnung des allgemeinen Eindeutigkeitssatzes von A. D. Alexandrov auf den Fall nicht-analytischer Flächen (russ.). Doklady Akad. Nauk SSSR **62**, 297—299 (1948). — [4] P. Hartman and A. Wintner: On the third fundamental form of a surface (Appendix). Amer. J. Math. **75**, 330—333 (1953). — [5] S. S. Chern: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 270—290 (1945). — [6] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Auflage. Berlin 1945. — [7] H. Hopf: Zur Differentialgeometrie geschlossener Flächen im Euklidischen Raum, Convegno di Geometria Differenziale. 1953 (Roma 1954), 45—54. — [8] H. Hopf u. K. Voss: Ein Satz aus der Flächentheorie im Großen. Arch. d. Math. **3**, 187—192 (1952). — [9] W. Süss: Zur relativen Differentialgeometrie V: Über Eihyperflächen im R^{n+1}. Tôhoku Math. J. **31**, 202—209 (1929). — [10] G. Pólya and G. Szegö: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton 1951. — [11] F. Rellich: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. **107**, 505—513 u. 804 (1933). — [12] A. Deicke: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Arch. d. Math. **4**, 45—51 (1953). — [13] E. Hopf: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1927**, 147—152. — [14] E. Hopf: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1931).

Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen lernte ich die Arbeit von A. D. Alexandrov: Einige Sätze über partielle Differentialgleichungen (russ.), Vestnik Leningradsk. Univ. 1954, Nr. 8, kennen, in der ähnliche Überlegungen wie im obenstehenden § 12 enthalten sind.

(Eingegangen am 10. September 1955)

Kervaire, M.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 219—252 (1956)

Courbure intégrale généralisée et homotopie

Par
Michel Kervaire à Berne

Introduction

Le but de ce travail est de mettre en évidence une relation entre les valeurs d'un caractère des groupes d'homotopie des sphères (noté γ) et les possibilités de généraliser le théorème de la curvatura integra (H. Hopf [3]).

Si une variété fermée M_k (de classe C^1) est immergée (par une application localement biunivoque de classe C^1) dans l'espace euclidien R_{k+1} de dimension $k+1$, les normales en chaque point du modèle de M_k dans R_{k+1} fournissent une application continue (l'application sphérique de Gauss):

$$\varphi : M_k \to S_k$$

de la variété M_k dans la sphère des directions dans R_{k+1} et le degré de Brouwer de φ est la «curvatura integra». Le théorème mentionné [3] affirme que, pour les dimensions paires $k = 2r$, ce degré est égal à la moitié de la caractéristique d'Euler de M_k (celle-ci est paire dans la situation considérée).

La généralisation envisagée de la situation ci-dessus est du type suivant: une variété fermée M_k étant plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux F_n (généralisant la normale à M_k dans R_{k+1}), ce champ détermine une application continue

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

de M_k dans la variété de Stiefel des suites ordonnées de n vecteurs orthonormés de R_{k+n} et ayant pour origine un point fixe A: l'application φ fait correspondre à chaque point x de M_k les n vecteurs équipollents à ceux du champ F_n au point x et ayant pour origine le point A. L'application φ généralise l'application de Gauss; pour $n = 1$, en effet, $V_{k+1,1}$ n'est autre que la sphère des directions dans R_{k+1}.

D'après les résultats de E. Stiefel [9] sur les groupes d'homologie à coefficients entiers $H_i(V_{k+n,n})$ des variétés $V_{n+k,n}$:

$$H_i(V_{k+n,n}) = 0 \text{ pour } 1 \leq i < k,\ H_k(V_{k+n,n}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ pour } k \text{ pair ou } n = 1, \\ \mathbf{Z}_2 \text{ pour } k \text{ impair et } n > 1, \end{cases}$$

(où $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}_2$ désignent les groupes des nombres entiers et restes modulo 2 respectivement), on peut, comme pour le cas de l'application de Gauss, représenter la classe de φ par un nombre, disons $\overline{\varphi}(M_k)$, entier ou reste modulo 2. Le nombre $\overline{\varphi}(M_k)$ qui, pour $k = 2$, $n = 1$, est à un facteur près l'intégrale (étendue à M_2) de la courbure de Gauss, peut être appelé *curvatura integra généralisée* du modèle de M_k dans R_{k+n}. Il faut remarquer que la définition

de $\overline{\varphi}(M_k)$ est subordonnée à l'existence du champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux à M_k dans R_{k+n}.

Le théorème qui sera démontré[1]) est du type suivant: *dans certaines conditions, la curvatura integra généralisée $\overline{\varphi}(M_k)$ est indépendante du plongement et du champ $\mathbf{F}_n$: c'est un invariant de la variété différentiable M_k.* Lorsque ces «conditions», sur lesquelles nous allons revenir, sont réalisées, $\overline{\varphi}(M_k)$ est déterminée par la *«semi-caractéristique»* $\chi^*(M_k)$ de M_k égale à la moitié de la caractéristique d'Euler $\frac{1}{2}\chi(M_k)$ pour k pair et à

$$\chi^*(M_k) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i p_i(M_k)$$

pour $k = 2r + 1$, impair ($p_i(M_k)$ est le nombre de Betti mod 2 de dimension i de M_k).

La condition qui doit être réalisée pour l'invariance de la curvatura integra généralisée d'une variété M_k plongée dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux est qu'un certain invariant d'homotopie γ des applications de la sphère S_{k+n} dans S_n soit nul sur toute classe d'applications.

Cette condition est toujours réalisée pour k pair; on obtient ainsi, pour k pair, une généralisation proprement dite du théorème de H. Hopf (cf. théorème VI, § 7).

Pour k impair, il y a des cas où γ (alors reste mod 2) peut prendre les valeurs 0 et 1. Ceci se présente p. ex. pour $k = 1, 3, 7$. Il est probable (cf. conjecture du § 6) que $\gamma(f)$ pour une application $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec k impair n'est autre que l'invariant de H. Hopf de f réduit modulo 2. La vérification de cette conjecture[1a]) permettrait de ramener le problème des valeurs possibles de γ à celui de l'existence d'applications sphériques d'invariant de H. Hopf impair.

La connection entre l'homotopie des applications sphériques et le théorème de la curvatura integra généralisée est fournie par un théorème d'approximation différentiable des applications sphériques continues dont l'idée remonte à L. Pontrjagin [6] et [7] et B. Eckmann [2]. L. Pontrjagin utilise sa méthode d'approximation pour l'étude des groupes $\pi_{n+1}(S_n)$ et $\pi_{n+2}(S_n)$; B. Eckmann se sert d'une méthode analogue pour déterminer la classe d'homotopie d'applications particulières de S_{n+1} dans S_n. L'invariant γ du présent article, défini pour tous les groupes $\pi_{n+k}(S_n)$, $k \geqq 1$, $n \geqq 1$, se réduit pour $k = 1$ à l'invariant considéré par L. Pontrjagin dans [6] et [7] pour le calcul de $\pi_{n+1}(S_n)$. C'est la recherche du détail des démonstrations dans ces notes de L. Pontrjagin, tâche que m'a proposée Monsieur le Professeur H. Hopf, qui a servi de point de départ à ce travail.

L'invariant γ sera en fait défini de façon un peu plus générale pour les classes d'homotopie d'applications $f: X_{n+k} \to S_n$ où X_{n+k} est une variété

[1]) Le cas $n = 1$, k quelconque a été traité indépendamment et simultanément par J. Milnor. On the imbedding of n-manifolds in $(n + 1)$-space. Comm. Math. Helv., à paraître. Certains résultats de J. Milnor loc. cit. recouvrent également en partie les résultats du § 8 du présent travail.

[1a]) J'ai pu démontrer que cette propriété de γ est effectivement satisfaite; la démonstration paraîtra ultérieurement. (Ajouté en Mars 1956.)

différentiable fermée que l'on peut plonger dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux. Si le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$ existe (cf. [8]), γ est un homomorphisme de ce groupe dans le groupe des entiers pour k pair et dans le groupe des restes modulo 2 pour k impair; c'est aussi ce qui se présente si X est une sphère.

En spécialisant: $X_{n+k} = S_{n+k}$, le théorème de la curvatura integra généralisée (lorsqu'il est valable) se présente comme application de l'invariance de γ.

Il est à remarquer que l'hypothèse faite sur la variété M_k de pouvoir être plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux est (même pour n arbitraire) une sérieuse restriction sur la variété M_k. On ne possède pas de méthode générale permettant de décider pour une variété donnée si un tel plongement est possible. La «Note», à la fin de l'article, apporte une faible contribution (sous forme de condition nécessaire) à cette question. Dans cet ordre d'idées, la question sans doute moins difficile, suivante n'est pas non plus tranchée (à ma connaissance): une variété M_k pouvant être plongée (topologiquement et de classe C^1) dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux, admet-elle un tel champ quel que soit le plongement envisagé? En particulier, qu'en est-il si M_k est une sphère? Si l'on remplace dans ces questions l'hypothèse du plongement topologique par celle plus faible d'une immersion (avec self-intersection éventuelle), il faut alors donner une réponse négative: on peut immerger la sphère S_2 dans R_4 de manière que le modèle Σ_2 ainsi obtenu n'admette pas de champ de repères normaux. On obtient un tel modèle en regardant un *plongement* $p: P_2 \to R_4$ comme une immersion $i: S_2 \to R_4$, i étant la composition de la projection naturelle $S_2 \to P_2$ et du plongement p. Le modèle $\Sigma_2 = i(S_2)$ de S_2 n'admet pas de champ de repères normaux dans R_4. Un tel champ de repères, en impliquant l'existence sur $p(P_2)$ d'un champ de *vecteurs* normaux, serait en contradiction avec un théorème de H. Whitney (cf. [11], Theorem, page 113).

Les questions posées sont des cas particuliers du problème général suivant qui ne semble pas avoir été jamais efficacement abordé (avec cette généralité): étant donnés une variété M_k et une structure fibrée sphérique de base M_k:

$$\mathfrak{B} = (B, S_{n-1}, M_k, G),$$

sous quelles conditions peut-on «réaliser» cette structure fibrée comme structure normale par un plongement ou une immersion $M_k \to R_{k+n}$?

Ce problème ne sera pas abordé dans le présent travail.

Plan

Au chapitre I, j'expose des résultats connus de façon plus ou moins détaillée suivant la place que ces résultats occupent déjà dans les articles de L. Pontrjagin [6] et [7] et R. Thom [10].

Le chapitre II est consacré à la construction de l'invariant γ.

Trois applications sont faites de l'invariance de γ au chapitre III: outre le théorème de la curvatura integra qui vient d'être discuté (au § 7), on trouve

(au § 8) une condition suffisante pour qu'une variété M_k que l'on peut immerger dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux soit parallélisable (cf. théorèmes IX, X, XI); on peut ainsi traiter le cas des produits topologiques de sphères dont on voit qu'ils sont parallélisables dès que leur caractéristique d'Euler est nulle (théorème XII). Au § 9 l'un des lemmes du § 4 est utilisé pour préciser un théorème de M. Morse sur la théorie des points critiques.

Je tiens à remercier trés vivement Monsieur le Professeur Dr. H. Hopf et Monsieur le Professeur Dr. B. Eckmann pour leurs conseils, leur aide et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à l'élaboration de ce travail.

Chapitre I. Préliminaires

§ 1. Théorèmes d'approximation

Nous étudions les applications continues

$$f: X_{n+k} \to S_n$$

d'une variété de Riemann X_{n+k} fermée et orientée, de classe C^∞, dans la sphère S_n. Les indices indiquent la dimension.

Sur l'approximation d'une telle application, on trouve, énoncés par L. Pontrjagin [6] et [7], les théorèmes suivants dont le détail des démonstrations a été donné par R. Thom [10]:

Aussi proche qu'on le veut d'une application continue donnée, il existe une application, disons f, de classe C^∞ ayant la propriété:

i) *il existe un voisinage $V(c)$ d'un point $c \in S_n$ dont la contre-image $f^{-1}(V)$ est un ensemble de points «réguliers» de f.*

Un point $p \in X_{n+k}$ est dit *«régulier»* lorsque les fonctions

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

exprimant l'application f dans des systèmes locaux de coordonnées ont la propriété que la matrice

$$(\partial f_i / \partial x_j) \qquad [i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n+k]$$

a en p le rang maximum n. Un point c satisfaisant avec la fonction f à la propriété i) est appelé *«valeur régulière»* de la fonction f.

La propriété i) de la fonction f implique les suivantes: la contre-image $f^{-1}(c)$ du point c est une sous-variété M_k de X_{n+k}, de classe C^∞, orientable, fermée, éventuellement non-connexe. La variété M_k est représentée localement par les équations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) = 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, n].$$

La fonction f est dans $f^{-1}(V)$ une fibration, et l'on a $f^{-1}(V) \approx M_k \times V_n$[2]) où V_n est la boule ouverte de dimension n; on peut prendre V assez petit pour que $U = f^{-1}(V)$ soit un voisinage tubulaire de M_k dans X_{n+k}.

Si l'on fait choix en c d'un repère tangent à S_n, l'application f induit sur M_k un champ F_n de repères normaux dans X_{n+k}. Soit en effet, $N_n(x)$ le sous-

[2]) Le signe $\approx$ signifie «homéomorphe à».

espace linéaire de $T_{n+k}(x)$ (espace tangent en x à X_{n+k}) formé par les vecteurs normaux à M_k en x dans X_{n+k}. L'application linéaire

$$df: T_{n+k}(x) \to T_n(c)$$

donnée par

$$df(a^i \mathbf{u}_i) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} a^i \mathbf{v}_j$$

(les bases $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+k}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $T_{n+k}(x)$ et $T_n(c)$ étant celles déterminées par les coordonnées locales) s'avère biunivoque sur $N_n(x)$. Un repère fixe dans $T_n(c)$ a donc une contre-image bien déterminée dans $N_n(x)$. On en fait un repère orthonormé (dans $N_n(x)$) et dépendant de façon continue de x par un procédé standard d'orthogonalisation.

Le champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux sur M_k dans X_{n+k} ainsi obtenu permet de doter M_k d'une orientation déterminée; nous ferons les conventions suivantes: les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ d'un repère tangent à M_k définissant l'orientation positive de M_k, suivis des vecteurs $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_{k+n}$ du champ F_n déterminent l'orientation positive de X_{n+k}.

Soit $\mathfrak{F}_c$ la famille des applications continues de X_{n+k} dans S_n pour lesquelles un point fixe c de S_n est valeur régulière. On a

1. Dans chaque classe d'homotopie des applications $X_{n+k} \to S_n$ il existe une application de la famille $\mathfrak{F}_c$.

2. Si l'on choisit en c un repère fixe tangent à S_n, il correspond de façon univoque à chaque fonction de $\mathfrak{F}_c$ une sous-variété orientée M_k de X_{n+k} portant un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux (dans X_{n+k}).

Réciproquement, si l'on se donne dans la variété X_{n+k} une sous-variété plongée M_k munie d'un champ $\mathbf{F}_n$ de vecteur normaux, on peut faire correspondre à un tel couple qui sera désigné par $(M_k; \mathbf{F}_n)$ une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de X_{n+k} dans S_n, appartenant à la famille $\mathfrak{F}_c$, définie de la manière suivante:

Soit U un voisinage tubulaire de M_k dans X_{n+k}; par suite de l'existence du champ $\mathbf{F}_n$, U est homéomorphe au produit cartésien $M_k \times V_n$ où V_n est la boule ouverte de dimension n; le champ $\mathbf{F}_n$ fournit un homéomorphisme déterminé de U dans $M_k \times V_n$ et permet ainsi d'associer à tout point u de U les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de sa projection dans V_n. Soit alors $r: V_n \to S_n - q$ l'homéomorphisme naturel de V_n sur la sphère trouée; l'application f est définie par

$$f(u) = r(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{pour } u \in U,$$

$$f(x) = q \qquad \text{pour } x \in X - U.$$

L'application f ainsi définie est continue et le point c de S_n, antipode de q, en est une valeur régulière.

Il est évident que la classe d'homotopie de f ne dépend pas du choix du voisinage tubulaire U.

Ainsi à toute application $f: X_{n+k} \to S_n$ de la famille $\mathfrak{F}_c$ correspond un couple $(M_k; \mathbf{F}_n) = \theta' f$. A tout couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ correspond une application

$f' = \theta(M_k; \mathrm{F}_n)$ de la famille $\mathfrak{F}_c$. On a

a) $\theta'\theta(M_k; \mathrm{F}_n) = (M_k; \mathrm{F}_n)$,

b) $\theta\theta' f \simeq f$.

a) est évident; pour b), on obtient une homotopie en composant tout d'abord $f: X_{n+k} \to S_n$ avec une homotopie $r_t: S_n \to S_n$ telle que $r_0 =$ identité, r_1 est un homéomorphisme de V sur $S_n - q$ (le point q étant antipode de c) et $r_1(S_n - V) = q$; on est ainsi conduit à une application $r_1 f = f^*: X_{n+k} \to S_n$ qui ne diffère de $f' = \theta\theta' f$ que par le fait que la contre-image par df' du repère donné en c n'est pas nécessairement orthonormée; cette orthogonalisation étant une opération réalisable par une déformation continue, on a

$$f \simeq f^* \simeq f' = \theta\theta' f.$$

Les résultats de ce paragraphe s'étendent en partie aux applications continues

$$F^*: X_{n+k} \times I \to S_n,$$

où I est l'intervalle (0,1).

Si l'on se fixe $f_0 = F^*/X \times (0)$ et $f_1 = F^*/X \times (1)$ pour lesquelles le même point c (de S_n) est valeur régulière, on peut approcher F^* par une application F de classe C^q, q étant aussi grand qu'on le désire ayant la propriété i) avec le même point c et telle que $f_0 = F/X \times (0)$ et $f_1 = F/X \times (1)$. L'ensemble $F^{-1}(c)$ est alors une variété Q_{k+1} *avec bord*.

Soit inversement Q_{k+1} une variété dans $X_{n+k} \times I$ de bord $\partial Q_{k+1} = M'_k - M_k$ avec $M_k \subset X \times (0)$ et $M'_k \subset X \times (1)$, Q_{k+1} portant un champ de repères normaux Φ_n dans $X \times I$. Supposons en outre que la restriction de Φ_n sur M_k et M'_k fournisse des champs F_n et F'_n de repères normaux sur M_k et M'_k dans $X \times (0)$ et $X \times (1)$ respectivement; il correspond alors à $(Q_{k+1}; \Phi_n)$ une homotopie $F = \theta(Q_{k+1}; \Phi_n)$:

$$F: X_{n+k} \times I \to S_n$$

avec $F/X \times (0) = \theta(M_k; \mathrm{F}_n)$, $F/X \times (1) = \theta(M'_k; \mathrm{F}'_n)$.

La fonction F est également définie par

$$F(u) = r(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{pour } u \in U,$$
$$F(x) = q \qquad \text{pour } x \notin U$$

où U désigne un voisinage tubulaire de Q_{k+1} dans $X \times I$ $(U \approx Q \times V_n)$.

Remarque: Les considérations de ce paragraphe permettent de mettre en évidence un aspect du problème de l'existence d'applications

$$\alpha: S_{2n+1} \to S_{n+1}$$

d'invariant de Hopf égal à 1.

S. Eilenberg a démontré qu'une telle application existe si et seulement si il existe une application

$$f^*: S_n \times S_n \to S_n$$

de type (1,1).

Si f^* existe, le théorème d'approximation de L. Pontrjagin (où $S_n \times S_n$ joue le rôle de X_{n+k}) fournit l'existence d'une application

$$f: S_n \times S_n \to S_n$$

(homotope à f^* et par suite également de type (1,1)) pour laquelle un point $c \in S_n$ est valeur régulière, c.à.d. $f^{-1}(c) = M_n$ est une sous-variété de $S_n \times S_n$ dont l'espace fibré des vecteurs normaux (à M_k dans $S_n \times S_n$) est simple. On voit aisément que M_k est homologue à la diagonale.

Réciproquement, une sous-variété M_n de $S_n \times S_n$ homologue à la diagonale et munie d'un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux fournit suivant le procédé décrit dans ce paragraphe une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de $S_n \times S_n$ dans S_n dont on voit qu'elle a le type (1,1). En résumé, *on a un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ dont l'invariant de* Hopf *est* 1 *si et seulement si l'on peut représenter la classe d'homologie de la diagonale dans $S_n \times S_n$ par une sous-variété dont la structure normale (dans $S_n \times S_n$) est simple*[3]).

§ 2. Interprétation des groupes de cohomotopie

X_{n+k} désignant toujours une variété de Riemann, fermée, orientée, de classe C^∞, soit $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ l'ensemble des sous-variétés M_k fermées, de classe C^1 dans X_{n+k}, munies d'un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux; un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ sera désigné par $(M_{n+k}; \mathbf{F}_n)$. La variété M_k peut avoir plusieurs composantes connexes. On supposera toujours la variété M_k d'un couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ orientée de manière que les vecteurs d'un repère tangent «positif» suivis dans leur ordre des vecteurs du champ $\mathbf{F}_n$ déterminent l'orientation positive de X_{n+k}.

On introduit dans $\mathfrak{M}_k(X)$ une relation d'équivalence de la façon suivante: considérons le produit cartésien $X_{n+k} \times I$ de X par le segment unité; deux éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X)$ peuvent être plongés naturellement dans $X \times I$: M_k est plongée avec son champ dans $X \times (0)$ et M'_k avec son champ dans $X \times (1)$, leurs images sont $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ respectivement. Les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ seront dits équivalents, $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$, s'il existe une variété (de classe C^1) N_{k+1} dans $X_{n+k} \times I$ ayant les propriétés:

a) $\partial N_{k+1} = M'_k \times (1) - M_k \times (0)$,

b) le champ de repères normaux sur $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ est normal à N_{k+1} et peut être étendu à un champ de repères normaux sur N_{k+1} dans $X_{n+k} \times I$.

Les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité de cette relation d'équivalence sont banales. Sa signification est donnée par le

Lemme 1: *Les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ sont équivalents si et seulement si les applications*

$$f, f': X_{n+k} \to S_n$$

qui leur correspondent sont homotopes $(f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n), f' = \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n))$.

En effet, si $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$, l'homotopie cherchée est fournie par $F = \theta(N_{k+1}; \Phi_n)$ où Φ_n désigne l'extension (existant par hypothèse) sur N_{k+1} du champ de repères normaux donné sur le bord $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$ de N_{k+1}.

[3]) La diagonale elle-même a dans $S_n \times S_n$ une structure normale simple si et seulement si S_n est parallélisable.

Si, réciproquement, f et f' sont homotopes, on peut choisir l'homotopie F de sorte que le point

$$c = f(M_k) = f'(M'_k)$$

soit valeur régulière pour F. En particulier

$$N_{k+1} = F^{-1}(c)$$

est une sous-variété avec bord de $X_{n+k} \times I$, ayant pour bord $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$ et portant un champ de repères normaux qui, sur $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ coïncide avec les champs donnés. On a donc $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$.

Soit maintenant $k + 1 < n$, ou bien $X_{n+k} = S_{n+k}$ sans limitation de dimensions; *on peut alors définir entre les classes d'équivalence de* $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ *une relation d'addition qui fait de l'ensemble de ces classes d'équivalence un groupe abélien.*

Examinons tout d'abord le cas où $k + 1 < n$:

L'addition est alors définie comme suit: c_k et c'_k étant deux classes dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$, prenons des représentants $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de ces classes tels que les variétés M_k et M'_k n'aient pas de point commun. La classe $c_k + c'_k$ est celle de la variété $M_k + M'_k$ portant le champ de repères donné par $\mathbf{F}_n$ sur M_k et $\mathbf{F}'_n$ sur M'_k. ($M_k + M'_k$ est la réunion des ensembles M_k et M'_k). On peut toujours former la somme de deux classes, car, en vertu de l'hypothèse $k + 1 < n$, on peut éliminer les points communs éventuels à M_k et M'_k par une déformation continue de l'une des variétés, p. ex. M'_k ce qui conduit à un élément $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ équivalent à $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ et tel que $M_k \cdot M''_k = 0$. En outre, la classe $c_k + c'_k$ ne dépend pas du choix des représentants $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ appartenant aux classes c_k et c'_k respectivement et satisfaisant à $M_k \cdot M'_k = 0$. Il suffit de démontrer que si $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ est un autre représentant de c'_k avec $M_k \cdot M''_k = 0$, les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ et $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M''_k; \mathbf{F}''_n)$ sont équivalents. On considère pour cela dans $X_{n+k} \times I$ la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ formée dans $X \times (0)$ et la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M''_k; \mathbf{F}''_n)$ formée dans $\mathrm{X} \times (1)$. La variété N_{k+1} cherchée, ayant pour bord $(M_k + M''_k) \times (1) - (M_k + M'_k) \times (0)$ est formée

1°. du produit cartésien $M_k \times I$ sur lequel le champ de repères normaux s'étend de façon évidente,

2°. de la variété N'_{k+1} assurant l'équivalence de $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ avec $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$. Si N'_{k+1} et $M_k \times I$ avaient des points communs, on pourrait les éliminer par une déformation admissible de N'_{k+1} ou du produit $M_k \times I$ en regard de la restriction sur les dimensions $[(k+1) + (k+1) - (k+n+1) < 0$ est assuré par l'inégalité $k + 1 < n]$.

Les classes d'équivalence de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ forment un groupe relativement à l'addition commutative ainsi définie.

L'*associativité* est évidente.

L'*élément zéro* du groupe est la classe des variétés M_k avec champ $\mathbf{F}_n$, telles qu'il existe dans $X_{n+k} \times I$ une variété Q_{k+1} de bord $M_k \times (0)$ portant un champ Φ_n de repères normaux dans $X \times I$ qui coïncide avec $\mathbf{F}_n$ sur $M_k \times (0)$. La classe 0 peut être en particulier représentée par l'ensemble vide.

La *classe inverse* de celle représentée par $(M_k; \mathbf{F}_n)$ peut être, représentée par $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ où M'_k est à l'orientation prés la même variété que M_k et $\mathbf{F}'_n$ est le champ obtenu à partir de $\mathbf{F}_n$ en remplaçant le premier vecteur (par exemple) par le vecteur opposé:

$$\mathbf{F}_n(x) = \{\mathbf{v}_1(x), \mathbf{v}_2(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x)\}$$
$$\mathbf{F}'_n(x) = \{-\mathbf{v}_1(x), \mathbf{v}_2(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x)\}.$$

Pour le voir, représentons la classe de $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ par le couple équivalent $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ où M''_k est la variété que l'on obtient en déplaçant chaque point x de M_k d'une longueur fixe (petite) ε le long de la ligne géodésique de direction $\mathbf{v}_1(x)$; le champ $\mathbf{F}''_n$ est obtenu par transport parallèle des vecteurs de F_n et changement de signe du premier vecteur:

$$\mathbf{v}''_1(x') = -\mathbf{v}_1(x')$$

où x' est le point correspondant à x (par la translation ε) et $\mathbf{v}_1(x')$ le résultat du transport parallèle de $\mathbf{v}_1(x)$ le long de la géodésique xx'. Considérons alors le produit $X_{n+k} \times I$; il s'agit de démontrer qu'il existe une variété Q_{k+1} dans $X \times I$ de bord $(M_k + M''_k) \times (0)$. La variété Q_{k+1}, homéomorphe au produit $M_k \times I$ est formée par l'ensemble des «demi-cercles» D_k définis de la manière suivante: $X_{n+k} \times I$ étant munie de la métrique Riemannienne naturelle D_x est situé sur la surface (à 2 dimensions) engendrée par les géodésiques passant par x avec un vecteur tangent (en x) dans le plan de $\mathbf{v}_1(x)$ et $\mathbf{e}_t(x)$, ce dernier vecteur donnant la direction des t croissants en chaque point (x, t) du produit $X \times I$; sur cette surface, D_x est le lieu des points à la distance (géodésique) fixe $\overline{ox}$ du milieu o du segment géodésique xx'. Il est évident que $\partial N_{k+1} = (M_k + M''_k) \times (0)$, car M''_k a l'orientation «opposée» à celle de M_k. L'extension du champ s'effectue comme suit: en tout point de D_x les $(n-1)$ derniers vecteurs sont parallèles à

$$\mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x);$$

le premier vecteur $\mathbf{v}_1$ en un point de D_x est porté par la tangente au rayon géodésique passant par ce point et orienté vers le centre o du «demi-cercle» D_x.

Nous avons vu (lemme 1) que l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ est appliqué biunivoquement par l'opération θ sur l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n. Soient alors f et f' deux applications de X_{n+k} dans S_n et soit $k+1 < n$; prenons des éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ dans $\mathfrak{M}_k(X)$ tels que $M_k \cdot M'_k = 0$ et

$$f \simeq \theta(M_k; \mathbf{F}_n), \quad f' \simeq \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n).$$

On peut alors définir la classe d'homotopie $f \dotplus f'$ somme des classes de f et de f' en posant

$$f \dotplus f' = \theta[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)].$$

Cette définition pourvoit l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n (pour $k+1 < n$) d'une structure de groupe abélien que nous désignerons (provisoirement) par $G_k(X_{n+k})$.

Dans le cas où $X_{n+k} = S_{n+k}$ et $k + 1 \geqq n$, on exigera pour former la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ que les deux variétés M_k et M'_k se trouvent dans des hémisphères séparés par un équateur S_{n+k-1} de S_{n+k}. L'addition fournie par

$$f + f' = \theta\,[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)]$$

des classes d'homotopie de f et f' coïncide alors avec l'addition usuelle dans le groupe $\pi_{n+k}(S_n)$.

Revenons à la somme $f \dot{+} f'$ pour laquelle nous supposons seulement que les variétés en jeu n'ont pas de point commun:

Théorème I: *Dans l'hypothèse $k + 1 < n$, le groupe abélien $G_k(X_{n+k})$ qui vient d'être défini est le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$ de* BORSUK-SPANIER [8].

En vue de la démonstration, rappelons la définition de l'addition des classes d'homotopie dans $\pi^n(X_{n+k})$.

Soient f et f' deux applications continues de X_{n+k} dans S_n; on forme l'application $F = f \times f'$ de X_{n+k} dans $S_n \times S_n$ définie par $F(x) = f(x) \times f'(x)$.

Une application

$$F' : X_{n+k} \to S_n \vee S_n$$

homotope à F dans $S_n \times S_n$ est appelée une «*normalisation*» de F. ($S_n \vee S_n$ désigne la réunion de $S_n \times q$ et $q \times S_n$ dans $S_n \times S_n$). Supposons qu'une telle normalisation existe pour la fonction F donnée; l'application naturelle

$$\Omega : S_n \vee S_n \to S_n$$

définie par

$$\Omega(y \times q) = y,$$
$$\Omega(q \times y) = y,$$

permet de définir la «*somme*» des applications f et f' par la formule

$$f + f' = \Omega F'.$$

E. SPANIER [8] a démontré qu'une normalisation pour l'application $F : X_{n+k} \to S_n \times S_n$ existe pourvu que $k + 1 < n$; il a démontré également que dans ce cas la classe d'homotopie de la somme $f + f'$ ne dépend que des classes d'homotopie des applications f et f'. En outre, l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n forme un groupe, le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$, relativement à l'addition qui vient d'être définie.

Soient alors α et α' deux classes d'applications de X_{n+k} dans S_n. On peut choisir dans chacune de ces classes un représentant qui est l'image par θ d'un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$:

$$f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n) \in \alpha, \quad f' = \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n) \in \alpha',$$

les variétés M_k et M'_k n'ayant pas de point commun. Pour former $\theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $\theta(M'_k; \mathbf{F}'_n)$, on considère des voisinages tubulaires U et U' de M_k et M'_k; on peut choisir U et U' de sorte que $U \cdot U' = 0$.

Considérons alors la somme de BORSUK-SPANIER des applications f et f': on forme $F : X_{n+k} \to S_n \times S_n$, $F = f \times f'$; ici

$$F(X_{n+k}) \subset S_n \vee S_n. \tag{2.1}$$

En effet, pour $x \notin U$, $F(x) = f(x) \times f'(x) = q \times f'(x)$;
pour $x \notin U'$, $F(x) = f(x) \times f'(x) = f(x) \times q$.
L'inclusion (2.1) est alors conséquence de ce que l'alternative $x \notin U$ ou $x \notin U'$ épuise tous les cas possibles ($U \cdot U' = 0$).

L'inclusion (2.1) signifie que l'application F est sa propre normalisation; on obtient donc

$$f + f' = \Omega F.$$

D'autre part, l'égalité

$$\Omega F = \theta\, [(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)] = f \dotplus f'$$

est immédiatement vérifiée en observant que

$$\begin{array}{ll} (\Omega F)(x) = q & \text{pour } x \notin U \text{ et } x \notin U', \\ (\Omega F)(x) = f(x) & \text{pour } x \in U, \\ (\Omega F)(x) = f'(x) & \text{pour } x \in U'. \end{array}$$

On obtient ainsi

$$f + f' = \Omega F = f \dotplus f',$$

ce qui démontre le théorème 1.

Remarque: Il peut se faire que dans certains cas où l'inégalité $k + 1 < n$ n'est pas satisfaite, on puisse cependant former la somme $f \dotplus f'$; on peut par exemple, sans restriction sur les dimensions, former les multiples $f \dotplus f$, $f \dotplus f \dotplus f, \ldots$ et l'inverse $\bar{f}$ (telle que $f \dotplus \bar{f} = 0$) de la classe d'homotopie d'une application $f : X_{n+k} \to S_n$ donnée. Soit, en effet, f une telle application pour laquelle c est valeur régulière; un point c' suffisament voisin de c sera également valeur régulière pour f. Soient M_k et M'_k les contre-images de c et c' par f; F_n et F'_n les champs de repères normaux que f induit sur M_k et M'_k respectivement. Les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{k+n})$ sont équivalents; les variétés M_k et M'_k n'ayant pas de point commun, on peut former la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ qui est la juxtaposition sans point commun des variétés M_k et M'_k avec leurs champs de repères normaux respectifs. On pose

$$f \dotplus f = \theta\, [(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)].$$

On vérifie que la classe de l'application multiple ainsi définie ne dépend ni du choix des points c et c' ni du choix de f dans sa classe.

La construction de l'inverse $\bar{f}$ d'une application f peut être également effectuée même si $k + 1 \geqq n$; là encore la classe de $\bar{f}$ ne dépend que de la classe de f. En effet, si $F : X \times I \to S_n$ est une homotopie entre f et f', et $F = \theta(N_{k+1}; \Phi_n)$, on obtient l'homotopie $\bar{F}$ entre $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ en posant $F = \theta(\bar{N}, \bar{\Phi})$ où $\bar{N}$ est la variété N dont on a changé l'orientation ($\bar{N} = - N$) et $\bar{\Phi}$ le champ qui diffère de Φ par le premier vecteur, opposé à celui de Φ.

Ce procédé d'addition nous fournit les multiples $f \dotplus f \dotplus f, f \dotplus f \dotplus f \dotplus f, \ldots$; on peut ainsi parler de l'ordre d'une application $f : X_{n+k} \to S_n$ sans que le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ existe nécessairement. Il faut cependant observer que si $X_{n+k} = S_{n+k}$ et $k + 1 \geqq n$, les multiples formés de cette manière peuvent être différents des multiples au sens ordinaire [3a]).

[3a]) Comme me l'a fait observer P. Hilton, le multiple $m \cdot f$ défini de cette manière n'est autre que la composition $(m\, i_n) \circ f$, ou $i_n : S_n \to S_n$ est l'identité.

La possibilité de former la classe «inverse» même si $\pi^n(X_{n+k})$ n'existe pas sera utilisée pour démontrer le théorème IV.

Chapitre II. Construction d'un invariant

§ 3. L'invariant γ

Pour ce chapitre, il sera supposé que la variété X_{n+k} est plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_{m-n-k}$ sur X_{n+k} dans R_m.

Cette situation est en particulier réalisable si X_{n+k} est une sphère S_{n+k}. Elle implique que les classes caractéristiques $z^q(X)$ de X soient toutes nulles (voir Note).

Nous prenons pour métrique dans X_{n+k} celle induite par le plongement dans R_m. En outre X_{n+k} est orienté de sorte qu'un repère définissant l'orientation positive de X_{n+k} suivis des vecteurs de $\mathbf{F}_{m-n-k}$ fournisse l'orientation positive de R_m.

D'aprés les paragraphes qui précèdent, un invariant des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ donne lieu à un invariant d'homotopie des applications $X_{n+k} \to S_n$ et réciproquement.

Un invariant des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ peut être construit de la façon suivante: soit $(M_k; \mathbf{F}_n)$ un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$; le champ $\mathbf{F}_n$ induit une application

$$\varphi: M_k \to V_{m,m-k}$$

de M_k dans la variété de STIEFEL $V_{m,m-k}$ des suites ordonnées de $(m-k)$ vecteurs orthonormés de R_m ayant pour origine un point fixe A de R_m: la fonction φ fait correspondre à chaque point x de M_k la suite des $(m-k)$ vecteurs ayant pour origine l'origine des coordonnées dans R_m et équipollents, dans l'ordre, aux n vecteurs du champ $\mathbf{F}_n$ au point x suivis des $(m-n-k)$ vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-n-k}$ en x.

D'après E. STIEFEL [9], le groupe d'homologie entière

$$H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$$

est isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers pour k pair et isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2, $\mathbf{Z}_2$, pour k impair (Nous laissons de coté le cas $m-k=1$ qui ne peut intervenir ici).

Après avoir fait choix d'un générateur pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$, il correspond à $\varphi(M_k)$ de façon univoque un nombre $\overline{\varphi}(M_k)$, entier ou reste modulo 2 qui représente la classe d'homologie du cycle singulier $\varphi(M_k)$. Le générateur que nous choisissons pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$ est la classe du cycle sphérique défini par l'application

$$\varepsilon: S_k \to V_{m,m-k}$$

faisant correspondre au point

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, 0, 0, \ldots, 0)$$

de R_m avec $\mathbf{x}^2 = 1$ les vecteurs

$$\mathbf{x}, \mathbf{e}_{k+2}, \mathbf{e}_{k+3}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

($\mathbf{e}_i$ étant le vecteur unitaire de R_m dont la i-ème composante est égale à 1 et les autres nulles), la sphère S_k étant supposée orientée de manière à être

le bord orienté de la boule pleine $\mathbf{x}^2 \leq 1$ portant l'orientation $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}$. En particulier, si $\mathbf{v}(x)$ est un vecteur de R_{k+1} (dépendant de façon continue de $x \in S_k$) qui fournit
— une application $u: S_k \to S_k$ de degré de BROUWER $d(u)$ et
— une application $\varphi^*: S_k \to V_{m,m-k}$ définie par

$$\varphi^*(x) = \{\mathbf{v}(x), \mathbf{e}_{k+2}, \mathbf{e}_{k+3}, \ldots, \mathbf{e}_m\}$$

dont la classe est représentée par $\bar{\varphi}^*$, on a

$$\bar{\varphi}^* = d(u) \qquad \text{(mod 2 pour } k \text{ impair).} \tag{3.1}$$

On désignera par $\chi^*(M_k)$ la moitié $\frac{1}{2}\,\chi(M_k)$ de la caractéristique d'EULER de M si k est pair, et l'expression

$$\chi^*(M_k) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M_k; \mathrm{K})$$

pour k impair, $k = 2s - 1$. Dans la somme, $p_i(M_k; \mathrm{K})$ désigne le rang du groupe $H_i(M_k; \mathrm{K})$, K étant un corps de coefficients. Nous appellerons $\chi^*(M_k)$ la *«semi-caractéristique»* de M_k; c'est un nombre entier (pour k pair: la caractéristique d'EULER d'une variété plongée dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux est paire; cf. E. STIEFEL [9], page 353, Satz 28 ou la Note en fin du présent article).

Formons l'expression

$$I(M_k; \mathrm{F}_n) = \bar{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k; \mathrm{K})$$

qui est un nombre entier si k est un nombre pair et que nous regardons comme un reste mod 2 (dépendant en général du corps K choisi) si k est impair. On notera par $I_0(M_k; \mathrm{F}_n)$ et $I_2(M_k; \mathrm{F}_n)$ les expressions ci-dessus formées en prenant respectivement le corps des nombres rationnels et le corps $\mathbf{Z}_2$ comme domaine K de coefficients.

On a alors le théorème suivant qui sera démontré au § 5:

Théorème II': *Si* $(M_k; \mathrm{F}_n)$ *et* $(M_k'; \mathrm{F}_n')$ *sont équivalents dans* $\mathfrak{M}_k(X)$, $(M_k; \mathrm{F}_n) \equiv (M_k'; \mathrm{F}_n')$, (cf. § 2), *alors*

(3.2) $\quad I(M_k; \mathrm{F}_n) = I(M_k'; \mathrm{F}_n')$ *pour k pair,* K *étant quelconque,*

(3.3) $\quad I_2(M_k; \mathrm{F}_n) = I_2(M_k'; \mathrm{F}_n')$ mod 2 *pour k impair* $(\mathrm{K} = \mathbf{Z}_2)$,

(3.4) $\quad I_0(M_k; \mathrm{F}_n) = I_0(M_k'; \mathrm{F}_n')$ mod 2 *pour k de la forme* $k = 4r + 1$.

Si l'on donne une application $f: X_{n+k} \to S_n$, on peut choisir un élément $(M_k; \mathrm{F}_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ pour lequel $f \simeq \theta(M_k; \mathrm{F}_n)$. Posons

$$\gamma(f) = I(M_k; \mathrm{F}_n);$$

$\gamma(f)$ est un nombre entier pour k pair et un reste mod 2 pour k impair *au quel cas* $\chi^*(M_k)$ *est formée en prenant* $\mathbf{Z}_2$ *comme corps de coefficients*. On a alors (comme conséquence immédiate du théorème II') le

Théorème II: $\gamma(f)$ *ne dépend que de la classe d'homotopie de l'application* $f: X_{n+k} \to S_n$.

(Cet invariant est considéré par L. PONTRJAGIN [6] et [7] dans le cas où $k = 1$ et $X_{k+n} = S_{k+n}$).

§ 4. Deux lemmes sur les variétés à bord

Dans ce paragraphe, Q_{k+1} désigne une variété à bord; la variété bord sera désignée par M_k. Le domaine des coefficients est un corps $\mathbf{K}$. Si Q n'est pas orientable et si $\partial Q = M$ mod 2, on exige que $\mathbf{K}$ ait la caractéristique 2.

Les lemmes de ce paragraphe seront utilisés au § 5 pour la démonstration du théorème II'.

1. Supposons tout d'abord que k est impair et désignons $k+1$ par $2s = k+1$. Bien que Q_{2s} ne soit pas une variété fermée, le coefficient d'intersection $S(z, w)$ de deux classes d'homologie z et w de $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$ est bien défini. Il en est de même de la forme quadratique fondamentale $f(x, x) = \sum_1^N s_{ij} x^i x^j$, où $s_{ij} = S(z_i, z_j)$, les classes $z_1, z_2, \ldots, z_N$ formant une base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$. Le rang ϱ de la matrice (s_{ij}) est indépendant du choix de la base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$, mais contrairement à ce que l'on observe pour une variété compacte, ce rang n'est pas ici nécessairement maximum (égal à N). Si $\mathbf{K}$ est le corps des rationnels, le rang ϱ de la matrice (s_{ij}) est égal mod 2 à l'indice d'inertie de la forme quadratique fondamentale $f(x, x) = \sum_1^N s_{ij} x^i x^j$.

Lemme 1: *Soit Q_{k+1} une variété de bord M_k et k impair, $k = 2s - 1$; soit ϱ le rang de la matrice (s_{ij}) que nous venons d'introduire. On a alors*

$$\chi(Q_{k+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M_k; \mathbf{K}) + \varrho(Q; \mathbf{K}) \quad \text{mod } 2, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{K}$ est un corps.

Démonstration: Soit Δ la variété obtenue en collant le long de leur bord commun M_k deux exemplaires Q_{k+1} et $\overline{Q}_{k+1}$ de la variété Q_{k+1} munis d'orientations opposées. Appliquons à la variété fermée

$$\Delta = Q + \overline{Q}$$

la formule de MAYER-VIETORIS (cf. [1], page 299):

$$p_i(\Delta) = 2p_i(Q) - p_i(M) + n_i + n_{i-1}.$$

Dans cette formule, n_i désigne le rang du noyau N_i de l'homomorphisme $h_* : H_i(M_k; \mathbf{K}) \to H_i(Q_{k+1}; \mathbf{K})$ induit par l'inclusion $h : M_k \to Q_{k+1}$.

Par sommation, on obtient (en posant $2s = k+1$):

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(\Delta) = 2 \sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(Q) - \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M) - \tag{4.2}$$
$$- (-1)^s p_s(M) + (-1)^s n_s,$$

puis

$$\sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(\Delta) = 2 \sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \sum_{i=s}^{2s-1} (-1)^{i+1} p_i(M_{2s-1}) + \tag{4.3}$$
$$+ (-1)^{s-1} n_{s-1}.$$

En utilisant $p_i(M_k) = p_{k-i}(M_k)$ et k impair, il vient

$$\sum_{i=s}^{2s-1} (-1)^{i+1} p_i(M) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M) = \chi^*(M);$$

d'autre part

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(\Delta) = \sum_{i=s}^{2s} (-1)^i p_i(\Delta).$$

On obtient ainsi en ajoutant membre à membre les équations (4.2) et (4.3):

$$(4.4)\; 0 = 2\left\{\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(Q) + \sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \chi^*(M) + (-1)^s B\right\} + (-1)^{s-1} A$$

où l'on a posé

$$A = n_{s-1} + n_s - p_s(M_k)$$
$$B = p_s(Q) - (p_s(M) - n_s).$$

Il s'avère que

1) $A = 0$,

2) $B = \varrho$.

L'équation (4.4) fournit alors après division par 2:

$$\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(Q) + \sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \chi^*(M) + (-1)^s \varrho = 0$$

et en réduisant modulo 2:

$$\chi(Q_{k+1}) = \chi^*(M_k) + \varrho \qquad \text{mod } 2$$

équation qu'il fallait démontrer.

1) L'égalité

$$A = n_{s-1} + n_s - p_s(M_k) = 0$$

est connue; on peut la démontrer de la façon suivante:

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ et $w_1, w_2, \ldots, w_p$ des bases duales de $H_s(M_k; \mathbf{K})$ et $H_{s-1}(M_k; \mathbf{K})$ respectivement ($S(v_i, w_j) = \delta_{ij}$, $s + s - 1 = k$). On peut choisir les $w_1, w_2, \ldots, w_p$ de telle sorte que les n premiers $w_1, w_2, \ldots, w_n$ constituent une base de N_{s-1}, noyau de l'homomorphisme $h_*: H_{s-1}(M_k; \mathbf{K}) \to H_{s-1}(Q_{k+1}; \mathbf{K})$. On a posé pour simplifier les notations $n = n_{s-1}$, $p = p_s (= p_{s-1})$.

On montre que les classes $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$ de la base duale forment une base pour N_s:

D'une part, aucune combinaison linéaire des $v_1, \ldots, v_n$ à coefficients non tous nuls n'appartient à N_s; en effet si $v = \lambda^i v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ borde dans Q_{k+1} une chaîne c, on a en posant $z = c + \bar{c}$ ($\bar{c}$ étant une chaîne de $\overline{Q}$ ayant $-v$ pour bord) un cycle de Δ dont l'intersection

$$S_\Delta(z, w_i) = S_M(v, w_i) = \lambda^i$$

avec les w_i $(i = 1, \ldots, n)$ est nulle puisque ceux-ci bordent dans Q_{k+1}. Autrement dit, $\lambda^i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

D'autre part, chacune des classes $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$ appartient au noyau N_s. En effet, si $v_j (n + 1 \leq j \leq p)$ ne bordait pas dans Q_{k+1}, on aurait également $v_j \nsim 0$ dans Δ; il existerait un cycle z de Δ tel que $S(v_j, z) = 1$ (intersection dans Δ, les coefficients sont dans un corps $\mathbf{K}$). Soit w l'intersection $S(z, M_k)$; puisque $w \sim 0$ dans Q_{k+1} $(w = \partial\, S(z, Q_{k+1}))$, on a

$$w = a^1 w_1 + \cdots + a^n w_n$$

(nous employons la même lettre pour un cycle et sa classe d'homologie). Par suite, on aurait

$$1 = S_\Delta(v_j, z) = S_M(v_j, w) = \sum_1^n a^i S(v_j, w_i) = \sum_1^n a^i \delta_{ij} = 0;$$

la dernière égalité à cause de $n + 1 \leqq j \leqq p$. L'hypothèse $v_j \not\sim 0$ dans Q_{k+1} conduisant à une contradiction, nous avons $v_j \sim 0$ dans Q_{k+1}.

De ces deux remarques suit que les classes $v_{n+1}, \ldots, v_p$ forment une base pour N_s et par suite

$$n_s = p - n = p_s - n_{s-1},$$
$$A = n_s + n_{s-1} - p_s = 0.$$

2) Démonstration de $B = \varrho$:

Formons une base pour $H_s(Q_{k+1}; \mathrm{K})$ comprenant les classes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ déjà considérées et $u_1, \ldots, u_d$ soumises tout d'abord à la seule condition $S(u_i, v_i) = 0$. On a

$$n + d = n_{s-1} + d = p_s(Q),$$

et comme d'après 1), $n_s + n_{s-1} - p_s(M) = 0$, il vient

$$d = B = p_s(Q) - (p_s(M) - n_s).$$

Soient comme précédemment $w_1, w_2, \ldots, w_n$ les classes duales de $v_1, \ldots, v_n$ dans M_k. Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les classes d'homologie de $H_s(\Delta; \mathrm{K})$ correspondant aux classes «coutures» $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (cf. [1], page 290; c_i est la somme d'une chaîne de Q_{k+1} ayant pour bord w_i et de sa «symétrique» dans $\overline{Q}_{k+1}$). On a

$$S_M(v_i, w_j) = S_\Delta(v_i, c_j) = \delta_{ij}.$$

On peut choisir les classes $u_1, u_2, \ldots, u_d$ de sorte que toutes les intersections $S(u_i, c_j)$ soient nulles: s'il n'en était pas ainsi pour un premier choix $u', u_2', \ldots, u_d'$, on poserait

$$u_i = u_i' - \Sigma_j\, S(u_i', c_j) \cdot v_j.$$

Les relations $S(u_i, v_j) = 0$ sont conservées. Supposons donc

$$S(u_i, c_j) = 0.$$

Désignons par $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_d$ les symétriques de $u_1, u_2, \ldots, u_d$ dans $\overline{Q}_{k+1}$.

Il s'agit d'évaluer le rang ϱ de la matrice d'intersection pour le groupe $H_s(Q_{2s}; \mathrm{K})$ dont une base est

$$u_1, u_2, \ldots, u_d, \quad v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Ce rang ϱ est au plus d puisque $S(u_i, v_j) = S(v_i, v_j) = 0$ $(i = 1, \ldots, d;$ $j = 1, \ldots, n)$; il est exactement d, en effet: pour voir que la matrice $s_{ij} = S(u_i, u_j)$ $(i, j = 1, \ldots, d)$ n'est pas dégénérée supposons que l'on ait des coefficients $a^i \in \mathrm{K}$, tels que $s_{ij} a^j = 0$ pour tout i. La classe $u = a^j u_j$ aurait alors une intersection nulle avec tous les u_i : $S(u, u_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, d$. On a d'autre part également

$$S(u, v_j) = S(u, c_j) = S(u, \overline{u}_i) = 0.$$

Or les classes

$$u_1, \ldots, u_d, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d, v_1, \ldots, v_n, c_1, \ldots, c_n$$

forment une base pour $H_s(\Delta; \mathbf{K})$ (elles sont linéairement indépendantes et leur nombre $2(d+n) = 2\,p_s(Q)$ est égal à $p_s(\Delta)$); il s'ensuit, $\mathbf{K}$ étant un corps, que la classe u est nulle: $a^i u_i = 0$, ce qui implique

$$a^1 = a^2 = \cdots = a^d = 0,$$

les u_i étant linéairement indépendantes. C'est dire que la matrice

$$(S(u_i, u_j)) \qquad [i, j = 1, \ldots, d]$$

n'est pas dégénérée. On a ainsi

$$\varrho = d = B.$$

2. A partir de maintenant la variété Q_{k+1} est supposée plongée dans un espace euclidien R_{m+1} avec un champ $\mathbf{F}_{m-k}$ de repères normaux (k est quelconque, positif).

On suppose en outre que le bord de Q_{k+1} est plongé dans le sous-espace R_m de R_{m+1} et que les vecteurs de $\mathbf{F}_{m-k}$ issus d'un point de M_k se trouvent dans R_m (R_m est sous-tendu par les m premiers vecteurs d'une base orthonormée $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_m, \mathfrak{e}_{m+1}$ à laquelle nous nous référerons pour l'orientation de R_{m+1}). Nous faisons les conventions d'orientations suivantes: M_k est supposée orientée par un repère tangent dont les vecteurs, suivis de ceux du champ $\mathbf{F}_{m+k}$ déterminent l'orientation positive de R_m; la normale à M_k vers l'intérieur de Q_{k+1} est équipollente au vecteur $+\,\mathfrak{e}_{m+1}$. La variété Q_{k+1} est supposée orientée de manière que $\partial Q_{k+1} = -M_k$.

La restriction de $\mathbf{F}_{m-k}$ sur M_k dans R_m fournit une application

$$\varphi: M_k \to V_{m,m-k};$$

ayant fait choix (cf. § 3) d'un générateur pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$, la classe de $\varphi(M_k)$ est représentée par un nombre $\overline{\varphi}(M_k)$, entier si k est pair, reste mod 2 si k est impair.

Lemme 2: *Dans les conditions ci-dessus*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi(Q_{k+1}) \qquad \textit{pour } k \textit{ pair},$$
$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi(Q_{k+1}) \qquad \text{mod } 2 \ \textit{pour } k \textit{ impair}.$$

Démonstration: Remarquons tout d'abord que $\overline{\varphi}(M_k)$ est numériquement égal à $\overline{\varphi}'(M_k)$ représentant la classe de l'application

$$\varphi': M_k \to V_{m+1,m-k+1}$$

obtenue en adjoignant à *la suite* des $(m-k)$ vecteurs de $\mathbf{F}_{m-k}$ la normale à M_k dans Q_{k+1} (orientée vers l'intérieur de Q). D'après les hypothèses faites sur la situation de M_k et Q_{k+1} dans R_{m+1}, cette normale est en effet le vecteur constant $\mathfrak{e}_{m+1}$ de R_{m+1} orthogonal à R_m.

Le champ $\mathfrak{v}$ de vecteurs tangents à Q_{k+1} donné sur le bord M_k par la normale à M_k dans Q_{k+1} peut être prolongé comme vecteur *tangent* dans Q_{k+1} partout à l'exception de voisinages sphériques d'un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_c$. Soit encore $\mathfrak{v}$ ce prolongement. Désignons par V^i un voisinage

sphérique de x_i dans Q_{k+1} et par S^i son bord (S^i est une sphère de dimension k). L'application

$$\varphi' : M_k \to V_{m+1,m-k+1}$$

peut etre prolongée dans Q_{k+1} à l'extérieur des voisinages V^i: ce prolongement est formé des vecteurs normaux du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ (existant par hypothèse sur Q_{k+1}) au point x *suivis* du vecteur tangent du champ $\mathbf{v}$; en désignant ce prolongement également par φ':

$$\varphi' : (Q - \Sigma_i V^i) \to V_{m+1,m-k+1}.$$

On a alors

$$\partial \varphi'\Big(Q - \sum_i V^i\Big) = \varphi' \partial \Big(Q - \sum_i V^i\Big) = \varphi'\Big(-M - \sum_i S^i\Big)$$
$$= -\varphi'(M) - \sum_i \varphi'(S^i),$$

c. à. d.

$$\varphi'(M_k) \sim -\sum_i \varphi'(S^i) \quad \text{dans} \quad V_{m+1,m-k+1}$$

ou

$$\bar{\varphi}'(M_k) = -\sum_i \bar{\varphi}'(S^i) \tag{4.5}$$

l'égalité étant comprise mod 2 si k est impair.

Il reste à démontrer que pour chaque point singulier x_i du champ $\mathbf{v}$ le nombre $\bar{\varphi}'(S^i)$ est égal (respectivement égal mod 2) à l'index j_i de la singularité du champ $\mathbf{v}$ en x_i.

On sait ensuite ([1], Satz I, page 549)[4]) que

$$\sum_i j_i = (-1)^{k+1} \chi(Q_{k+1}), \tag{4.6}$$

d'où le lemme 2 suit immédiatement.

Pour démontrer

$$\bar{\varphi}'(S^i) = j_i \qquad \text{(resp. mod 2 pour } k \text{ impair)},$$

rapportons le plan tangent T^i_{k+1} en x_i à Q_{k+1} à une base orthonormée $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{k+1}$ déterminant l'orientation positive de Q_{k+1} et soient $\mathbf{g}_{k+2}, \mathbf{g}_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ $(m-k)$ vecteurs orthonormés et perpendiculaires à Q_{k+1} en x_i et déterminant la même orientation de l'espace normal à Q_{k+1} que le champ de repères $\mathbf{F}_{m-k}$. Les vecteurs $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ forment une base orthonormée de R_{m+1}; on a

$$\text{dét } (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (-1)^m.$$

En effet, transportons de manière continue le repère $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ du point x_i en un point x' de M_k de sorte que les k premiers vecteurs du repère $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \ldots, \mathbf{g}'_{m+1}$ ainsi obtenu déterminent l'orientation positive de M_k; nous supposons que durant le déplacement, les $k+1$ premiers vecteurs restent tangents à Q et que dans la position finale, en x', les k premiers sont tangents à M_k. De ce que $\partial Q_{k+1} = -M_k$ suit: le vecteur $(-1)^k \cdot \mathbf{g}'_{k+1}$ (tangent à Q_{k+1}) est dirigé

---

[4]) On voit aisément que ce théorème s'étend à une variété avec bord pourvu qu'en cout point du bord le vecteur du champ soit dirigé vers l'intérieur de la variété, comme t'est le cas ici.

vers l'intérieur de Q_{k+1}. D'autre part les vecteurs $g'_{k+2}, g'_{k+3}, \ldots, g'_{m+1}$ déterminent la même orientation de l'espace normal à M_k en x' dans R_m que le champ F_{m-k}. D'après nos conventions sur l'orientation de la variété d'un couple $(M_k; F_n)$, on a: les vecteurs $g'_1, \ldots, g'_k, g'_{k+2}, \ldots, g'_{m+1}, (-1)^k g'_{k-1}$ dans cet ordre déterminent la même orientation de R_{m+1} que $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$; on en déduit

$$\text{dét}\,(g'_i \cdot e_j) = \text{dét}\,(g_i \cdot e_j) = (-1)^m.$$

Considérons d'une part l'application $u : S^i_k \to S_k$,

$$u(x) = \{(v(x) \cdot g_1),\ (v(x) \cdot g_2), \ldots, (v(x) \cdot g_{k+1})\}$$

fournie par le champ de vecteurs v sur S^i_k. Par définition j_i est le degré de Brouwer de l'application u:

$$j_i = d(u).$$

D'autre part, pour évaluer $\overline{\varphi}'(S^i)$, on peut supposer que les $(m-k)$ vecteurs du champ F_{m-k} sont constants sur S^i et coincident avec $g_{k+2}, g_{k+3}, \ldots, g_{m+1}$. Rapportons R_{m+1} à la base $g_1, g_2, \ldots, g_{m+1}$, on obtient ainsi une application

$$\varphi'' : S^i \to V^{(g)}_{m+1,m-k+1}$$

donnée par

$$\varphi''(x) = \{g_{k+2}, g_{k+3}, \ldots, g_{m+1}, v(x)\}$$

et telle que

$$\overline{\varphi}''(S^i) = \text{dét}\,(g_i \cdot e_j) \cdot \overline{\varphi}'(S^i) = (-1)^m\, \overline{\varphi}'(S^i).$$

Soit encore φ^* l'application $S^i \to V^{(g)}_{m+1,m-k+1}$:

$$\varphi^*(x) = \{v(x), g_{k+2}, g_{k+3}, \ldots, g_{m+1}\},$$

on a

$$\overline{\varphi}''(S^i) = (-1)^{m-k} \cdot \overline{\varphi}^*(S^i) = (-1)^{m-k} \cdot d(u) \qquad \text{(cf. formule (3.1))}$$

et par suite

$$\overline{\varphi}'(S^i) = (-1)^{m+m-k} \cdot d(u) = (-1)^k j_i \tag{4.7}$$

l'égalité étant comprise modulo 2 pour k impair.

En tenant compte de (4.5) et (4.6), l'égalité (4.7) démontre le lemme 2.

§ 5. Démonstration des théorèmes du § 3

Démonstration du théorème II':

Soient $(M_k; F_n)$ et $(M'_k; F'_n)$ deux couples équivalents de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$; cela signifie qu'il existe une sous-variété Q_{k+1} de $X_{n+k} \times I$ dont le bord est $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$, munie d'un champ Φ_n de repères normaux qui se réduit à F_n et F'_n respectivement sur M_k et M'_k.

X_{n+k} étant plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ F_{m-n-k} de repères normaux, on peut plonger $X_{n+k} \times I$ dans $R_{m+1} = R_m \times R_1$ de manière naturelle. On obtient ainsi la situation suivante: Q_{k+1} est une variété dans $R_m \times I$, portant un champ de vecteurs normaux F_{m-k}; le bord $\partial Q_{k+1} = M'_k - M_k$ est formé de deux variétés M_k et M'_k situées dans $R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$ respectivement; sur M_k et M'_k le champ F_{m-k} se compose de vecteurs situés dans

$R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$ respectivement. Les variétés M_k et M'_k sont orientées de telle manière que les vecteurs de repères tangents «positifs» suivis des vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ déterminent l'orientation positive de $R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$.

Appelons $\overline{\varphi}(M)$ et $\overline{\varphi}'(M')$ les nombres représentant les classes des applications φ et φ' de M_k et M'_k respectivement dans la variété $V_{m,m-k}$ (applications induites par $\mathbf{F}_{m-k}$). Il s'agit de démontrer que

$$\overline{\varphi}'(M') - \chi^*(M'; \mathbf{K}) = \overline{\varphi}(M) - \chi^*(M; \mathbf{K}),$$

l'égalité étant comprise mod 2 et avec le corps $\mathbf{K}$ approprié pour k impair.

Considérons pour cela en chaque point x du bord de Q la normale $\mathbf{v}(x)$ à ce bord, orientée sur M_k *vers l'intérieur* de Q et sur M'_k *vers l'extérieur* de Q.

En faisant suivre les vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ (considéré seulement sur ∂Q) du vecteur $\mathbf{v}$, on obtient une application

$$\varphi_1 : \partial Q \to V_{m+1,m-k+1}$$

avec

$$\overline{\varphi}_1(M) = \overline{\varphi}(M) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_1(M') = \overline{\varphi}'(M').$$

L'extension du champ $\mathbf{v}$ à un champ de vecteurs tangents à Q_{k+1} à l'extérieur de voisinages sphériques V^i (en nombre fini) de singularités, nous conduit en utilisant le raisonnement du lemme 2 au § 4, à

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \Sigma\, \overline{\varphi}_1(S^i) = (-1)^k\, \Sigma j_i,$$

où $S^i = \partial V^i$; cf. (4.6) et (4.7).

Pour k impair, on voit aisément que $\Sigma j_i = \chi(Q)$, par suite

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \chi(Q) \qquad \text{mod } 2.$$

Pour k pair, formons la variété

$$\Delta = Q + \overline{Q} + M \times I + M' \times I$$

obtenue en collant les bords de $M \times I$ et $M' \times I$ avec les parties des bords de Q et $\overline{Q}$ homéomorphes à M et M' respectivement. On a

$$0 = (-1)^{k+1} \chi(\Delta) = 2\, \Sigma j_i + (-1)^{k+1} \chi(M') + (-1)^k \chi(M),$$

d'où $2\, \Sigma j_i = \chi(M') - \chi(M)$.

On en tire

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \tfrac{1}{2}\chi(M') - \tfrac{1}{2}\chi(M),$$

c. à. d.

$$I(M'_k; F'_n) = \overline{\varphi}'(M'_k) - \chi^*(M'_k) = \overline{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k) = I(M_k; F_n)$$

ce qui démontre l'égalité (3.2) du théorème II'.

Pour k impair, le lemme 1 du § 4 nous donne

$$\chi(Q) = \chi^*(M) + \chi^*(M') + \varrho(Q, \mathbf{K}) \qquad \text{mod } 2$$

et par suite

$$I(M_k; F_n) = I(M'_k; F'_n) \qquad \text{mod } 2$$

si et seulement si $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0$ mod 2.

Les égalités (3.3) et (3.4) du théorème II′ reviennent donc à démontrer que

— $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$, le corps des coefficients $\mathbf{K}$ étant $\mathbf{Z}_2$ et k impair quelconque,

— $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$, $\mathbf{K}$ étant un corps de caractéristique différente de 2 et k ayant la forme spéciale $k = 4r + 1$.

a) *Le cas* $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$.

k étant impair, désignons par $2s$ le nombre $k + 1$. Nous allons voir que pour une variété Q_{2s} (avec ou sans bord) plongée dans un espace euclidien R_N avec un champ $\mathbf{F}_{N-2s}$ de repères normaux, on a

Pour toute classe $z_s \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$, *la self-intersection* $S(z_s, z_s) \in \mathbf{Z}_2$ *est nulle.*

Ceci implique[5]) que la matrice d'intersection, d'éléments $s_{ij} = S(z_i, z_j)$, où $z_1, z_2, \ldots, z_p$ forment une base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$ a un rang ϱ pair.

Soit z_s une classe d'homologie quelconque de $H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$; d'après R. Thom [10], (théorème II. 26, page 55) on peut représenter cette classe par une sous-variété m_s de dimension s de Q_{2s}. Soient $\overline{\mathbf{W}}(t)$ et $\mathbf{W}(t)$ les polynômes de H. Whitney [11] des structures normales à m_s dans Q_{2s} et R_N respectivement. Le théorème de dualité de H. Whitney ([12], théorème 15, page 85)[6]) donne

$$\mathbf{W}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t) \cup 1 = \overline{\mathbf{W}}(t) \qquad \bmod 2$$

car la restriction sur m_s de la structure normale à Q_{2s} dans R_N est par hypothèse simple. On a donc

$$\mathbf{W}^s(m_s) = \overline{\mathbf{W}}^s(m_s) = S(z_s, z_s) \qquad \bmod 2$$

($\overline{\mathbf{W}}^s$ est l'obstruction à la construction d'un champ de vecteurs normaux à m_s dans Q_{2s}). D'autre part, on sait (cf. [11], page 131) que $\overline{\overline{\mathbf{W}}}{}^s(m_s) = 0 \bmod 2$ pour toute variété m_s. On a donc

$$S(z_s, z_s) = \overline{\overline{\mathbf{W}}}{}^s(m_s) = 0 \qquad \bmod 2.$$

b) *Le cas où* $k = 4r + 1$ *et Caract* $(\mathbf{K}) \neq 2$.

Si $k = 4r + 1$, on a pour $u, v \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$

$$S(u, v) = (-1)^s \cdot S(v, u) = -S(v; u)$$

($s = 2r + 1$); la matrice d'intersection (s_{ij}) est donc antisymétrique. Si la caractéristique de $\mathbf{K}$ est différente de 2, on en tire $S(z, z) = 0$ pour toute classe d'homologie $z \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$, d'où[5]) $\varrho(Q_{2s}; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$ pour Caract $(\mathbf{K}) \neq 2$.

---

[5]) Si une forme bilinéaire $f(x, y) = s_{ij} x^i y^j$ $[i, j = 1, 2, \ldots, d]$ à coefficients s_{ij} dans un corps quelconque $\mathbf{K}$ satisfait à la condition $f(x, x) = 0$ pour tout x, son rang est nécessairement pair. Pour le voir, on se rendra compte de ce que dans la démonstration du théorème classique où l'on suppose $f(x, y)$ antisymétrique et la caractéristique de $\mathbf{K}$ différente de 2, on n'utilise en fait rien d'autre que l'hypothèse $f(x, x) = 0$ pour tout x, le corps $\mathbf{K}$ pouvant alors être laissé arbitraire.

[6]) La démonstration citée, due à W. T. Wu, du théorème de dualité de H. Whitney utilise la définition de L. Pontrjagin [5] (cf. Note) des classes de Stiefel-Whitney. Ici ces classes apparaissent comme obstructions à l'extension de certains champs de vecteurs (N. Steenrod: Topology of fiber bundles, page 190). L'équivalence de ces deux définitions n'a pas été publiée explicitement, pour autant que je sache; elle est cependant bien connue.

Le théorème II' est ainsi démontré. Le théorème II en est conséquence directe (compte tenu des résultats énoncés au § 1, au lemme 1 en particulier).

La discussion des cas a et b nous a montré que si la variété M_k est le bord d'une variété Q_{k+1}, on a (k étant supposé impair)

$$\chi^*(M_k; \mathbf{K}) = \chi(Q_{k+1}) \quad \text{mod } 2 \tag{5.1}$$

dès que

— k a la forme $k = 4r + 1$ et $\mathrm{Caract}(\mathbf{K}) \neq 2$, ou bien

— la variété Q_{k+1} peut être plongée dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux, le corps $\mathbf{K}$ étant $\mathbf{Z}_2$.

Les deux exemples qui suivent montrent que (5.1) n'est en général pas juste 1°. si Q_{k+1} avec $k = 4r - 1$ ne peut pas être plongée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{m+1} (même en spécialisant le corps K), 2°. pour un variété Q_{k+1} de dimension multiple de 4, plongée avec un champ de repères normaux dans R_{m+1} si le corps K n'a pas la caractéristique 2.

L'*exemple 1* est fourni par l'espace projectif complexe $PC(2)$ de dimension complexe 2 percé d'un trou sphérique V_4. Posons $Q_4 = PC(2) - V_4$. La variété $\partial Q_4 = M_3$ est une sphère de dimension 3. Pour cet exemple

$$\begin{aligned} \chi^*(M_3) &= \chi^*(S_3) = 1 && (\mathbf{K} \text{ quelconque}) \\ \chi(Q_4) &= \chi(PC(2) - V_4) = \chi(PC(2)) - \chi(V_4) \\ &= 3 - 1 = 2 \\ \varrho &= 1 && (\mathbf{K} \text{ quelconque}). \end{aligned}$$

L'*exemple 2* est fourni par l'espace fibré N_3 des vecteurs normaux à la diagonale D dans le produit cartésien $S_2 \times S_2$. La variété N_3 est homéomorphe à l'espace projectif réel P_3. La fibre F (homéomorphe au cercle S_1) de l'espace fibré satisfait à la relation d'homologie

$$2F \sim 0 \quad \text{dans } N_3.$$

Si le corps n'a pas la caractéristique 2, on en tire $F \sim 0$ dans N_3; et comme la classe de F est le seul candidat comme élément non-nul de $H_1(N_3; \mathbf{K})$, il s'ensuit $p_1(N_3; \mathbf{K}) = 0$ si K n'a pas la caractéristique 2. On a les égalités suivantes en prenant pour variété Q_4 un voisinage tubulaire de D dans $S_2 \times S_2$ ayant pour bord $\partial Q_4 = N_3$:

$$\begin{aligned} \chi^*(N_3) &= 1 \quad \text{si } \mathrm{Caract}(\mathbf{K}) \neq 2, \\ &= 2 \quad \text{si } \mathrm{Caract}(\mathbf{K}) = 2, \\ \chi(Q_4) &= \chi(D) = 2 \\ \varrho &= 1 \quad \text{si } \mathrm{Caract}(\mathbf{K}) \neq 2, \\ &= 0 \quad \text{si } \mathrm{Caract}(\mathbf{K}) = 2. \end{aligned}$$

En conformité avec le lemme 2, on a dans les deux cas

$$\chi^*(N_3) = \chi(Q_4) + \varrho \quad \text{mod } 2,$$

mais pour $\mathrm{Caract}(\mathbf{K}) \neq 2$, le rang ϱ n'est pas congruent à 0 mod 2.

§ 6. Propriétés de l'invariant γ

γ nous fournit une fonction sur l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n à valeurs dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_2$ suivant que k est pair ou impair. *Si le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ existe avec la règle d'addition du § 2, ou si X_{n+k} est une sphère, alors γ est un homomorphisme de $\pi^n(X_{n+k})$ ou de $\pi_{n+k}(S_n)$ dans $\mathbf{Z}$ respectivement $\mathbf{Z}_2$ suivant que k est pair ou impair.*

Nous avons fait la remarque au § 2 que l'inverse $\bar{f}$ et la somme avec elle-même $f \dotplus f$ d'une classe d'applications f de X_{n+k} dans S_n ont un sens même si le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ n'existe pas. On a pour ces opérations

$$0 = \gamma(\bar{f} \dotplus f) = \gamma(\bar{f}) + \gamma(f), \quad \text{donc } \gamma(\bar{f}) = -\gamma(f)$$
$$\gamma(f \dotplus f) = 2\,\gamma(f).$$

Si $X_{n+k} = S_{n+k}$, on a le

Théorème III: *Pour une application $f \in \pi_{n+k}(S_n)$ et sa suspension $g = Ef \in \pi_{n+k+1}(S_{n+1})$, on a $\gamma(f) = \gamma(g)$.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que l'on peut interpréter la suspension de la façon suivante:

$$f: S_{n+k} \to S_n$$

étant donnée, $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$, on regarde S_{n+k} comme équateur de S_{n+k+1} dans R_{n+k+2}; on obtient Ef en substituant au champ de repères $\mathbf{F}_n$ le champ $\mathbf{F}_{n+1}$ formé des vecteurs de $\mathbf{F}_n$ suivis de la normale $\mathbf{e}_{n+k+2}$ à S_{n+k} dans S_{n+k+1}.

Appelons $\mathbf{n}$ la normale extérieure à S_{n+k+1} dans R_{n+k+2}; les champs $(\mathbf{F}_n, \mathbf{n})$ et $(\mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{n})$ déterminent des applications

$$\varphi: M_k \to V_{n+k+1,\,n+1}$$
$$\varphi': M_k \to V_{n+k+2,\,n+2}$$

représentées par le même nombre

$$\bar{\varphi}(M_k) = \bar{\varphi}'(M_k).$$

On a donc

$$\gamma(Ef) = \bar{\varphi}'(M_k) - \chi^*(M_k) = \bar{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k) = \gamma(f).$$

Corollaire: *Si γ applique un groupe $\pi_{N+k}(S_N)$ sur zéro, il en est de même de $\pi_{n+k}(S_n)$ pour tout $n \leq N$.*

Théorème IV: *Pour toute application $f: X_{n+k} \to S_n$ avec k pair, $k = 2r$, l'invariant γ est nul: $\gamma(f) = 0$.*

Soit en effet, $(M_k; \mathbf{F}_n)$ un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ tel que $f \simeq \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ et soit $(\bar{M}_k; \bar{\mathbf{F}}_n)$ l'élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ dont la variété $\bar{M}_k$ diffère de M_k par l'orientation et le champ $\bar{\mathbf{F}}_n$ diffère de $\mathbf{F}_n$ par le premier vecteur opposé à celui de $\mathbf{F}_n$. Posons $\bar{f} = \theta(\bar{M}_k; \bar{\mathbf{F}}_n)$. On a (en désignant également par f et $\bar{f}$ les classes d'homotopie des applications f et $\bar{f}$):

$$f \dotplus \bar{f} = 0$$

(cf. § 2, en particulier la remarque finale). Donc

$$\gamma(f \dotplus \bar{f}) = \gamma(f) + \gamma(\bar{f}) = 0.$$

D'autre part

$$\chi^*(M_k) = \chi^*(\overline{M}_k)$$

$$\overline{\psi}(M_k) = \overline{\psi}(\overline{M}_k)$$

donc

$$\gamma(f) = \gamma(\bar{f}).$$

La dimension k étant paire, $\gamma(f)$ est un nombre entier; il s'ensuit

$$\gamma(f) = 0, \text{ c.q.f.d.}$$

Conjecture: *Pour f: $S_{2k+1} \to S_{k+1}$, $\gamma(f)$ est l'invariant de* HOPF *de l'application f, réduit modulo 2.* (k impair).

Cette conjecture[6a]) est vérifiée pour les petites valeurs de k: Pour $k = 1$, on utilise le fait que toute application $f: S_3 \to S_2$ est homotope à un multiple de l'application standard s de HOPF, pour laquelle $\gamma(s) = 1$.
Pour $k = 5$, la valeur de γ est toujours zéro car pour n grand le groupe $\pi_{n+5}(S_n)$ ne contient que l'élément 0[7]).
Pour $k = 3, 7$, on peut utiliser un théorème de P. J. HILTON et J. H. C. WHITEHEAD[8]) qui affirme que si S_k est parallélisable et si $\pi_{2k}(S_k)$ est cyclique, on a $[i_{k+1}, i_{k+1}] = 2\,\theta - Eg$, ou g est le générateur de $\pi_{2k}(S_k)$ et $[i_{k+1}, i_{k+1}]$ le produit de WHITEHEAD de l'identité $i_{k+1}: S_{k+1} \to S_{k+1}$ par elle-même. Ce théorème s'applique pour $k = 3, 7$ car $\pi_6(S_3) = \mathbf{Z}_{12}$ et $\pi_{14}(S_7) = \mathbf{Z}_{120}$ sont cycliques[7]). Comme $\gamma([i_{k+1}, i_{k+1}]) = 0$ (ceci, à cause de $\gamma([\alpha, \beta]) = \gamma(E\,[\alpha, \beta]) = \gamma(0) = 0$[9])), on obtient

$$\gamma(g) = \gamma(Eg) = \gamma(2\,\theta) - \gamma([i_{k+1}, i_{k+1}]) = 0;$$

on vérifie d'autre part aisément que si S_k est parallélisable, $\gamma(s) = 1$ pour l'application standard $s: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ d'invariant de HOPF égal à 1. Pour toute application $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec $k = 3$ ou 7 on a $f \simeq h(f) \cdot s + Ea$ ($a: S_{2k} \to S_k$) avec un certain a, d'où $\gamma(f) = h(f) \cdot \gamma(s) + \gamma(a) = h(f) \bmod 2$, $h(f)$ étant l'invariant de HOPF de f.

Chapitre III. Applications

§ 7. Le théorème de la «curvatura integra»

Dans ce paragraphe nous considérons les variétés M_k (de classe C^1) ayant un modèle dans un espace euclidien R_{k+n} dont l'espace fibré des vecteurs normaux est simple.

Ce modèle $i: M_k \to R_{k+n}$ sera dit un *plongement* si l'application (supposée de classe C^1) est biunivoque; si $i: M_k \to R_{k+n}$ est *localement* biunivoque, nous dirons que la variété M_k est *immergée* dans R_{k+n} ("regular imbedding" respectivement "regular immersion" de H. WHITNEY).

[6a]) Voir note dans l'introduction.

[7]) cf. J. P. SERRE: Notes aux C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1340—1342 (1952) et **236**, 2475—2477 (1953).

[8]) Note on the WHITEHEAD product. Ann. of Math. **58**, 429—442 (1953). Il s'agit du «Theorem (4.23)».

[9]) cf. Theorem (3.11) de G. WHITEHEAD: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460—475 (1946).

L'espace fibré des vecteurs normaux sur $i(M_k)$ étant supposé simple, soit $\mathbf{F}_n$ un champ de repères normaux à $i(M_k)$ dans R_{k+n}; $\mathbf{F}_n$ définit une application

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

par la formule

$$\varphi(x) = \mathbf{F}_n(i(x)).$$

Les théorèmes qui suivent donnent des renseignements sur la classe $\overline{\varphi}(M_k)$ (respectivement c pour $n = 1$) de l'application φ. (cf. les conventions d'orientations que nous avons faites au § 3.)

Théorème V: *La variété M_k étant plongée dans R_{k+1}, on a*

$$c = \chi^*(M_k)$$

l'égalité étant comprise mod 2 pour k impair.

Comme dans les paragraphes précédents, $\chi^*(M_k)$ est la semi-caractéristique de M_k. Le théorème V est valable pour un corps de coefficients $\mathbf{K}$ quelconque.

Démonstration: Fermons l'espace R_{k+1} dans lequel est plongée M_k en une sphère S_{k+1} que nous prenons pour sphère unité dans R_{k+2}.

S_{k+1} jouant alors le rôle de X_{n+k} du § 1 et $\mathbf{F}_1$ étant le champ de vecteurs normaux à M_k dans S_{k+1}, le couple $(M_k; \mathbf{F}_1)$ détermine une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_1)$ de S_{k+1} dans S_1. Comme cette application est homotope à zéro $(\pi_{k+1}(S_1) = 0,\ k \geq 1)$, on en déduit: $\gamma(f) = 0$, c.à.d.:

$$c = \chi^*(M_k) \qquad \text{(mod 2 pour } k \text{ impair)};$$

en effet, $\gamma(f) = c - \chi^*(M_k)$.

Lorsque k est impair, le théorème est ainsi démonstré pour $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$. Remarquons que pour une variété M_k plongée dans R_{k+1} la semi-caractéristique ne dépend pas (modulo 2) du corps de coefficients $\mathbf{K}$ choisi. On le voit immédiatement en appliquant le lemme 1 du § 4 à la région Q_{k+1} bordée par M_k dans R_{k+1}.

Le théorème V est ainsi valable quel que soit le corps $\mathbf{K}$.

Théorème VI: *La variété M_k de dimension paire $k = 2r$ étant plongée dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_n$, on a*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi^*(M_k) \qquad (= \tfrac{1}{2}\chi(M_k)).$$

Démonstration: Fermons R_{k+n} en une sphère S_{k+n} plongée dans R_{n+k+1}. Au couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ de $\mathfrak{M}_k(S_{n+k})$ correspond une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de S_{n+k} dans S_n pour laquelle

$$\gamma(f) = \overline{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k).$$

Le théorème VI est alors conséquence du théorème IV affirmant que pour k pair $\gamma(f) = 0$ pour tout f.

On peut également, comme me l'a fait observer Monsieur H. Hopf démontrer le théorème VI sans utiliser l'invariance de $\gamma(f)$ en reprenant la méthode de H. Hopf [3] employée pour la démonstration originale du théorème de la curvatura integra.

Si l'on se limite au cas $k = 2r$, l'hypothèse du plongement *topologique* dans les théorèmes V et VI est superflue; on peut se contenter de supposer M_k

immergée dans R_{k+n}, l'application $i: M_k \to R_{k+n}$ étant *localement biunivoque* et de classe C^1. On obtient alors le

Théorème VI*: *La variété M_k de dimension paire, $k = 2r$, étant immergée dans R_{n+k} avec un champ de repères normaux F_n, on a*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \tfrac{1}{2}\chi(M_k).$$

Démonstration: On plonge R_{k+n} dans R_m avec m assez grand de sorte que dans un voisinage arbitraire de $i(M_k)$, il existe un modèle topologique de classe C^1, $i'(M_k)$ de M_k. Sur ce modèle il y a un champ de repères normaux qui induit une application $\varphi': M_k \to V_{m,m-k}$ avec $\overline{\varphi}'(M_k) = \overline{\varphi}(M_k)$. Le théorème VI nous fournit

$$\overline{\varphi}(M_k) = \overline{\varphi}'(M_k) = \tfrac{1}{2}\chi(M_k).$$

Pour les théorèmes V, VI, VI*, la variété M_k est supposée orientée par un repère tangent dont les vecteurs, suivis de ceux du champ F_n déterminent l'orientation positive de l'espace euclidien ambiant R_{k+n}. Le nombre représentant la classe de l'application φ est déterminé en utilisant le générateur du groupe $H_k(V_{m,m-k}; Z)$ que nous avons choisi au § 3.

Dans le cas où k est impair, on obtient une généralisation du théorème de la curvatura integra de H. HOPF à condition que $\gamma(f)$ soit nul pour toutes les classes d'applications $f: S_{n+k} \to S_n$.

Théorème VII: *Si $\gamma(f) = 0$ pour toute classe d'applications $f; S_{n+k} \to S_n$, alors pour toute variété M_k plongée avec un champ de repères normaux F_n dans R_{n+k}, on a $\overline{\varphi}(M_k) = \chi^*(M_k) \bmod 2$.*

Si l'on admet la conjecture du § 6, l'hypothèse «$\gamma(f) = 0$ identiquement» du théorème ci-dessus est vérifiée dès que $k \neq 2^q - 1$. [C'est une conséquence de la stabilité de γ par rapport à la suspension (théorème III), des théorèmes de H. FREUDENTHAL et d'un théorème de J. ADEM[10]) affirmant la non-existence d'applications $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec invariant de HOPF impair pour $k \neq 2^q - 1$].

§ 8. Champs de repères tangents à une variété

Les résultats de ce paragraphe qui sont à l'exception des théorèmes IX, X, XI indépendants de ce qui précède sont basés sur le lemme suivant:

La variété orientée M_k étant supposée immergée dans R_{k+n}, cette immersion $i: M_k \to R_{k+n}$ (de classe C^1) induit une «représentation tangentielle» continue de M_k

$$T: M_k \to H(k, n)$$

qui fait correspondre à chaque point x de M_k le k-plan orienté $T(x)$ passant par l'origine dans R_{k+n} qui est parallèle au plan tangent à $i(M_k)$ en $i(x)$.

Lemme: *Si la variété M_k possède un modèle $i(M_k)$ dans R_{k+n} et que la représentation tangentielle correspondante $T: M_k \to H(k, n)$ est homotope à zéro, M_k est parallélisable.*

---

[10]) The iteration of the STEENROD squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. 38, 720—726 (1952).

Ce lemme est conséquence immédiate de ce que T étant homotope à zéro est une trace pour la fibration

$$\pi' : V_{n+k,k} \to H(k, n)$$

qui projette une suite de k vecteurs orthonormés sur le k-plan sous-tendu par ces vecteurs.

Il admet d'ailleurs une réciproque (que nous utiliserons pour $M_k = S_k$ et $M_k = P_k =$ espace projectif réel):

Si la variété M_k est parallélisable, tout modèle de M_k immergé dans un espace euclidien R_{n+k} avec $n \geqq k+1$ donne lieu à une représentation tangentielle de M_k homotope à zéro[11]).

Soit en effet

$$\omega : M_k \to V_{n+k,k}$$

l'application de M_k dans la variété de Stiefel $V_{n+k,k}$ fournie par un champ de repères tangents sur un modèle quelconque $i(M_k)$ de M_k dans R_{n+k}.

Comme $n \geqq k+1$ par hypothèse, ω est homotope à zéro; or l'application tangentielle

$$T : M_k \to H(k, n)$$

(induite par l'immersion i) est la composition de ω et de la projection

$$\pi' : V_{n+k,k} \to H(k, n)$$

déjà considérée. T est donc également homotope à zéro.

Pour la sphère nous utiliserons les notations suivantes: au plongement naturel de la sphère S_k dans R_{k+1} comme lieu géométrique des points $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ avec $\mathbf{x}^2 = 1$, correspond, si l'on regarde R_{k+1} comme sous-espace de R_{n+k} une représentation tangentielle

$$\tau_n : S_k \to H(k, n).$$

Désignons par ε_n l'élément générateur du groupe $H_k(V_{n+k,n}; Z)$ que nous avons déjà introduit au § 3 et par π la projection

$$\pi : V_{n+k,n} \to H(k, n)$$

qui fait correspondre à toute suite de n vecteurs orthonormés de R_{n+k} le k-plan orthogonal à ces n vecteurs. On peut s'arranger (par des conventions d'orientation que nous n'avons pas besoin de préciser) pour que $\tau_n = \pi \cdot \varepsilon_n$

La sphère S_k est parallélisable si et seulement si l'application $\tau_n : S_k \to H(k,n)$ avec $n \geqq k+1$ est homotope à zéro.

Théorème VIII: *Si la sphère S_k est parallélisable, toute variété M_k qui peut être immergée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{n+k} (n quelconque) l'est également.*

Pour le cas $n = 1$, voir J. Milnor l. c.[1]).

Démonstration: On ne restreint pas la généralité du théorème en supposant $n \geqq k+1$.

Choisissons un champ de repères normaux à M_k dans R_{k+n}; ce champ induit une application

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}.$$

---

[11]) Et porte par conséquent un champ F_n de repères normaux.

Comme $V_{n+k,n}$ est $(k-1)$-connexe ($\pi_i(V_{n+k,n}) = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$), il existe une application

$$\varphi' : M_k \to V_{k+n,n}$$

homotope à φ et pour laquelle $\varphi'(M_k^{(k-1)}) = \text{const.}$, $M_k^{(k-1)}$ désignant le squelette à $(k-1)$ dimensions d'une décomposition cellulaire quelconque mais fixe de M_k.

Pour chaque cellule $c_k^{(i)}$ de dimension k de $M_k^{(k)}$ l'application φ' définit un élément $a_i \cdot \varepsilon_n$ du groupe d'ahomotopie $\pi_k(V_{n+k,n})$.

Considérons l'application

$$T' = \pi \cdot \varphi';$$

elle jouit des propriétés suivantes:

a) T' est homotope à l'application tangentielle T correspondant à l'immersion $M_k \to R_{n+k}$,

b) T' est constant sur $M_k^{(k-1)}$; sur $c_k^{(i)}$, T' représente l'élément $a_i \cdot \tau_n$ du groupe d'homotopie $\pi_k(H(k, n))$.

La sphère S_k étant par hypothèse parallélisable, d'après la réciproque au lemme, l'application τ_n est homotope à zéro. D'après b), T' est également homotope à zéro; d'après a) T l'est aussi.

L'application tangentielle T correspondant à l'immersion $M_k \to R_{n+k}$ étant homotope à zéro, d'après le lemme, M_k est parallélisable.

Corollaire: *Pour pouvoir immerger l'espace projectif réel P_k dans R_{n+k} ($n \geq k+1$) avec un champ de repères normaux, il est nécessaire et suffisant que P_k soit parallélisable.*

Si P_k est parallélisable, l'existence d'un champ de repères normaux est donnée par la note[11]).

Si P_k est immergé dans R_{n+k} (n quelconque) avec un champ de repères normaux, la sphère S_k est parallélisable (car la composition des applications $p: S_k \to P_k$ et $T: P_k \to H(k, n)$ est alors homotope à zéro), et par suite du théorème VIII, l'espace projectif P_k possède également un champ de repères tangents.

Théorème IX: *Pour qu'une variété de dimension paire $M_k (k = 2r)$ que l'on peut immerger dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux (n quelconque) soit parallélisable, il est nécessaire et suffisant que sa caractéristique* d'Euler *soit nulle.*

Démonstration: Le champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux à M_k dans R_{k+n} induit une application

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

dont la classe, d'après le théorème VI*, est donnée par

$$\overline{\varphi}(M_k) = \tfrac{1}{2}\chi(M_k) \qquad (k = 2r).$$

Par ailleurs, on a

$$T = \pi \cdot \varphi,$$

où T est l'application tangentielle correspondant à l'immersion donnée $M_k \to R_{n+k}$.

Si $\chi(M_k) = 0$, la classe $\overline{\varphi}(M_k)$ étant également nulle l'application φ est homotope à zéro. L'application tangentielle T étant, par suite de $T = \pi\,\varphi$, également homotope à zéro, M_k est (d'après le lemme) parallélisable.

La réciproque est connue.

Théorème X: *Si une variété M_k plongée dans R_{k+1}, k impair, a une semi-caractéristique paire, elle est parallélisable.*

Démonstration: R_{k+1} étant fermé en une sphère que nous prenons pour sphère unité dans R_{k+2}, on obtient sur M_k un champ de repères normaux formé de deux vecteurs. La classe de l'application

$$\varphi: M_k \to V_{k+2,2}$$

fournie par ce champ de repères, $\overline{\varphi}(M_k)$, est égale mod 2 à la semi-caractéristique de M_k; si celle-ci est paire, φ est homotope à zéro et par suite M_k est parallélisable.

Le théorème X est un cas particulier du résultat suivant:

Théorème XI: *Si une variété M_k peut être plongée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{k+n} de dimension $k+n$ telle que pour toute application $f: S_{k+n} \to S_n$ on ait $\gamma(f) = 0$, et si sa semi-caractéristique est nulle, elle est parallélisable.*

La signification de l'hypothèse $\gamma(f) = 0$ dépend de la conjecture du § 6.

En appliquant les théorèmes IX et X aux produits de sphères on trouve

Théorème XII: *Pour qu'un produit de sphères*

$$\Pi_k = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m} \qquad (r_i \geqq 1)$$

contenant au moins deux facteurs ($m \geqq 2$) *soit parallélisable, il faut et il suffit qu'au moins un des facteurs S_{r_i} ait une dimension r_i impaire.*

Autrement dit, Π_k est parallélisable si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle.

Démonstration: Montrons que l'on peut plonger Π_k dans R_{k+1}. En effet, pour $m = 1$ c'est banal; supposons que

$$\Pi_{k'} = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_{m-1}}$$

soit plongée dans $R_{k'+1}$. Par déplacement de l'image $f(\Pi_{k'})$ de $\Pi_{k'}$ dans $R_{k'+1}$ on obtient un plongement tel que pour tout point $u \in \Pi_{k'}$ la $(k'+1)^{\text{ème}}$ composante $f_{k'+1}(u)$ de son image dans $R_{k'+1}$ soit positive; nous avons posé

$$f(u) = \{f_1(u), \ldots, f_{k'}(u), f_{k'+1}(u)\}.$$

En désignant par $\xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_{r_m+1}\right)$ les coordonnées (dans R_{r_m+1}) d'un point courant de S_{r_m}, on peut définir le plongement

$$\varphi(\Pi_{k'} \times S_{r_m}) \subset R_{k+1}$$

de $\Pi_k = \Pi_{k'} \times S_{r_m}$ dans R_{k+1} par la formule

$$\varphi(u, \xi) = \left\{f_1(u), \ldots, f_{k'}(u), \xi_1 \sqrt{f_{k'+1}(u)}, \ldots, \xi_{r_m+1} \sqrt{f_{k'+1}(u)}\right\}.$$

Il suffit alors (pour démontrer le théorème XII) de vérifier que si l'une des sphères a une dimension impaire, la semi-caractéristique est nulle.

On peut aussi achever la démonstration directement:

L'image $f(\Pi_k)$ borde dans R_{k+1} une région homéomorphe au produit

$$V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m}.$$

On peut admettre que r_2 est impair en prenant les facteurs dans l'ordre désiré. Le degré de Brouwer de l'application de Gauss $\Pi_k \to S_k$ (fournie par le plongement dans R_{k+1}) est égal à

$$c = \chi(V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m}).$$

D'autre part, par suite de

$$\chi(K_1 \times K_2) = \chi(K_1) \cdot \chi(K_2),$$

la caractéristique

$$\chi(V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m})$$

est nulle, l'une des sphères (S_{r_2}) ayant une dimension impaire et par suite une caractéristique nulle.

On a donc $c = 0$, et d'après le lemme du début du paragraphe, Π_k est parallélisable.

§ 9. Complément à un théorème de M. Morse

M. Morse [4] considère sur une variété Σ_n orientable, de classe C^2, une fonction numérique f de classe C^2 dont les points critiques sont non-dégénérés (et par suite isolés); un point critique est dit non-dégénéré si pour la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ exprimant f à l'aide de coordonnées locales, la matrice

$$(\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j) \qquad [i, j = 1, 2, \ldots, n]$$

a en ce point critique le rang maximum n. On suppose en outre que les *valeurs* critiques pour deux points critiques distincts sont dictinctes.

L'ensemble des points de Σ_n satisfaisant à $f(x) = a$ est une sous-variété (que M. Morse désigne par f^a) ayant au plus une singularité lorsque a est valeur critique.

Le théorème (5.1) de [4] donne des renseignements sur les différences $\Delta B_i = p_i(f^{c+\varepsilon}) - p_i(f^{c-\varepsilon})$, c étant une valeur critique, $\varepsilon > 0$ assez petit, le domaine de coefficients étant un corps $\mathbf{K}$ quelconque. Nous n'étudierons que le cas où n est pair pour lequel le résultat de M. Morse s'exprime par le

Théorème (M. Morse); *La valeur c étant prise par f en un seul point critique non-dégénéré d'index s, les différences ΔB_i ont* (pour n pair) *les valeurs suivantes*:

— *pour* $s = 0$: $\Delta B_0 = \Delta B_{n+1} = 1$,

— *pour* $s = n$: $\Delta B_{n+1} = \Delta B_0 = -1$,

— *pour* $0 < s < n$, $s \neq n/2$: *on a l'alternative* $\begin{cases} \Delta B_s = \Delta B_{n-s-1} = 1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_{n-s} = -1, \end{cases}$

— *pour* $s = n/2$: *on a l'alternative* $\begin{cases} \Delta B_s = \Delta B_{s-1} = 1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_s = -1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0; \end{cases}$

Toutes les autres différences ΔB_i sont nulles.

Nous allons voir que la connaissance de l'homologie de Σ_n permet de décider si le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» du théorème de M. MORSE peut ou non se présenter.

Soit $Q_n = f_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$ la région de Σ_n ayant pour bord $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ et caractérisée par les inégalités

$$c - \varepsilon \leqq f(x) \leqq c + \varepsilon;$$

le lemme 1 du § 4 appliqué à cette région nous donne

$$\chi(Q_n) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i + \varrho(Q, K) \qquad \text{mod } 2.$$

Pour $s \neq n/2$, on a

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i = 1 \qquad \text{mod } 2$$

comme on peut le vérifier en consultant les trois premiers cas du théorème de M. MORSE.

Pour $s = n/2$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i = \Delta B_{s-1} = \Delta B_s.$$

La considération du champ de vecteurs tangents à Σ_n donné par le gradient de f fournit aisément

$$\chi(Q_n) = 1 \qquad \text{(au signe près)};$$

il s'ensuit

— pour $s \neq n/2$: $\varrho(Q, K) = 0$ mod 2

— pour $s = n/2$: $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 1 - \varrho(Q, K)$ mod 2.

Lemme: *Dans le théorème de* M. MORSE *cité, le cas* «$s = n/2$, $\mathrm{A} B_{s-1} = \mathrm{A} B_s = 0$» *intervient si et seulement si le rang* $\varrho(Q, K)$ *de la matrice d'intersection pour* $H_{n/2}(Q; K)$ *est égal* à *1 mod 2.* $(Q = f_{c-\varepsilon, c+\varepsilon})$.

Remarque: On peut d'ailleurs montrer en analysant de plus près l'homologie de Q_n que $0 \leqq \varrho(Q, K) \leqq 1$. Il s'ensuit que $\varrho = 1$ mod 2 et $\varrho = 1$ sont équivalents. Ceci permet d'affirmer que le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» du théorème de M. MORSE *intervient si et seulement si il existe un cycle $z_{n/2}$ dans Q_n avec $S(z,z) \neq 0$.* Nous n'utiliserons pas cette remarque.

La discussion des valeurs de ϱ (au § 5) nous fournit en conséquence du lemme ci-dessus:

Le cas «$s = n/2, \Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» est impossible

— si Σ_n (n pair) peut être plongée dans un espace euclidien R_N avec un champ de repères normaux, les coefficients étant dans $\mathbf{Z}_2$,

— si n a la forme $n = 4r + 2$, Σ_{4r+2} étant quelconque, en coefficients rationnels (ou plus généralement dans un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2).

Si au contraire, pour une variété orientable fermée Σ_n de dimension n paire, on a $\varrho(\Sigma_n) = 1$ mod 2 (ce qui a lieu p. ex. pour les espaces projectifs complexes $PC(2r)$ de dimension topologique $4r$) toute fonction ayant les

propriétés citées admet sur Σ_n au moins un point critique d'index $s = n/2$ et pour au moins un tel point, c'est le troisième cas de l'alternative, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$, qui se présente.

Nous allons voir que si le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» ne se présentait pas, il s'ensuivrait $\chi(\Sigma_n) = 0 \mod 2$. Comme $\varrho(\Sigma_n) = 1 \mod 2$ implique pour une variété fermée $\chi(\Sigma_n) = 1 \mod 2$, l'assertion de l'alinéat précédent sera alors démontrée. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_N$ les valeurs critiques rangées par valeurs croissantes: $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$; supposons que pour tout point critique $P(c_i)$, on ait $\varrho(Q^{(i)}, K) = 0 \mod 2$; on aurait

$$\chi(Q^{(i)}) = \chi^*(f^{c_i+\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_i-\varepsilon}) \qquad \mod 2$$

pour tout i. Remarquons que $f^{c_{i-1}+\varepsilon}$ et $f^{c_i-\varepsilon}$ sont homéomorphes, donc $\chi^*(f^{c_{i-1}+\varepsilon}) = \chi^*(f^{c_i-\varepsilon})$. Par suite

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma_n) = \sum_{i=1}^{N} \chi(Q^{(i)}) &= \sum_{i=1}^{N} [\chi^*(f^{c_i+\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_i-\varepsilon})] && \mod 2,\\ &= \chi^*(f^{c_N+\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_1-\varepsilon}) && \mod 2.\end{aligned}$$

Comme $f^{c_1-\varepsilon}$ et $f^{c_N+\varepsilon}$ sont vides, on a

$$\chi(\Sigma_n) = 0 \qquad \mod 2.$$

Ces considérations permettent de répondre à une question qui a été soulevée par R. THOM:

Se peut-il que le produit $S_p \times S_p$ borde une variété W_{2p+1} de telle sorte que ni $S_p \times b$ ni $a \times S_p$ ne bordent dans W_{2p+1} mais seulement une combinaison linéaire

$$\alpha(S_p \times b) + \beta(a \times S_p)$$

avec $\alpha \cdot \beta \neq 0$?

On voit aisément que ceci n'est au plus possible que pour p impair.

Pour $p = 2r - 1$, on construit un tel exemple de la manière suivante:

Soit $PC(2r)$ l'espace projectif complexe de dimension topologique $4r$; soit f une fonction numérique sur $PC(2r)$ satisfaisant aux hypothèses de M. MORSE (les points critiques sont non dégénérés et les valeurs critiques distinctes). D'après la remarque que nous avons faite plus haut, il existe un point critique C de cette fonction dont l'index est $2r$ et pour lequel $\varrho(Q, \mathrm{K}) = 1 \mod 2$ (Q est caractérisée par $c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon$, en posant $c = f(C)$). L'ensemble caractérisé par $f(x) = c$ est une variété f^c avec une seule singularité en C, qui avec des coordonnées locales convenables peut être représentée dans le voisinage de C par

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2r}^2 - x_{2r+1}^2 - \cdots - x_{4r}^2 = 0.$$

Si l'on retire de f^c les points intérieurs à la boule

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{4r}^2 \leq 2\alpha$$

on obtient une variété W_{4r-1} dont le bord est représenté par les équations

$$\begin{aligned}x_1^2 + \cdots + x_{2r}^2 - x_{2r+1}^2 - \cdots - x_{4r}^2 &= 0\\ x_1^2 + \cdots + x_{2r}^2 + x_{2r+1}^2 + \cdots + x_{4r}^2 &= 2\alpha;\end{aligned}$$

on a donc

$$\partial W_{4r-1} \approx S_{2r-1} \times S_{2r-1}.$$

Une base d'homologie z', z'' de $H_p(\partial W_{4r-1})$, $p = 2r - 1$, est distinguée:
z' est constitué par l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_{4r})$ satisfaisant à $x_1^2 + + x_2^2 + \cdots + x_{2r}^2 = \alpha$, $x_{2r+1} = a_{2r+1}$, $x_{2r+2} = a_{2r+2}, \ldots, x_{4r} = a_{4r}$; les $a_{2r+1}, \ldots, a_{4r}$ étant des constantes satisfaisant à $a_{2r+1}^2 + \cdots + a_{4r}^2 = \alpha$.
z'' est obtenu en permutant dans la définition de z', x_i avec x_{2r+i} $(i = 1, 2, \ldots, 2r)$.
On vérifie que par suite de $\varrho(Q, \mathbf{K}) = 1 \bmod 2$, aucun des cycles z', z'' ne borde dans W_{4r-1}; par contre

$$\alpha \cdot z' + \beta \cdot z'' \sim 0 \qquad \text{dans } W_{4r-1}$$

pour une certaine combinaison linéaire avec $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $\alpha \cdot \beta \neq 0$. La démonstration consiste à reconnaître que si z' ou z'' borde dans W, tout cycle z_{2r} de Q est homologue (dans Q) à un cycle de $\partial Q = f^{c+\varepsilon} - f^{c+\varepsilon}$; comme pour un cycle z dans $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ la self-intersection $S(z,z)$ dans Q est nulle, il s'ensuit que l'hypothèse z' ou $z'' \sim 0$ dans W implique $\varrho(Q, \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$.

Note

Le lemme suivant contribue à élucider la signification de l'hypothèse faite au début du § 5 : X_{n+k} est plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_{m-n-k}$ sur X_{n+k} dans R_m.

Lemme: *Si la variété X_p peut être immergée dans un espace euclidien R_{p+q} avec un champ $\mathbf{F}_q$ de repères normaux, toutes ses classes caractéristiques sont nulles à l'exception de la caractéristique d'*Euler *qui est paire.*

Démonstration: Nous utilisons la définition suivante des classes caractéristiques donnée par L. Pontrjagin [5]:
soit T l'application tangentielle

$$T : X_p \to H(p, q)$$

correspondant à l'immersion de X_p dans un espace euclidien R_{p+q}. Les classes caractéristiques x^r de X_p sont les images par l'homomorphisme dual T^* des classes de cohomologie v^r $(0 < r \leqq p)$ de $H(p, q) : x^r = T^* v^r$.

L. Pontrjagin a montré que les classes x^r ne dépendent que de X_p (et pas de l'immersion $X_p \to R_{p+q}$) pour q assez grand.

Supposons maintenant que X_p soit immergée dans R_{p+q} avec un champ $\mathbf{F}_q$ de repères normaux; $\mathbf{F}_q$ induit une application

$$\varphi : X_p \to V_{p+q,q}$$

et $T = \pi \cdot \varphi$, où π désigne la fibration

$$\pi : V_{p+q,q} \to H(p, q)$$

qui applique une suite de q vecteurs de R_{p+q} sur le p-plan qui leur est orthogonal (les orientations étant convenablement choisies).

Pour $0 < r < p$, on a $H^r(V_{p+q,q}) = 0$; pour $v^r \in H^r(H(p, q))$, on a donc

$$x^r = T^* v^r = \varphi^* \pi^* v^r = \varphi^* (0) = 0,$$

car $\pi^* v^r \in H^r(V_{p+q,q})$.

Pour $r = p$, utilisons

$$\varphi(X_p) \sim \overline{\varphi}(X_p) \cdot \varepsilon(S_p) \qquad \text{dans } V_{p+q,q}$$

d'où

$$T(X_p) \sim \overline{\varphi}(X_p) \cdot \tau(S_p) \qquad \text{dans } H(p,q).$$

On a alors pour une classe $v^p \in H^p(H(p,q))$ et son image $x^p = T^* v^p$:

$$x^p(X_p) = (T^* v^p)(X_p) = v^p(T(X_p)) = \overline{\varphi}(X_p) \cdot v^p(\tau(S_p)).$$

Les classes caractéristiques $s^p = \tau^* v^p$ des sphères sont nulles : $s^p(S_p) = v^p(\tau(S_p)) = 0$, à l'exception de la caractéristique d'Euler qui est paire, donc

$$x^p(X_p) = 0, \quad \chi(X_p) \text{ est paire.}$$

Publications citées

[1] P. Alexandroff-H. Hopf: Topologie. Springer 1935. — [2] B. Eckmann: Systeme von Richtungsfeldern auf Sphären und stetige Lösungen linearer Gleichungen. Comm. Math. Helv. 15, 1—26 (1942). — [3] H. Hopf: Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Math. Annalen 95, 340—367 (1925). — [4] M. Morse: Homology relations on regular orientable manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. 38, 247—258 (1952). — [5] L. Pontrjagin: Cycles caractéristiques des variétés différentiables. Math. Sbornik 21, 233—283 (1947) (russe). — [6] L. Pontrjagin: Eine lokale Methode zur Diskussion der Abbildungen der Sphäre S^{n+k} auf die Sphäre S^n. Exposé de P. Alexandroff Rome. 1950 (non publié). — [7] L. Pontrjagin: Classification homotopique des applications de la sphère à $(n+2)$ dimensions sur celle à n dimensions. C. r. Acad. Sci. URSS 70 (1950) (russe). — [8] E. Spanier: Borsuk's cohomotopy groups. Ann. of Math. 50, 203—245 (1949). — [9] E. Stiefel: Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. 8, 305—353 (1935). — [10] R. Thom: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helv. 28, 17—86 (1954). — [11] H. Whitney: Lectures in Topology. Michigan University Press. 1941. — [12] W. T. Wu: Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques. Thèse. Hermann 1952.

(Eingegangen am 8. Juli 1955)

Zeller, K.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 253—257 (1956)

Vergleich des Abelverfahrens mit gewöhnlichen Matrixverfahren

Von

Karl Zeller in Tübingen

1. Einleitung

Im folgenden bedeutet B stets ein Summierungsverfahren der Gestalt

$$B\text{-}\Sigma u_m = \lim_n t_n, \quad t_n = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} u_m \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ferner betrachten wir das Abelverfahren A:

$$A\text{-}\Sigma u_m = \lim_{y\to 1} t(y), \quad t(y) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m y^m \qquad (0 \leq y < 1).$$

Das Abelverfahren ist zwar für die Anwendungen sehr günstig, vom allgemeinen Standpunkt aus sind jedoch die Verfahren B leichter zu handhaben. Wir fragen daher, ob wir A durch ein B ersetzen können, d. h. ob es ein Verfahren B gibt, das genau dieselben Reihen wie A summiert? In [7] wurde gezeigt, daß jedenfalls kein zeilenfinites B dieser Forderung genügt; nach S. Mazur beweist man das am einfachsten durch Vergleich der Größenordnungsbedingungen für A bzw. B.

In dieser Arbeit erhalten wir das weitergehende Resultat, daß es überhaupt kein B, also auch kein zeileninfinites, mit demselben Wirkfeld wie A gibt (Satz 3). Zum Beweis fassen wir die Wirkfelder von A und B als F-Räume bzw. FK-Räume auf und benützen die Eigenschaft, daß der bei A als Bildbereich auftretende Banachraum der stetigen Funktionen einen nichtseparablen Dual hat, während dies bei dem zu B gehörigen Bildraum der konvergenten Folgen nicht der Fall ist. Dabei sind noch einige vorbereitende Umformungen nötig, bei denen wir neben einem Polynom-Approximationssatz einen Momentensatz von Mikusiński [4] gebrauchen, der auch schon durch Włodarski [5] beim A-Verfahren Verwendung gefunden hat.

Bei der Untersuchung fallen zwei weitere Ergebnisse an. Das eine (Satz 2) besagt, roh gesprochen, daß das Abelverfahren keine nichttrivialen Konvergenzfaktoren besitzt. Das andere (Satz 1) bedeutet eine Verschärfung von Satz 3 für zeilenfinite B: Es gibt kein permanentes zeilenfinites Verfahren B, dessen Wirkfeld dasjenige von A umfaßt. Wir bemerken dazu, daß Erdös und Piranian [1] schon ein permanentes Matrixverfahren C konstruiert haben, das von keinem permanenten zeilenfiniten Verfahren B übertroffen wird; die Ergebnisse dieser Verfasser kann man mit Hilfe der F-Räume übersichtlicher und allgemeiner fassen. Durch Zeilenauswahl aus A erhält man zeileninfinite Verfahren B, die A umfassen.

2. Hilfssätze

Wir müssen hier die F- und FK-Räume als bekannt voraussetzen und verweisen auf [2, 5, 6, 8]. Die Wirkfelder unserer Summierungsverfahren fassen wir als FK-Räume auf, wobei wir statt der Reihe Σu_m den Vektor $\mathfrak{u} = \{u_m\}$ betrachten.

Lemma 1. *Das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ des Abelverfahrens ist ein FK-Raum mit den Halbnormen*

$$p(\mathfrak{u}) = \sup_{0 \leq y < 1} |t(y)|,$$

$$p_j(\mathfrak{u}) = \sup_{m=0,1,\ldots} |u_m y_j^m| \qquad \left(y_j = \frac{j}{j+1}, j = 1, 2, \ldots\right).$$

Beweis. Siehe [5], [8] § 8.

Eine im abgeschlossenen Intervall 0,1 erklärte Funktion von beschränkter Schwankung wollen wir normiert nennen, wenn sie in jedem inneren Punkte des Intervalls den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte annimmt und im Punkte 1 verschwindet.

Lemma 2. *Umfaßt das Wirkfeld von B dasjenige von A, so gilt eine Darstellung*

$$b_{nm} = \int_0^1 y^m \, dg_n(y) + c_{nm} \qquad (n, m = 0, 1, \ldots)$$

$$\text{mit } \operatorname{Var} g_n \leq R \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} |c_{nm}| \, y_r^{-m} \leq R \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

wobei die g_n normiert sind und der Index r sowie die Schranke R nicht von n abhängen.

Beweis. Unter der Voraussetzung des Lemmas vermittelt B eine stetige lineare Abbildung des FK-Raumes $\mathfrak{A}$ in den FK-Raum $\mathfrak{S}_c$ der konvergenten Folgen ([6], Satz 4.4). Daher gilt mit geeigneten r und R^*

$$q(\mathfrak{u}) = \sup_{n=0,\ldots} \left| \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} u_m \right| \leq R^* [p(\mathfrak{u}) + p_1(\mathfrak{u}) + \cdots + p_r(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A})$$

([6], Satz 3.2), wobei q — ebenso wie unten f_n — durch die Gleichung definiert wird. Wegen

$$p_j(\mathfrak{u}) \leq p_r(\mathfrak{u}) \qquad (j \leq r, \ \mathfrak{u} \in \mathfrak{A})$$

besteht mit geeignetem R sogar eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{u}) \leq R[p(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}).$$

Insbesondere gilt für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|f_n(\mathfrak{u})| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} u_m \right| \leq R[p(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}).$$

Jede stetige Linearform f_n läßt sich zerlegen in zwei Teil-Linearformen, die dem Betrage nach $\leq R \cdot p(\mathfrak{u})$ bzw. $\leq R \cdot p_r(\mathfrak{u})$ sind ([6], Satz 3.4). Aus der bekannten Gestalt der stetigen Linearformen im B-Raum der stetigen Funktionen bzw. im B-Raum der Nullfolgen ergibt sich

$$f_n(\mathfrak{u}) = \int_0^1 t(y) \, dg_n(y) + \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} u_m \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A})$$

mit

$$\operatorname{Var} g_n \leqq R \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} |c_{nm}|\, y_r^{-m} \leqq R \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Hier kann man die g_n normiert wählen ($g_n(1) = 0$ erreicht man durch Addition einer Konstanten). Nun setzen wir noch für u nacheinander die Vektoren $\{1, 0, 0, \ldots\}$, $\{0, 1, 0, 0, \ldots\}$, ... ein und erhalten so die gewünschten Ausdrücke für b_{nm}.

Lemma 3. *Ist*

$$\int_0^1 y^m \, dg(y) = O(d^m)$$

für ein d mit $0 < d < 1$ und g normiert, so ist

$$g(y) = 0 \ \text{für} \ d < y \leqq 1.$$

Beweis. Es gilt (da bei partieller Integration die ausintegrierten Bestandteile verschwinden) für $m > 0$

$$\int_0^1 y^m \, dg(y) = \int_0^1 g(y) \, dy^m = \int_0^1 g(y) \cdot m \cdot y^{m-1} dy = O(d^m).$$

Nach einem Ergebnis von Mikusiński [4] folgt aus der rechten Gleichung $g(y) = 0$ fast überall in $d < y < 1$, und daher ist wegen der Normierung $g(y)$ Null im genannten Intervall.

3. Zeilenfinite Verfahren

Aus den Lemmata folgen unmittelbar zwei Ergebnisse.

Satz 1. *Kein zeilenfinites permanentes Verfahren B hat ein Wirkfeld, das dasjenige von A umfaßt.*

Beweis. Sei B nicht schwächer als A und zeilenfinit. Nach Lemma 2 gilt dann für jedes n (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$\int_0^1 y^m \, dg_n(y) = O(y_r^m) \quad (\text{für } m \to \infty \text{ und } n = 0, 1, \ldots),$$

also nach Lemma 3

$$g_n(y) = 0 \quad \text{für} \ y_r < y \leqq 1 \ \text{und} \ n = 0, 1, \ldots$$

und damit nach Lemma 2

$$|b_{nm}| \leqq R \cdot y_r^m + R \cdot y_r^m \qquad (n, m = 0, 1, \ldots),$$

was sich mit der Permanenz nicht verträgt.

Der Beweis zeigt, wie man die Voraussetzung „zeilenfinit" noch abschwächen kann.

Satz 2. *Sind die Zahlen b_m so beschaffen, daß $\Sigma\, b_m u_m$ für jedes $\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}$ konvergiert, so gilt*

$$|b_m| < R \cdot r^m$$

mit einem $r < 1$ und $R < \infty$.

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß das Matrixverfahren

$$\begin{pmatrix} b_0 & & O \\ b_0 & b_1 & \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

jedes $\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}$ summiert. Die Beweisführung von Satz 1 ergibt die Behauptung.

Satz 2 kann auch direkt mit Hilfe von Čebyšev-Polynomen bewiesen werden.

4. Der Inäquivalenzsatz

Wir kommen zum Hauptergebnis der Arbeit.

Satz 3. *Es gibt kein Verfahren B, das dasselbe Wirkfeld wie A besitzt.*

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges Verfahren B und führen die Annahme $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ zum Widerspruch. Aus der Annahme folgt zunächst nach Satz 2, daß die Transformation B im Anwendungsbereich von A (d. h. für die $\mathfrak{u}$ mit $u_m = O(r^m)$ für jedes $r > 1$) erklärt ist. Bezeichnet q die im Beweis von Lemma 2 erklärte Funktion, so ist daher $\mathfrak{B}$ ein FK-Raum mit den Halbnormen

$$q(\mathfrak{u}),\ p_1(\mathfrak{u}),\ p_2(\mathfrak{u}), \ldots$$

(vgl. [6], Satz 4.8). Wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt

$$q(\mathfrak{u}) \leqq K\,[p(\mathfrak{u}) + p_k(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}),$$

wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist

$$p(\mathfrak{u}) \leqq L\,[q(\mathfrak{u}) + p_l(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{B})$$

mit geeigneten k, l, K, L (vgl. [8], Lemma 7.1). Hierin dürfen wir k und l durch $r = \mathrm{Max}(k, l)$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} q(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u}) &\leqq K\,[p(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] + p_r(\mathfrak{u}) \\ &\leqq K \cdot L \cdot [q(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] + (K+1)\,p_r(\mathfrak{u}) \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}), \end{aligned}$$

zusammen also eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u}) \leqq R\,[p(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] \leqq R^2\,[q(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u})] \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{A}).$$

Wir sehen daraus, daß die Normen $q + p_r$ und $p + p_r$ im Bereich $\mathfrak{P}$ der abbrechenden Folgen $\mathfrak{u} = \{u_k\}$ (denen Polynome $t(y)$ entsprechen) dieselbe Topologie bestimmen.

Die Gesamtheit der bezüglich $q + p_r$ stetigen Linearformen in $\mathfrak{P}$ ist gegeben durch

$$f(\mathfrak{u}) = d \lim_{n\to\infty} t_n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n t_n + \sum_{m=0}^{\infty} c_k u_k \quad (\Sigma\,|d_n| < \infty,\ \Sigma\,|c_m|\, y_r^{-m} < \infty).$$

Die Norm einer solchen Linearform genügt der Ungleichung

$$\|f\| \leqq |d| + \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| + \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|\, y_r^{-m}.$$

Diejenigen f, die eine Darstellung der obigen Gestalt gestatten, bei der alle Koeffizienten c, d rational und nur endlich viele der Koeffizienten ungleich Null sind, bilden eine abzählbare Menge, die im Dual dicht liegt (bezüglich der starken Topologie des Duals). Der Dual ist also separabel.

Anders der Dual bei der Norm $p + p_r$. Hier sind jedenfalls die

$$f_y(\mathfrak{u}) = t(y)$$

für jedes y, $y_r < y < 1$, stetige Linearformen. Die Nichtseparabilität des Duals ist erwiesen, wenn wir zu jedem Paar x, y mit $y_r < x < y < 1$ ein $\mathfrak{u} \in \mathfrak{P}$ angeben mit der Eigenschaft

$$|f_x(\mathfrak{u}) - f_y(\mathfrak{u})| > \tfrac{1}{2}, \quad p(\mathfrak{u}) + p_r(\mathfrak{u}) < 3\,.$$

Dazu nehmen wir eine Funktion $g(z)$, die in $|z| \leqq x$ und $0 \leqq z \leqq 1$ erklärt und stetig ist, in $|z| \leqq x$ verschwindet, in y den Wert 1 annimmt und überall dem Betrage nach $\leqq 1$ ist. Nach einem bekannten Approximationssatz (siehe etwa MERGELYAN [3]) läßt sich g im Erklärungsbereich gleichmäßig durch ein Polynom t approximieren. Zu t gehört ein $\mathfrak{u} \in \mathfrak{P}$. Bei genügend genauer Approximation ist (man verwende die CAUCHYsche Koeffizientenabschätzung)

$$p_r(\mathfrak{u}) < 1, \quad p(\mathfrak{u}) < 2 \quad \text{und} \quad |t(x) - t(y)| > \tfrac{1}{2},$$

womit $\mathfrak{u}$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Die Annahme $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ führte zu der Äquivalenz der Normen $p + p_r$ und $q + q_r$. Diese Äquivalenz widerlegten wir durch die Betrachtung über die Duale. Damit ist der gewünschte Widerspruch erzielt und der Satz bewiesen.

Es ist anzunehmen, daß auch das Borelverfahren und andere keinem Verfahren B äquivalent sind. Die Methode der Untersuchung der Duale läßt sich auch zum Aufstellen von Inäquivalenzsätzen beim Vergleich von gewöhnlicher und absoluter Summierbarkeit verwenden.

Literatur

Durch R und Z wird auf die Referate in den Reviews und im Zentralblatt hingewiesen.

[1] ERDÖS, P., and G. PIRANIAN: Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 397–401 (1950). R 12,92; Z 37,327. — [2] MAZUR, S., and W. ORLICZ: On linear methods of summability. Studia Math. **14**, 129–160 (1955). — [3] MERGELYAN, S. N.: Gleichmäßige Approximation von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **7**, 31–122 (1952). R 14,547. — [4] MIKUSINSKI, J. G.: Remarks on the moment problem and a theorem of Picone. Colloquium Math. **2**, 138–141 (1951). R 13,214; Z 44,323; s. a. Z 44,126. — [5] WLODARSKI, L.: Sur les méthodes continues de limitation. I, II. Studia Math. **14**, 161–199 (1955). — [6] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463–487 (1951). R 12,604. — [7] ZELLER, K.: Sur la méthode de sommation d'Abel. C. r. Acad. Sci. (Paris) **236**, 568–569 (1953). R 14,744. — [8] ZELLER, K.: *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I, II. Math. Z. **58**, 288–305, 414–345 (1953). R 14,1092; R 15,134; Z 51,86.

(Eingegangen am 19. November 1955)

HEINZ, E.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 258—259 (1956)

Ein elementarer Beweis des Satzes von RADÓ-BEHNKE-STEIN-CARTAN über analytische Funktionen

Von

ERHARD HEINZ in Göttingen

In einer kürzlich erschienenen Note hat H. CARTAN [3] für den Satz von RADÓ-BEHNKE-STEIN[1]) einen neuen Beweis gegeben, welcher sich auf die Theorie der subharmonischen Funktionen stützt. Im Hinblick auf die Bedeutung dieses Satzes für Fragen der Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen[2]) sowie der Differentialgeometrie im Großen[3]) ist es vielleicht von Interesse, einen anderen Beweis zu geben, welcher an Stelle der subharmonischen Funktionen das POISSONsche Integral verwendet und der elementarer zu sein scheint als die früheren. Dies ist das Ziel der vorliegenden Note. Der zu beweisende Satz lautet in der Formulierung von H. CARTAN [3] folgendermaßen:

Satz von RADÓ-BEHNKE-STEIN-CARTAN.

Es sei $\mathfrak{S}$ *eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und* $f(\mathfrak{z})$ *eine auf* $\mathfrak{S}$ *komplexwertige stetige Funktion, welche für alle* $\mathfrak{z} \in \mathfrak{S}$, *wo* $f(\mathfrak{z}) \neq 0$ *ausfällt, regulär-analytisch ist. Dann ist* $f(\mathfrak{z})$ *in ganz* $\mathfrak{S}$ *regulär-analytisch.*

Beweis. (I) Wie H. CARTAN a. a. O. bemerkt, genügt es, den Fall zu betrachten, wo $\mathfrak{S}$ mit dem Polyzylinder $|z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1$ identisch ist, und sodann $n = 1$ zu setzen. Sei also $z_1 = z = x + i\,y$ (x, y reell) und D die offene Punktmenge aller z mit $|z| < 1$ und $f(z) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß D nicht leer ist und daß die Funktion $f(z)$ für $|z| \leq 1$ stetig ist sowie die Ungleichung $|f(z)| \leq 1$ erfüllt. Wir zeigen zunächst: Es gibt eine in $K = \{|z| < 1\}$ regulär-analytische Funktion $g(z)$ mit $g(z) = f(z)$ für $z \in D$. Es sei

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} f(e^{i\varphi})\, d\varphi \qquad \text{für } |z| < 1$$

$$g(z) = f(z) \qquad \text{für } |z| = 1.$$

Dann ist die Funktion $g(z)$ für $z \in K$ harmonisch und für $|z| \leq 1$ stetig. Aus den Voraussetzungen folgt daher, daß die Funktion

$$\Phi(z; \alpha) = Re\,(g(z) - f(z)) + \alpha \log |f(z)| \qquad (\alpha \text{ reell})$$

folgende Eigenschaften besitzt:

[1]) Vgl. T. RADÓ [5], ferner CARATHÉODORY [2], S. 82 für den Fall einer komplexen Variabeln, sowie BEHNKE-STEIN [1] für den Fall von mehreren Variabeln.

[2]) Vgl. BEHNKE-STEIN [1], H. HOPF [4] und P. THULLEN [7].

[3]) Vgl. T. RADÓ [6].

(1) $\Phi(z; \alpha)$ ist harmonisch für $z \in D$.

(2) Für jeden Randpunkt z' von D und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\limsup_{\substack{z \to z' \\ (z \in D)}} \Phi(z; \varepsilon) \leq 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{\substack{z \to z' \\ (z \in D)}} \Phi(z; -\varepsilon) \geq 0 .$$

Daraus folgen die Ungleichungen $\Phi(z; \varepsilon) \leq 0$ und $\Phi(z; -\varepsilon) \geq 0$, d. h.

$$|Re(g(z) - f(z))| \leq -\varepsilon \log |f(z)|$$

für $z \in D$ und jedes $\varepsilon > 0$, also $Re(g(z) - f(z)) = 0$. In gleicher Weise erhält man

$$Im(g(z) - f(z)) = 0 , \quad \text{also} \quad g(z) = f(z) \qquad \text{für } z \in D.$$

Ist z_1 ein Punkt in D und setzt man $h(z) = \overline{g_x + i\, g_y}$, so ist die Funktion $h(z)$ wegen $h_x + i\, h_y = \Delta\, \bar{g} = 0$ regulär-analytisch in K und verschwindet außerdem in einer Umgebung von z_1. Also ist $h(z) = 0$ in K, d. h. die Funktion $g(z)$ ist in K regulär-analytisch.

(II) Bleibt zu zeigen, daß für $z \in K$ die Gleichung $g(z) = f(z)$ besteht. Es sei N die Menge der Nullstellen von g in K. Da g regulär-analytisch ist und nicht identisch verschwindet, so besteht N aus isolierten Punkten, und daher ist die offene nicht-leere Menge $K' = K - N$ zusammenhängend. Gäbe es ein $z_2 \in K'$ mit $f(z_2) = 0$, so gäbe es einen Weg W in K' von z_1 nach z_2 und auf W (wegen der Stetigkeit von f) eine erste Nullstelle z_2' von f. Da z_2' Häufungspunkt von Punkten mit $f \neq 0$, also mit $f = g$ ist, so wäre $g(z_2') = f(z_2') = 0$, entgegen $W \subset K'$. Hieraus folgt $f \neq 0$ in K', also $f = g$ in K' und daher auch $f(z) = g(z)$ für $z \in K$.

Literatur

[1] H. Behnke, u. K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1–16 (1951). — [2] C. Carathéodory: Conformal Representation. Cambridge 1952. — [3] H. Cartan: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. **125**, 49–50 (1952). — [4] H. Hopf: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comment.-Math. Helvet. **29**, 132–155 (1955). — [5] T. Radó: Über eine nicht-fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. **20**, 1–6 (1924). — [6] T. Radó: Zu einem Satz von Bernstein über Minimalflächen im Großen. Math. Z. **26**, 559–565 (1927). — [7] P. Thullen: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137–157 (1935).

(Eingegangen am 11. Januar 1956)

ROELCKE, W.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 260—277 (1956)

Über die Verteilung der Klassen eigentlich assoziierter zweireihiger Matrizen, die sich durch eine positiv-definite Matrix darstellen lassen

Von

W. ROELCKE in Princeton

Es sei Q eine m-reihige gerade, symmetrische, positiv-definite Matrix mit der Determinante 1. „Gerade" bedeutet, daß alle Elemente von Q ganzrational und die Diagonalelemente gerade sind. Die Reihenzahl von Q ist unter diesen Voraussetzungen durch 8 teilbar (s. SCHOENEBERG [6], S. 520). G durchlaufe alle ganzzahligen Matrizen von m Zeilen und zwei Spalten. Dann durchläuft

$$T = Q[G] = G'QG \tag{1}$$

eine Menge zweireihiger, gerader, nichtnegativ-definiter Matrizen. $a(T)$ bezeichne die Anzahl der Darstellungen von T in der Gestalt (1). Unter den darstellbaren Matrizen T interessieren uns insbesondere diejenigen vom Rang 2. Bezeichnet

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine beliebige zweireihige, gerade, positiv-definite Matrix, so verstehen wir unter der Klasse der zu T eigentlich assoziierten Matrizen alle Matrizen der Form $T[U]$, wobei U alle zweireihigen ganzen, eigentlich unimodularen Matrizen (d. h. $|U| = 1$) durchläuft. Wird T durch Q dargestellt, so offenbar auch die volle Klasse von T, und $a(T)$ hängt nur von der Klasse von T ab. Letzteres trifft offenbar auch für die Funktion $\varepsilon(T)$ zu, welche die Anzahl der eigentlich unimodularen Lösungen U der Gleichung $T = T[U]$ angibt. $\frac{a(T)}{\varepsilon(T)}$ ist stets eine ganze Zahl $\geqq 0$.

Wir ziehen nun die im Raum der zweireihigen positiv-definiten Matrizen Y gültige Parameterdarstellung

$$Y = u\begin{pmatrix} (x^2 + y^2)\, y^{-1} & x\, y^{-1} \\ x\, y^{-1} & y^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u = |Y|^{1/2} \tag{3}$$

aus H. MAASS [4], S. 94, heran, die jedem Y in umkehrbar-eindeutiger Weise ein Zahlenpaar (u, τ) mit $u > 0$, $\tau = x + iy$, $y > 0$ zuordnet. Der Matrix $[U]\, Y = U\, Y\, U'$ (U eigentlich unimodular) entspricht dann das Paar $(u, U\tau)$. $U\tau$ bezeichnet das Bild von τ bei der Modulsubstitution ersten Grades U. In jeder Klasse eigentlich assoziierter Matrizen T können wir daher einen Vertreter $\{T\}$ so bestimmen, daß der Punkt τ des ihm entsprechenden Paares

(u, τ) im Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F}: |2x| \leq 1, \ x^2 + y^2 \geq 1, \ y > 0$$

der Modulgruppe M liegt. Wir halten diese Wahl der Vertreter $\{T\}$ fortan fest. Der Kürze halber werden wir immer $a(T)$, $\varepsilon(T)$, $|T|$ für $a(\{T\})$, $\varepsilon(\{T\})$, $|\{T\}|$ usw. schreiben, ohne Zweideutigkeiten befürchten zu müssen.

Wir gehen schließlich noch zu der durch Identifizieren äquivalenter Randpunkte von $\mathfrak{F}$ entstehenden offenen Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ über und übertragen die den Matrizen T entsprechenden Punkte τ auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, wobei wir sie mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(T)$ bezeichnen. Jeder Matrizenklasse entspricht hiernach ein Punkt $(u, \mathfrak{p})$ im dreidimensionalen Raum $u > 0$, $\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{F}}$. Zur Flächenmessung auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ übertragen wir das hyperbolische Flächenelement $\omega = \dfrac{dx\,dy}{y^2}$ aus der oberen τ-Halbebene auf $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Mit der im Titel dieser Arbeit genannten Verteilung der Klassen ist folgende Aussage über die Verteilung der den Klassen entsprechenden Punkte $(u, \mathfrak{p})$ über den Raum $u > 0$, $\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ gemeint.

Satz: *Ist $\tilde{\mathfrak{S}}$ eine offene Teilmenge von $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit dem hyperbolischen Inhalt $|\tilde{\mathfrak{S}}| = \int_{\tilde{\mathfrak{S}}} \omega$, wobei $\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{F}}$ zugelassen ist, so gilt die asymptotische Formel*

$$\sum_{\substack{\{T\} \\ u \leq q, \mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{S}}}}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \sim \frac{|\tilde{\mathfrak{S}}|}{|\tilde{\mathfrak{F}}|} \cdot \frac{(4\pi q)^m}{12\, m\, \Gamma(m-1)} \quad \text{für } q \to \infty\,. \tag{4}$$

Hierbei bedeutet $u, \mathfrak{p}$ das im vorletzten Absatz eingeführte Paar $u = |T|^{1/2}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(T)$. Den Hinweis auf dieses Problem und seine für die Lösung so wesentliche Analogie zu den Heckeschen Untersuchungen [1] über die Verteilung der Primideale in Winkelräumen verdanke ich Herrn Prof. Maass.

Wir schicken dem Beweis des Satzes einige Bemerkungen voraus.

1. Dehnt man die obige Zuordnung von Paaren $(u, \mathfrak{p})$ zu den Matrizen T mittels (3) auf alle positiven Matrizen Y aus, so läßt sich der durch die Bedingungen $u(Y) > 0$, $\mathfrak{p}(Y) \in \tilde{\mathfrak{S}}$ bestimmte Bereich im Y-Raum mit einem Kegel vergleichen. u entspricht dabei dem Abstand von der Spitze.

2. Die Anzahl der Vertreter $\{T\}$ mit $u \leq q$ ist für jedes positive q endlich, da bekanntlich die Klassenzahl zu vorgegebener Determinante endlich ist.

3. Der obige Satz ist auch für abgeschlossene Teilmengen von $\tilde{\mathfrak{F}}$ anstelle der offenen Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}$ richtig. Ist nämlich $\tilde{\mathfrak{S}}$ abgeschlossen, so ist $\tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{\mathfrak{S}}$ offen, und die Behauptung folgt durch Auswerten der rechten Seite von

$$\sum_{\substack{\{T\} \\ u \leq q, \mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{S}}}}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} = \sum_{\substack{\{T\} \\ u \leq q}}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} - \sum_{\substack{\{T\} \\ u \leq q, \mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{\mathfrak{S}}}}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)}$$

mit Hilfe des Satzes. Es wird kaum Interesse haben, (4) auf noch allgemeinere Mengen $\tilde{\mathfrak{S}}$ auszudehnen. Das hat auch seine Grenzen, wie bereits das Beispiel der Menge zeigt, die aus den abzählbar vielen Punkten besteht, die den Vertretern $\{T\}$ entsprechen.

Beweis des Satzes

Ist $f(\tau)$ eine bezüglich der Modulgruppe M automorphe Funktion, so werde allgemein die ihr auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ entsprechende Funktion mit $f(\mathfrak{p})$ bezeichnet, und umgekehrt. $\mathfrak{H}$ bezeichne den Hilbertraum der bei M invarianten, Lebesguesch meßbaren Funktionen $f(\tau)$ von endlicher Norm

$$\|f\| = \Big(\int_{\mathfrak{F}} |f(\tau)|^2 \omega\Big)^{1/2}.$$

Das Skalarprodukt sei

$$(f, g) = \int_{\mathfrak{F}} f(\tau)\,\overline{g(\tau)}\,\omega \qquad \text{für } f, g \in \mathfrak{H}.$$

Ist $f(\mathfrak{p})$ eine beliebige Funktion auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, so schreiben wir abkürzend $f(T) = f(\mathfrak{p}(T))$ für unsere Matrizen T.

Es sei nun $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine offene Teilmenge von $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit der charakteristischen Funktion

$$f(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 \text{ für } \mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{G}} \\ 0 \text{ für } \mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{\mathfrak{G}}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Dann ist $f(\mathfrak{p}) \in \tilde{\mathfrak{H}}$ und $(f, 1) = |\tilde{\mathfrak{G}}|$. Wegen $|\tilde{\mathfrak{F}}| = \frac{\pi}{3}$ besagt daher (4) dasselbe wie

$$\sum_{\{T\},\, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} f(T) \sim (f, 1)\, \frac{(4\pi)^{m-1} q^m}{m\,\Gamma(m-1)} \qquad \text{für } q \to \infty\,. \tag{6}$$

Der Grundgedanke des Beweises tritt, wie schon bemerkt, in den Heckeschen Untersuchungen [1] auf. Er besteht darin, die Formel (6) zunächst für die Eigenfunktionen der Wellengleichung

$$y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) e(\tau) + \lambda\, e(\tau) = 0 \tag{7}$$

zu M und für gewisse mit der zugehörigen Eisensteinreihe gebildete Funktionen anstelle von $f(\tau)$ zu beweisen und dann durch Approximation von $f(\tau)$ durch diese Grundfunktionen zu der Aussage (6) mit f selbst zu gelangen. Die vom Beitrag der Eisensteinreihe herrührenden Schwierigkeiten haben kein Analogon in den Heckeschen Arbeiten [1]. Die Quelle für die asymptotischen Formeln bilden die Dirichletschen Reihen

$$\varphi(s; e) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{e(T)}{|T|^s} \tag{8}$$

aus [4], (65)[1]) zusammen mit folgendem

[1]) In [4] steht auf der rechten Seite von (65) $e^*(T^{-1})$ anstelle von $e(T)$. Nach [4], (63) und (19) ist aber

$$e^*(T^{-1}) = \overline{e\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)} = \overline{e(\tau)} = \overline{e(T)}\,.$$

Daher besteht der Unterschied zwischen [4], (65) und unserer Gleichung (8) sachlich nur darin, daß der Querstrich über der Eigenfunktion e fortgelassen ist. Da mit jeder Eigenfunktion von (7) auch die konjugiert komplexe Funktion eine Eigenfunktion zu demselben Eigenwert ist, ist der Unterschied unwesentlich.

Satz von Hardy und Littlewood (s. [9], S. 126—127).

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ eine reelle, monoton wachsende Folge, und es gelte

1. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ *sei absolut konvergent für* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *wobei* $\sigma_0 > 0$ *hinreichend groß ist.*

2. *Die durch die Reihe definierte analytische Funktion* $F(s)$ *sei regulär für* $\operatorname{Re} s > c > 0$, *und* $F(s)$ *sei stetig für* $\operatorname{Re} s \geqq c$ *abgesehen von einem einfachen Pol mit Residuum* b *bei* $s = c$.

3. $F(s) = O(e^{C_1|t|})$ *für* $t \to \infty$ *gleichmäßig in* $\operatorname{Re} s \geqq c$ *für eine gewisse Konstante* C_1 $(s = \sigma + i\,t)$.

4. $\lambda_n/\lambda_{n-1} \to 1$ *für* $n \to \infty$.

5. a_n *sei reell und genüge einer der beiden folgenden Ungleichungen*

$$a_n > -K\,\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}), \qquad a_n < K\,\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

mit einer Konstanten $K \geqq 0$.

Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{b}{c}\lambda_n^c \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Die Ausführung der Einzelheiten macht den Rest dieser Arbeit aus. Es wird ausgiebiger Gebrauch von den Ergebnissen der Maaßschen Arbeit [4] und meiner Dissertation [5] gemacht werden. Wir heben fünf Schritte hervor.

I. Die Modulform zweiten Grades, denen die Dirichletschen Reihen (8) im Sinne von [4] zugeordnet sind, ist

$$g(Z) = \sum_{G} e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(Q[G]Z)}. \tag{9}$$

Dabei durchläuft G alle ganzzahligen Matrizen von m Zeilen und zwei Spalten, und $Z = X + i\,Y$ ist eine zweireihige symmetrische, komplexe Matrix mit positivem Imaginärteil Y. $g(Z)$ hat die Dimension $-\frac{m}{2}$ (s. E. Witt [10], S. 336), d. h. es gilt

$$g(Z_1) = |C\,Z + D|^{m/2}\,g(Z)$$

bei den Modulsubstitutionen zweiten Grades $Z_1 = (A\,Z + B)\,(C\,Z + D)^{-1}$. Nach (9), (1) und der Erklärung von $a(T)$ hat $g(Z)$ die Fourierentwicklung

$$g(Z) = \sum_{T \geqq 0} a(T)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)} \tag{10}$$

im Einklang mit den Bezeichnungen von [4]. Es genügt hier, über alle geraden, nichtnegativ-definiten Matrizen T zu summieren. Wegen der Positivität von Q ist

$$a(0) = 1\,. \tag{11}$$

Im folgenden bezeichne $e(\tau)$ entweder eine Eigenfunktion von (7) im Sinne von [5], S. 6, so daß nach [5], S. 12, Satz 1 und § 7 entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda > \frac{1}{4}$ ist, oder es bezeichne $e(\tau)$ die primitive Eisensteinreihe $E^*(\tau, 1 + 2ir)$

mit $r \geqq 0$, die man durch Fortsetzung der Reihe

$$E^*(\tau, s) = \sum_{(c,d)=1} \frac{y^{s/2}}{|c\tau + d|^s} \tag{12}$$

erhält (s. Maass, [3], § 3). Sie ist ebenfalls invariant bei M und erfüllt (7), wenn wir allgemein

$$\lambda = \frac{1}{4} + r^2, \quad \text{mit } r \geqq 0 \text{ falls } \lambda \geqq \frac{1}{4}, \tag{13}$$

setzen. Die Eigenfunktionen $e(\tau)$ sind nach [5], S. 16, Satz 3 mit den beschränkten, bei M invarianten Lösungen von (7) identisch. Nach [4], S. 102 und [5], S. 101 sind die Dirichletschen Reihen (8) für hinreichend große Werte von $\operatorname{Re} s$ absolut konvergent.

II. Anwendung des Hardy-Littlewoodschen Satzes auf die mit Eigenfunktionen gebildeten Reihen (8).

Aus [4], (64), (97) und [5], (156) mit $e(\tau)$ anstelle von $\overline{e(\tau)}$ (s. Fußnote [1]), $k = -\frac{m}{2}$ und $a_0 = a(0) = 1$ [s. (11)] entnimmt man, daß die Funktionen

$$R(s; e) = (2\pi)^{-2s}\, \Gamma\left(s - \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(s + \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right) \varphi(s; e) \tag{14}$$

folgende Eigenschaften haben:

a) Im Falle der konstanten Eigenfunktion $e(\tau) = 1$ ist $R(s; e)$ in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär analytisch, abgesehen von einem Pol erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$ mit dem Residuum $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$.

b) Ist $e(\tau)$ eine nichtkonstante Eigenfunktion oder die primitive Eisensteinreihe $E^*(\tau, 1 + 2ir)$, so ist $R(s; e)$ regulär analytisch in der ganzen Halbebene $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$.

Wegen der absoluten Konvergenz der Integrale in den Formeln [4], (97) und [5], (156) sind die Funktionen $R(s; e)$ ferner in jedem Vertikalstreifen $-\sigma_1 \leqq \operatorname{Re} s \leqq \sigma_1$ $(\sigma_1 > 0)$ mit Ausnahme von Umgebungen der Polstellen beschränkte Funktionen. Wegen (14) folgt aus diesen Angaben

a) Im Falle der konstanten Eigenfunktion $e(\tau) = 1$ ist $\varphi(s; e)$ in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär analytisch, abgesehen von einem einfachen Pol bei $s = \frac{m}{2}$ mit dem Residuum

$$(2\pi)^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{6}.$$

(Man beachte, daß nach (13) jetzt $r = \pm \frac{i}{2}$ ist.) Wegen

$$\Gamma(z)\, \Gamma\left(z - \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{\pi} \cdot 4^{-z}\, \Gamma(2z - 1)$$

ist also

$$\operatorname*{Res}_{s = \frac{m}{2}} \varphi(s; 1) = \frac{(4\pi)^m}{24\, \Gamma(m-1)}. \tag{15}$$

b) Ist $e(\tau)$ eine nichtkonstante Eigenfunktion oder die primitive Eisensteinreihe, so ist $\varphi(s; e)$ in der ganzen Halbebene $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär analytisch.

Aus (14) und dem oben über $R(s; e)$ Bemerkten ergibt sich ferner: Die Funktionen $\varphi(s; e)$ sind für alle $e(\tau)$ gleichmäßig in $\operatorname{Re} s \geqq \frac{m}{2}$ von der Größenordnung

$$\varphi(s; e) = O(e^{C|t|}) \quad \text{für } |t| \to \infty \qquad (s = \sigma + i\,t).$$

Wir setzen jetzt allgemein

$$\varphi(s; f) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{f(T)}{|T|^s}$$

für bezüglich M automorphe Funktionen $f(\tau)$. Es sei zunächst $e(\tau) = 1$. Denken wir uns dann in (8) zuerst alle Glieder mit demselben Wert von $|T|$ gesammelt, so erfüllt die entstehende Reihe nach dem obigen die Voraussetzungen des Hardy-Littlewoodschen Satzes mit $\lambda_n = n$, $a_n \geqq 0$, $\sigma_0 = \frac{m}{2}$ (da wegen $a_n \geqq 0$ die Abszisse der absoluten Konvergenz mit dem Maximum des Realteils einer Singularität von $\varphi(s; 1)$ zusammenfällt), $c = \frac{m}{2}$, $b = \frac{(4\pi)^m}{24\,\Gamma(m-1)}$ gemäß (15), $C_1 > \frac{\pi}{2}$ nach bekannten Eigenschaften der Gammafunktion und mit $K = 0$. Der genannte Satz liefert dann

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \sum_{\{T\},\, u \leqq q}{}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} = \sum_{\{T\},\, |T| \leqq q^2}{}' \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} &\sim \frac{(4\pi)^m}{24\,\Gamma(m-1)} \cdot \frac{(q^2)^{m/2}}{m/2} \quad \text{für } q \to \infty\,. \\ &= \frac{(4\pi q)^m}{12\, m\, \Gamma(m-1)}\,. \end{aligned}$$

Damit ist (4) im Falle $\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{F}}$ bewiesen.

Es sei jetzt $e(\tau)$ eine nichtkonstante Eigenfunktion. Da wir Real- und Imaginärteil von $e(\tau)$ getrennt behandeln können, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß $e(\tau)$ reell ist. Wegen $(e(\tau), 1) = 0$ (s. [5], S. 12, Satz 1) nimmt dann $e(\tau)$ Werte beiderlei Vorzeichens an. Ist M eine Schranke von $|e(\tau)|$, so kann der Hardy-Littlewoodsche Satz auf die Reihe mit nichtnegativen Gliedern

$$\varphi(s; e(\tau) + M) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{(e(T) + M)}{|T|^s}$$

angewandt werden. Dabei ist wieder $c = \frac{m}{2}$, aber

$$b = \frac{M \cdot (4\pi)^m}{24\,\Gamma(m-1)}$$

zu nehmen. Es folgt

$$\sum_{\{T\},\, u \leqq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} (e(T) + M) \sim \frac{M\,(4\pi q)^m}{12\, m\, \Gamma(m-1)}$$

und wegen (16) (auch wieder für komplexwertige $e(\tau)$)

$$\sum_{\{T\},\, u \leqq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)}\, e(T) = o(q^m) \qquad \text{für } q \to \infty\,.$$

Die asymptotische Gleichung

$$\sum_{\{T\},\, u \leq q} \frac{a(T)}{e(T)}\, e(T) \sim 0 \cdot q^m \qquad \text{für } q \to \infty \tag{17}$$

($e(\tau)$ eine nichtkonstante Eigenfunktion) möge eine andere Schreibweise für denselben Sachverhalt darstellen. In diesem Sinne haben wir (6) nun auch für nichtkonstante Eigenfunktionen bewiesen.

Im Falle der Eisensteinreihe $E^*(\tau, 1+2ir)$ versagt diese Schlußweise, da die Eisensteinreihe für $y = \operatorname{Im} \tau \to \infty$ oszilliert und nicht beschränkt ist.

III. Wir diskutieren nun (6) für automorphe Funktionen $f(\tau)$, welche beliebig oft stetig differenzierbar nach x, y sind und in $\mathfrak{F}$ nur auf einem Kompaktum von 0 verschieden sind. Es liegen dann offenbar die Funktionen $\Delta^n f(\tau)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sämtlich in $\mathfrak{H}$. Nach [5], S. 91, Satz 37 und dem anschließend Gesagten gilt die Entwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n(\tau) + \frac{1}{16\pi} \int_{1/4}^{\infty} \frac{E^*(\tau, 1+2ir)}{r} \left(\int_{\mathfrak{F}} f(\tau)\, \overline{E^*(\tau, 1+2ir)}\, \omega \right) d\lambda$$

oder

$$f(\tau) = h(\tau) + k(\tau), \tag{18}$$

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n(\tau), \tag{19}$$

$$k(\tau) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} c(r)\, E^*(\tau, 1+2ir)\, dr\,, \tag{20}$$

$$c(r) = \int_{\mathfrak{F}} f(\tau)\, \overline{E^*(\tau, 1+2ir)}\, \omega\,. \tag{21}$$

Dabei ist $e_n(\tau)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein maximales Orthogonalsystem normierter Eigenfunktionen und $a_n = (f, e_n)$. Wir beschränken uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall, daß $f(\tau)$ reell ist. $h(\tau)$ und $k(\tau)$ sind dann ebenfalls reell, da das System der Eigenfunktionen reell gewählt werden kann. In (20) konvergiert das äußere Integral hinsichtlich seiner oberen Grenze gleichmäßig in jedem kompakten τ-Bereich (s. [5], Satz 37 und Satz 34). Gleichmäßige Konvergenz für alle τ ist nicht vorhanden, da $E^*(\tau, 1+2ir)$ für $y \to \infty$ nicht beschränkt bleibt, während $k(\tau)$, wie bald gezeigt wird, beschränkt ist. Wir benötigen nun die im letzten Teil von [5], Satz 34 ausgesprochene Tatsache, daß die Reihe $h(\tau)$ aus (19) gleichmäßig in der ganzen oberen Halbebene konvergiert. Es ist dafür nur zu beachten, daß die Eigenfunktionen $e_n(\tau)$, von der konstanten abgesehen, sämtlich Spitzenfunktionen sind ([5], Satz 3). Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $h(\tau)$ ziehen wir doppelten Nutzen.

a) Da jedes Glied $a_n e_n(\tau)$ der Reihe (19) eine beschränkte, stetige Funktion darstellt, für die $\lim\limits_{y\to\infty} a_n e_n(\tau)$ gleichmäßig in x existiert, ist $h(\tau)$ eine beschränkte, stetige Funktion, für die $\lim\limits_{y\to\infty} h(\tau)$ gleichmäßig in x existiert. Wegen (18) folgt

die Beschränktheit der Funktion $k(\tau)$ aus (20). Für eine Schranke M von $|k(\tau)|$ ist dann wieder $\varphi(s; k(\tau) + M)$ eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern.

b) Aus dem Hilfssatz kann leicht die Gültigkeit von (6) mit $h(\tau)$ anstelle von $f(\tau)$ geschlossen werden: Wählen wir für $e_1(\tau)$ die normierte konstante Eigenfunktion $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, so ist für jede natürliche Zahl N

$$(h, 1) = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n(\tau), 1 \right).$$

Da (6) nach II jedenfalls für endliche Linearkombinationen von Eigenfunktionen richtig ist, haben wir also

$$\sum_{\{T\}, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n(T) \right) \sim (h, 1) \frac{(4\pi q)^m}{12\, m\, \Gamma(m-1)} \tag{22}$$

für $q \to \infty$. Wählen wir jetzt N zu vorgegebenem $\delta > 0$ so groß, daß

$$\left| h(\tau) - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n(\tau) \right| \leq \delta$$

ausfällt, dann erhält man unter Verwendung von (16)

$$\left| \sum_{\{T\}, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} h(T) - \sum_{\{T\}, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n(T) \right) \right| \leq \sum_{\{T\}, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \delta \leq \frac{2\delta (4\pi q)^m}{12\, m\, \Gamma(m-1)}$$

für $q \geq q_0(\delta)$. Da δ beliebig klein gewählt werden konnte, folgt im Hinblick auf (22) die Gültigkeit von (6) für h anstelle von f.

Da $k(\tau)$ die Projektion von $f(\tau)$ auf den zu den Eigenfunktionen senkrechten Unterraum von $\mathfrak{H}$ darstellt ([5], §§ 9, 11), ist $(k, 1) = 0$. Nach (18) ist also $(h, 1) = (f, 1)$, so daß (6) für unsere gegenwärtig betrachtete Klasse von Funktionen $f(\tau)$ bewiesen sein wird, wenn wir (6) auch noch mit k anstelle von f beweisen können. Die problematische Gleichung ist

$$\sum_{\{T\}, u \leq q} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} k(T) \sim 0 \cdot q^m \qquad \text{für } q \to \infty, \tag{23}$$

was in demselben Sinne wie (17) zu verstehen ist.

IV. Beweis von (23). $k(\tau)$ ist nach III, a) eine beschränkte Funktion. Daher zeigt ein Vergleich mit $\varphi(s; 1)$, daß

$$\varphi(s; k) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{k(T)}{|T|^s} \tag{24}$$

in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2}$ absolut konvergiert. Wir werden zeigen, daß $\varphi(s; k)$ in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär ist und daß

$$\varphi(s; k) = O(e^{C_3 |t|}) \qquad \text{für } |t| \to \infty \tag{25}$$

gleichmäßig in $\operatorname{Re} s \geq \frac{m}{2}$ gilt ($s = \sigma + i t$, $C_3 > 0$ eine geeignete Konstante).

Die im Abschnitt II für die nichtkonstanten Eigenfunktionen ausgeführte Schlußweise liefert dann (23).

Denken wir uns (20) in (24) eingetragen, so entsteht nach formaler Vertauschung der Integration mit der Summation

$$\varphi(s;k) = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty c(r) \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \frac{E^*(T,1+2ir)}{|T|^s}\,dr \tag{26a}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty c(r)\,\varphi(s;E^*(\tau,1+2ir))\,dr, \tag{26b}$$

womit der Zusammenhang mit der unter II betrachteten Funktion $\varphi(s;E^*(\tau,1+2ir))$ hergestellt ist. Um (26a) durch den Hinweis auf absolute Konvergenz für hinreichend großen $\operatorname{Re} s$ zu rechtfertigen, und auch für spätere Zwecke schätzen wir zunächst die Eisensteinreihe sowie $c(r)$ aus (21) ab.

Es ist nach [3], S. 163–164

$$\begin{aligned} E^*(\tau,w) &= 2\,y^{\frac{w}{2}} + 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{w-1}{2}\right)\zeta(w-1)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\zeta(w)}\,y^{1-\frac{w}{2}} \\ &+ \frac{2\pi^{\frac{w}{2}}}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\zeta(w)} \sum_{n\neq 0}\Big(\sum_{m\mid n}|m|^{1-w}\Big)|n|^{\frac{w-1}{2}}\,y^{1/2}K_{\frac{w-1}{2}}(2\pi|n|y)\,e^{2\pi i n x}. \end{aligned} \tag{27}$$

Gemäß [8], 6.16, (1) ist für $\operatorname{Re}\nu \geqq -\frac{1}{2}$, $t>0$

$$K_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)2^\nu}{t^\nu\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos tv}{(v^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dv\,.$$

Ist j eine natürliche Zahl und $4\mid j$, so liefert j-malige partielle Integration,

$$K_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)2^\nu t^{-\nu-j}\int_0^\infty \cos(tv)\,\frac{d^j}{dv^j}(v^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dv, \tag{28}$$

was offenbar für $\nu > -\frac{j}{2}$ und $t>0$ gültig ist. Setzen wir dies in (27) ein mit $k, l \neq 0$, $kl = n$ als neuen Summationsbuchstaben, so erhalten wir die für $\operatorname{Re} w > -j+1$ gültige Formel

$$\begin{aligned} E^*(\tau,w) &= 2\,y^{\frac{w}{2}} + 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{w-1}{2}\right)\zeta(w-1)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\zeta(w)}\,y^{1-\frac{w}{2}} \\ &+ 2^{1-j}\pi^{-j}\zeta^{-1}(w)\,y^{1-\frac{w}{2}-j}\sum_{k,l\neq 0}|k|^{1-w-j}|l|^{-j}e^{2\pi i k l x}\times \\ &\times\int_0^\infty \cos(2\pi k l y v)\,\frac{d^j}{dv^j}(v^2+1)^{-\frac{w}{2}}\,dv\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Für $w = 1 + 2ir$, $r \geqq 0$ ist $j = 4$ zulässig. Verwendet man im zweiten Glied rechts die Funktionalgleichung der Zetafunktion und im dritten Glied die Abschätzung

(30) $$\zeta^{-1}(1 + 2ir) = O(\ln^7 r) \quad \text{für } r \to +\infty \quad (\text{s. [7], (3. 6. 5)}),$$

so erhält man

(31) $$|E^*(\tau, 1 + 2ir)| \leqq C_4(y^{1/2} + \lambda^2) \leqq C_5\, y^{1/2} \lambda^2 \quad \text{für } y \geqq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda \geqq \frac{1}{4}$$

mit geeigneten Konstanten $C_4, C_5 > 0$. Das Glied λ^2 rührt von

$$\frac{d^4}{d\,v^4}(v^2+1)^{-\frac{1}{2}-ir}$$

her. — Wir verwenden (29) noch für eine andersartige Abschätzung. Es sei $w = p + iq$, und p sei auf das Intervall $-p_0 \leqq p \leqq p_0 (p_0 > 0$, fest) beschränkt. Beachtet man die Abschätzung (s. [7], (5. 1. 1))

$$|\zeta(w-1)| \leqq C_6 q^{p_0 + \frac{3}{2}} \quad \text{für } q \geqq 1 \text{ gleichmäßig in } -p_0 \leqq p,$$

so folgt für $j > p_0 + 2$ aus (29) die Abschätzung

(32) $$|\zeta(w) \cdot E^*(\tau, w)| \leqq C_7(p_0)\, y^{\frac{p_0}{2}+1} q^{p_0+4},$$

gültig für $y \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-p_0 \leqq p \leqq p_0$, $q \geqq 1$, mit einer nur von p_0 abhängigen Konstanten $C_7(p_0)$. Die Bedingung $q \geqq 1$ kann hier offenbar fallen gelassen werden, wenn man auf der rechten Seite von (32) q durch $1 + |q|$ ersetzt und feste Umgebungen der Stellen $w = 1$ und $w = 2$ von der Betrachtung ausschließt. Mit Hilfe von [3], S. 163—164, insbesondere (116), kann man nachweisen, daß die Stelle $w = 1$ nicht ausgeschlossen zu werden braucht.

Nun zur Abschätzung von $c(r)$ aus (21). Setzen wir

(33) $$c_n(r) = \int_{\mathfrak{F}} \Delta^n f(\tau) \cdot \overline{E^*(\tau, 1 + 2ir)}\, \omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist $c_0(r) = c(r)$, und für $n = 1, 2, 3, \ldots$ liefert die Greensche Formel (man beachte die spezielle Natur der Funktion $f(\tau)$)

(34) $$\begin{aligned} c_n(r) &= \int_{\mathfrak{F}} \Delta^{n-1} f(\tau) \cdot \Delta\, \overline{E^*(\tau, 1 + 2ir)}\, \omega \\ &= \lambda \int_{\mathfrak{F}} \Delta^{n-1} f(\tau) \cdot \overline{E^*(\tau, 1 + 2ir)}\, \omega, \\ c_n(r) &= \lambda^n c(r). \end{aligned}$$

Aus (33) folgt wegen (31) und der besonderen Beschaffenheit von $f(\tau)$

$$c_n(r) = O(\lambda^2) \qquad \text{für } r \to \infty.$$

(34) liefert also

(35) $$c(r) = O(\lambda^{-\alpha_1}) \qquad \text{für } r \to \infty,$$

wobei α_1 eine beliebig große positive Zahl bedeutet.

Ist $\{T\}$ ein Klassenvertreter und (u, τ) das ihm im Sinne von S. 261 zugeordnete Paar, so ist $\tau \in \mathfrak{F}$, und nach (2) und (3) gilt $t_2 = |T|^{1/2} y^{-1}$, wobei t_2

eine natürliche Zahl ist. Also ist $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq |T|^{1/4}$. Mit (31) folgt

$$|E^*(\{T\}, 1 + 2\,i\,r)| \leqq C_8\,|T|^{1/4}\,\lambda^2.$$

Hiernach und wegen (35) mit $\alpha_1 = 3$ wird nun die rechte Seite von (26a) durch

$$C_9 \int_0^\infty \lambda^{-1} \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)}\,|T|^{\frac{1}{4}-\sigma}\,dr$$

majorisiert ($s = \sigma + it$). Die Summe konvergiert für $\sigma > \frac{m}{2} + \frac{1}{4}$ gegen $\varphi\left(\sigma - \frac{1}{4}\,; 1\right)$. Wegen (13) ist dann also unsere Majorante sinnvoll. Damit ist die zu (26a) führende Vertauschung der Integration mit der Summation für $\sigma > \frac{m}{2} + \frac{1}{4}$ gerechtfertigt.

Zur analytischen Fortsetzung von $\varphi(s, k)$ formen wir (26b) mit Hilfe von (14) um:

$$\text{(36)}\qquad \varphi(s; k) = \frac{1}{4}\,(2\,\pi)^{2s-1} \int_0^\infty \frac{e(r)\,R(s; E^*(\tau, 1 + 2\,i\,r))}{\Gamma\left(s - \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s + \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right)}\,dr\,.$$

Es sei nun

$$\text{(37)}\qquad f_2(Y) = \sum_{Rang\,T = 2} a(T)\,e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(TY)}$$

die aus der Modulform zweiten Grades $g(Z)$ aus (10) wie in [4], (24) gebildete reelle Funktion der positiven zweireihigen Matrix Y, und $\varphi^*(w)$ die in der ganzen w-Ebene mit Ausnahme eines Poles bei $w = \frac{m}{2}$ reguläre Funktion, welche $g(Z)$ im Sinne von [4], (41) zugeordnet ist. Dann wird die analytische Fortsetzung von $R(s; E^*)$ in die ganze s-Ebene gemäß [5], (156) wegen $8 \mid m$ und der in der Fußnote[1]) besprochenen Ersetzung von $e(\tau) = \overline{E^*(\tau, 1 + 2\,i\,r)} = E^*(\tau, 1 - 2ir)$ durch $e(\tau) = E^*(\tau, 1 + 2ir)$ in der Definition von $\varphi(s; e)$ gegenüber [4] durch folgende Formel geliefert

$$\text{(38)}\qquad \begin{aligned} R(s; E^*) = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \int_{\mathfrak{F}} f_2(Y)\,E^*(\tau, 1 + 2ir)\,u^{2s-1}\,\omega\,d\,u\,+ \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \int_{\mathfrak{F}} f_2(Y)\,E^*(\tau, 1 + 2ir)\,u^{m-2s-1}\,\omega\,d\,u\,- \\ & - \frac{\Gamma(ir)\,\zeta(2\,i\,r)}{(2\,\pi)^{\frac{1}{2}+ir}\,\zeta(1 + 2\,i\,r)} \left(\frac{1}{2s - \frac{1}{2} - ir} + \frac{1}{m - 2s - \frac{1}{2} - ir}\right) \varphi^*\left(\frac{1}{2} + i\,r\right) - \\ & - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ir\right)}{(2\,\pi)^{\frac{1}{2}-ir}} \left(\frac{1}{2s - \frac{1}{2} + ir} + \frac{1}{m - 2s - \frac{1}{2} + ir}\right) \varphi^*\left(\frac{1}{2} - i\,r\right). \end{aligned}$$

Dabei ist für Y die Darstellung (3) eingetragen zu denken, so daß die Integration bezüglich ω über $\mathfrak{F}$ auch $f_2(Y)$ betrifft, und entsprechend für die Integration bezüglich u. — Wir untersuchen das analytische Verhalten der Beiträge der verschiedenen Glieder von (38) zur rechten Seite von (36). Dabei werde s zunächst auf einen festen kompakten Bereich $\mathfrak{C}$ in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ beschränkt. Da $\varphi^*(w)$ nach [4], (17), (41) die einer gewissen Modulform ersten Grades im Sinne von HECKE [2] zugeordnete Dirichletreihe ist, gilt

$$\varphi^*\left(\frac{1}{2} \pm i r\right) = O(r^{\alpha_2}) \qquad \text{für } r \to +\infty$$

mit einem geeigneten Exponenten $\alpha_2 > 0$. Verwendet man nun die Funktionalgleichung der Zetafunktion und die asymptotische Formel

$$|\Gamma(u + i v)| \sim \sqrt{2\pi}\, v^{u-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} v} \qquad \text{für } v \to +\infty, \tag{39}$$

so erhält man für die letzten beiden Glieder von (38) die Größenordnung $O\left(r^{\alpha_2 - 1} e^{-\frac{\pi}{2} r}\right)$ für $r \to +\infty$ gleichmäßig in $s \in \mathfrak{C}$. Da ferner

$$\left|\Gamma\left(s - \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(s + \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right)\right| \sim 2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^{2\sigma - \frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} r} \tag{40}$$

gleichmäßig in $\mathfrak{C}$ gilt $(s = \sigma + it)$ und da (35) mit beliebig großem α_1 zur Verfügung steht, ist der Beitrag der letzten beiden Glieder von (38) zum Integral in (36) ein in $\mathfrak{C}$ gleichmäßig konvergentes Integral. Da der Integrand von s regulär-analytisch abhängt, folgt, daß der Beitrag der letzten beiden Glieder von (38) zu (36) in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär ist.

Der Beweis der entsprechenden Tatsache für den Beitrag $B(s)$ der ersten beiden Glieder von (38) macht mehr Umstände. Wir beginnen mit der Untersuchung der Funktion

$$\psi(w, u) = \int_{\mathfrak{F}} f_2(Y)\, E^*(\tau, w)\, \omega \tag{41}$$

mit Y aus (3). $\psi(1 + 2ir, u)$ speziell bestimmt das Verhalten der ersten beiden Glieder von (38) in Abhängigkeit von r, und dieses benötigen wir zur Untersuchung des Beitrages $B(s)$. Wir wollen

$$|\psi(1 + 2ir, u)| \leqq C_9(j)\, \lambda^{\alpha_3(j)}\, e^{-\frac{\pi}{2} r}\, u^{-j} \qquad \text{für } r \geqq 0,\ u \geqq 1 \tag{42}$$

zeigen. Dabei ist j eine beliebige, durch 4 teilbare natürliche Zahl $\geqq m + 4$, und $C_9(j)$, $\alpha_3(j)$ sind nur von j abhängige positive Konstanten. Dann ergibt sich nämlich leicht, daß $B(s)$ eine ganze Funktion von s ist: Wir beschränken s auf einen beliebigen kompakten Bereich $\mathfrak{C}$ und wählen die natürliche Zahl j so, daß $4 \mid j$ und

$$j \geqq 1 + \operatorname*{Max}_{s \in \mathfrak{C}} [\operatorname{Re} 2s,\ \operatorname{Re}(m - 2s),\ m + 3].$$

Wegen (42) folgt dann, daß die in (38) von 1 bis ∞ erstreckten Integrale gleichmäßig in $\mathfrak{C}$ konvergieren. Da der Integrand in s regulär-analytisch und $\mathfrak{C}$

beliebig ist, stellen diese beiden Integrale also ganze analytische Funktionen von s dar. In Abhängigkeit von r genügen sie wegen (42) der Abschätzung $O\left(\lambda^{\alpha_2} e^{-\frac{\pi}{2} r}\right)$ für $r \to \infty$ gleichmäßig in $\mathfrak{C}$. Dies zusammen mit (40) und (35) zeigt, daß der Beitrag der ersten beiden Glieder von (38) zum Integranden von (36) eine ganze analytische Funktion von s darstellt, welche $O(\lambda^{-\alpha_1+\alpha_2-\sigma+\frac{m}{4}})$ für $r \to \infty$ gleichmäßig in $s = \sigma + i\,t \in \mathfrak{C}$ ist. Da α_1 in (35) beliebig groß gewählt werden kann, folgt wieder wegen gleichmäßiger Konvergenz, daß der Beitrag $B(s)$ der ersten beiden Glieder von (38) zu (36) eine ganze Funktion von s ist. Nach dem zuvor über den Beitrag der letzten beiden Glieder von (38) Bewiesenen ist dann also $\varphi(s, k)$ in $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$ regulär, wie zu Beginn von IV behauptet.

Zum Beweis von (42) werden wir $\psi(w, u)$ zunächst in $\operatorname{Re} s \geqq 5$ betrachten, wo wir mit Hilfe der absolut konvergenten Darstellung (12) von $E^*(\tau, w)$ ein zu (42) analoges Verhalten von $\psi(w, u)$ vorfinden werden. Sodann werden wir mittels der Funktionalgleichung

$$E^*(\tau, w)\, \zeta(w)\, \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \pi^{-\frac{w}{2}} = P(\tau, w) = P(\tau, 2 - w), \tag{43}$$

die aus [3], S. 163—164 zu entnehmen ist, auf ein ähnliches Verhalten von $\psi(w, u)$ in $\operatorname{Re} w \leqq -3$ schließen, und die Anwendung eines Satzes von Phragmen-Lindelöf auf den ausgelassenen Vertikalstreifen führt dann zu der gewünschten Gleichung (42).

Da in (41) über $\mathfrak{F}$ integriert werden soll, liegt der Punkt τ, welcher der Matrix Y des Integranden im Sinne von (3) entspricht, in $\mathfrak{F}$. Für diese Y und für $T > 0$ aus (2) ist nach [5], S. 101

$$\operatorname{Sp}(T\,Y) \geqq \frac{u}{2}\,(y\,t_0 t_2)^{1/3}.$$

Daraus folgt wegen $u, t_0, t_2 \geqq 1$, $y \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2\,\pi \operatorname{Sp}(T\,Y) \geqq u + y^{1/3} + (t_0 t_2)^{1/3}.$$

Damit, und weil für $T > 0$ nach [4], (34)

$$|a(T)| \leqq C_{10} |T|^{\frac{m}{2}} \tag{44}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_{10} > 0$ gilt, erhalten wir aus (37)

$$|f_2(Y)| \leqq C_{10} \sum_{T>0} |T|^{\frac{m}{2}}\, e^{-u-y^{\frac{1}{3}}-(t_0 t_2)^{\frac{1}{3}}},$$

$$|f_2(Y)| \leqq C_{11}\, e^{-u-y^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{für } u \geqq 1,\ y \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{45}$$

Variiert w in einem kompakten Bereich $\mathfrak{W}$ der komplexen w-Ebene, der die einzige Polstelle $w = 2$ von $\zeta(w)\, E^*(\tau, w)$ (s. (27) und [3], S. 163 u.) nicht enthält, so gilt nach (32) und der anschließenden Bemerkung

$$\zeta(w) \cdot E^*(\tau, w) = O(y^{\alpha_4}) \qquad \text{für } \tau \in \mathfrak{F},\ y \to \infty$$

gleichmäßig in $\mathfrak{W}$ mit einer nur von $\mathfrak{W}$ abhängigen Konstanten $\alpha_4 > 0$. Wegen (45) konvergiert also das Integral (41) gleichmäßig in $w \in \mathfrak{W}$, so daß $\zeta(w)\,\psi(w,u)$ für $u \geqq 1$ eine in $w \neq 2$ reguläre Funktion von w darstellt. Aus (41), (45) und (32) folgt noch mit $w = p + iq$

$$\zeta(w)\,\psi(w,u) = O(|q|^{\alpha_5} e^{-u}) \qquad \text{für } q \to \pm\infty \tag{46}$$

gleichmäßig in $-p_0 \leqq p \leqq p_0$ und $u \geqq 1$ mit einer nur von p_0 abhängigen Konstanten $\alpha_5 > 0$. Unter Beachtung der bezüglich $w = 1$ im Anschluß an (32) gemachten Bemerkung erhält man ferner

$$|\zeta(1+iq)\,\psi(1+iq,u)| \leqq C_{12} e^{-u} \qquad \text{für } 0 \leqq q \leqq 1,\ u \geqq 1 \tag{47}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_{12} > 0$.

Ist nun $\operatorname{Re} w > 2$, so ist die Reihe (12) absolut konvergent, und aus (41) folgt

$$\psi(w,u) = \int_{\mathfrak{F}} f_2(Y) \sum_U (\operatorname{Im} U\tau)^{\frac{w}{2}}\,\omega\,.$$

Dabei durchläuft U in der Summe alle ganzen, eigentlich unimodularen Matrizen mit verschiedenen zweiten Zeilen. Da der Ersetzung von $\tau = x + iy$ durch $U\tau$ in der Parameterdarstellung (3) die Ersetzung von Y durch $[U]\,Y$ entspricht und $f_2(Y)$ dabei nach (37) ungeändert bleibt, erhält man weiter

$$\psi(w,u) = 2\int_0^\infty \int_0^1 f_2(Y)\, y^{\frac{w}{2}-2}\, dx\, dy\,. \tag{48}$$

Nach (37) ist

$$\int_0^1 f_2(Y)\,dx = \sum_{(T)} a(T) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi u \frac{(x^2+y^2)t_0 + 2xt_1 + t_2}{y}}\,dx\,,$$

wobei $(T) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$ ein vollständiges System von Matrizen $T > 0$ durchläuft, in dem keine zwei Matrizen durch Transformation mit einer parabolischen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \neq 0$ ganzrational, auseinander hervorgehen. Die Ausführung der Integration bezüglich x liefert

$$\int_0^1 f_2(Y)\,dx = \sum_{(T)} a(T) \sqrt{\frac{y}{2ut_0}}\; e^{-2\pi u t_0 y - 2\pi u |T| (t_0 y)^{-1}}\,.$$

Damit wird aus (48), wenn noch $\eta = 2\pi u t_0 y$ als neue Integrationsveränderliche eingeführt wird,

$$\psi(w,u) = \sqrt{\frac{2}{u}} \sum_{(T)} a(T)\, t_0^{-\frac{w}{2}} (2\pi u)^{\frac{1-w}{2}} \int_0^\infty e^{-\eta - \frac{4\pi^2 u^2 |T|}{\eta}}\, \eta^{\frac{w-3}{2}}\, d\eta\,.$$

Gemäß [8], S. 183, (15) und S. 79, (8) ist für alle ν und für $z > 0$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty e^{-t - \frac{z^2}{4t}} \cdot t^{\nu-1}\,dt\,.$$

Mit $z = 4\pi u\,|T|^{1/2}$ und $\nu = \frac{w-1}{2}$ folgt

$$\psi(w,u) = 2\sqrt{\frac{2}{u}}\sum_{(T)} a(T)\, t_0^{-\frac{w}{2}}\,|T|^{\frac{w-1}{4}}\, K_{\frac{w-1}{2}}(4\pi u\,|T|^{1/2}).$$

Wegen $\operatorname{Re} w > 2$ liefert hier (28) mit beliebigem $j > 0$, $4 \mid j$

$$\psi(w,u) = 2^{2-\frac{w}{2}-2j}\,\pi^{-\frac{w}{2}-j}\,\Gamma\left(\frac{w}{2}\right) u^{-\frac{w}{2}-j} \times$$

$$\times \sum_{(T)} a(T)\, t_0^{-\frac{w}{2}}\,|T|^{-\frac{j}{2}} \int_0^\infty \cos(4\pi u\,|T|^{1/2} v)\, \frac{d^j}{d v^j}\,(v^2+1)^{-\frac{w}{2}}\, d v\,. \tag{49}$$

Die Reihe ist ihrer Herkunft nach absolut konvergent für $\operatorname{Re} w > 2$. Das Integral bleibt in $\operatorname{Re} w > 2$, $u \geqq 1$ dem Betrage nach unterhalb $C_{13}(j)\,|w|^j$ mit einer nur von j abhängigen Konstanten $C_{13}(j)$. Beachtet man noch (44), so folgt

$$|\psi(w,u)| \leqq C_{14}(j)\left|2^{2-\frac{w}{2}-2j}\,\pi^{-\frac{w}{2}-j}\,\Gamma\left(\frac{w}{2}\right) u^{-\frac{w}{2}-j}\, w^j\right| \times$$

$$\times \sum_{(T)} t_0^{-\operatorname{Re}\frac{w}{2}} \cdot |T|^{\frac{m-j}{2}}. \tag{50}$$

Die letzte Reihe konvergiert jedenfalls für $\operatorname{Re} w \geqq 5$, $j \geqq m+4$. Zum Beweise schreiben wir sie in der Form

$$\sum_{t_0, n} t_0^{-\operatorname{Re}\frac{w}{2}} \cdot n^{\frac{m-j}{2}}\, A(t_0, n)\,,$$

wobei $A(t_0, n)$ die Anzahl der Matrizen (T) mit erstem Element t_0 und Determinanten n bedeutet. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $A(t_0, n)$ höchstens gleich t_0 ist. Sind

$$(T) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \quad (T^*) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1^* \\ t_1^* & t_2^* \end{pmatrix}$$

zwei verschiedene Matrizen der zuletzt genannten Art, so gilt $t_1 \not\equiv t^* \pmod{t_0}$, denn andernfalls wäre

$$(T^*) = (T)\left[\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \text{ mit } q = \frac{t_1^* - t_1}{t_0} \neq 0$$

im Widerspruch zur Bestimmung des Systems der Matrizen (T). Da bei gegebenen t_0, n das Element t_1 die Matrix (T) eindeutig bestimmt, ist damit die Behauptung über $A(t_0, n)$ bereits bewiesen, und das genügte zum Nachweis, daß (50) für $\operatorname{Re} w \geqq 5$, $j \geqq m+4$ sinnvoll ist.

Wir wählen jetzt $p_0 \geqq 5$ fest. Aus (50) folgt dann

$$\left| u^j\, \frac{\zeta(p_0+iq)\,\psi(p_0+iq,u)}{\Gamma\left(\frac{p_0+iq}{2}\right)} \right| \leqq C_{15}(j)\,(1+|q|)^j \tag{51}$$

für $-\infty < q < \infty$, $u \geqq 1$, $j \geqq m+4$ mit einer nur von j abhängigen Konstanten $C_{15}(j)$. Aus (41) und (43) folgt

$$\psi(w, u)\, \zeta(w)\, \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \pi^{-\frac{w}{2}} = \psi(2-w, u)\, \zeta(2-w)\, \Gamma\left(\frac{2-w}{2}\right) \pi^{\frac{w-2}{2}},$$

$$\frac{\zeta(2-w)\,\psi(2-w, u)}{\Gamma\left(\frac{2-w}{2}\right)} = \pi^{1-w} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-w}{2}\right)} \right)^2 \frac{\zeta(w)\,\psi(w, u)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

Nach (51) ist daher für $-\infty < q < \infty$, $u \geqq 1$

$$\left| u^j \frac{\zeta(2-p_0-iq)\,\psi(2-p_0-iq)}{\Gamma\left(\frac{2-p_0-iq}{2}\right)} \right| \leqq C_{16}(p_0, j)\,(1+|q|)^{2(p_0-1)+j}. \tag{52}$$

Dabei ist $2-p_0 \leqq -3$. Wegen (46) ist gleichmäßig in $2-p_0 \leqq \operatorname{Re} w \leqq p_0$, $u \geqq 1, w = p + iq$

$$u^j \frac{\zeta(w)\,\psi(w, u)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)} = O\left(q^{\alpha_5 + \frac{1}{2} - \frac{p_0}{2}}\, e^{\frac{\pi}{4} q}\right) \qquad \text{für } q \to \infty.$$

Da ferner die Funktion

$$u^j \frac{\zeta(w)\,\psi(w, u)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}$$

abgesehen von einem Pol bei $w = 2$ regulär ist (s. S. 272), folgt aus (51) und (52) nach einem Satz von Phragmen-Lindelöf, angewandt auf den Bereich $2-p_0 \leqq \operatorname{Re} w \leqq p_0$, $q \geqq 1$

$$\left| u^j \frac{\zeta(w)\,\psi(w, u)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)} \right| \leqq C_{17}(p_0, j)\, q^{\alpha_6(p_0, j)}$$

für $2-p_0 \leqq \operatorname{Re} w \leqq p_0$, $q \geqq 1$, $u \geqq 1$ mit nur von p_0 und j abhängigen Konstanten C_{17}, α_6. Beachten wir noch (47) und (30), so erhalten wir (42).

Nach dem am Anfang von Abschnitt IV Gesagten fehlt am vollständigen Beweis von (23) nur noch der Nachweis einer Abschätzung der Art (25). In einem beliebigen Vertikalstreifen $\frac{m}{2} \leqq \operatorname{Re} s \leqq \sigma_0$ erhält man eine solche Abschätzung, indem man in (36) die Integration bei $r = |2t|$ $(s = \sigma + it)$ unterbricht und die Beiträge der einzelnen Glieder von (38) zu (36) unter Verwendung von (40) und (42) abschätzt. Wegen der absoluten Konvergenz von (24) für $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2}$ gilt diese Abschätzung dann gleichmäßig in der ganzen Halbebene $\operatorname{Re} s \geqq \frac{m}{2}$. Damit ist der Beweis von (23) zu Ende geführt. Nach III gilt jetzt also (6) für die zu Beginn von III genannte Art Funktionen $f(\tau)$.

V. Wir beweisen nun (6) für die charakteristischen Funktionen $f(\mathfrak{p})$ von offenen Teilmengen $\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}$. Wir setzen zunächst noch zusätzlich voraus, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ ganz in einem Kompaktum von $\tilde{\mathfrak{F}}$ enthalten ist. Es sei dann $\mathfrak{G}$ die

Menge derjenigen Punkte der oberen τ-Halbebene, denen auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ Punkte aus $\tilde{\mathfrak{G}}$ entsprechen. $\mathfrak{G}$ ist eine offene Menge, die durch Modulsubstitutionen auf sich abgebildet wird und deren Durchschnitt mit $\mathfrak{F}$ einem geeigneten Kompaktum angehört. Zu $\mathfrak{G}$ bestimmen wir nun für jedes $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Mengen $\mathfrak{G}_\varepsilon^-$, $\mathfrak{G}_\varepsilon^+$: $\mathfrak{G}_\varepsilon^-$ bestehe aus denjenigen Punkten von $\mathfrak{G}$, die vom Rand von $\mathfrak{G}$ einen hyperbolischen Abstand $> \varepsilon$ haben; $\mathfrak{G}_\varepsilon^+$ bestehe aus allen Punkten der oberen τ-Halbebene, die von $\mathfrak{G}$ einen hyperbolischen Abstand $< \varepsilon$ haben (Abstand im Sinne der unteren Grenze der Entfernungen von Punkten aus $\mathfrak{G}$). $\mathfrak{G}_\varepsilon^-$ und $\mathfrak{G}_\varepsilon^+$ sind wiederum offene Punktmengen, die durch Modulsubstitutionen auf sich abgebildet werden und deren Durchschnitte mit $\mathfrak{F}$ einem geeigneten Kompaktum angehören. Ferner gilt offenbar $\mathfrak{G}_\varepsilon^- \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_\varepsilon^+$ und für die hyperbolischen Inhalte

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} |(\mathfrak{G}_\varepsilon^+ - \mathfrak{G}_\varepsilon^-) \cap \mathfrak{F}| = 0. \tag{53}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $v_\varepsilon(\varrho)$ eine in $\varrho \geqq 0$ definierte Funktion mit folgenden Eigenschaften

1. $v_\varepsilon(\varrho) = 1$ für $\varrho = 0$,
2. $0 < v_\varepsilon(\varrho) < 1$ für $0 < \varrho < \varepsilon$,
3. $v_\varepsilon(\varrho) = 0$ für $\varrho \geqq \varepsilon$,
4. $v_\varepsilon(\varrho)$ ist beliebig oft stetig differenzierbar nach ϱ (in $\varrho = 0$ einseitige Ableitungen),
5. sämtliche Ableitungen von $v_\varepsilon(\varrho)$ verschwinden in $\varrho = 0$, $\varrho = \varepsilon$.

Wir bilden dann mit den charakteristischen Funktionen $\gamma_\varepsilon^-(\tau)$, $\gamma_\varepsilon^+(\tau)$ von $\mathfrak{G}_\varepsilon^-$, $\mathfrak{G}_\varepsilon^+$ die Funktionen

$$f_\varepsilon^-(\tau) = \int_{\mathfrak{E}} v_\varepsilon(\varrho(\tau,\theta))\, \gamma_\varepsilon^-(\theta)\, \omega(\theta), \qquad f_\varepsilon^+(\tau) = \int_{\mathfrak{E}} v_\varepsilon(\varrho(\tau,\theta))\, \gamma_\varepsilon^+(\theta)\, \omega(\theta),$$

wobei $\mathfrak{E}$ die obere τ-Halbebene und $\varrho(\tau, \theta)$ den hyperbolischen Abstand der Punkte τ, θ bezeichnet. Die Funktionen $(f_\varepsilon^-\tau)$, $f_\varepsilon^+(\tau)$ sind dann Funktionen der zu Beginn von Abschnitt III genannten Art, und auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ hat man

$$f_\varepsilon^-(\mathfrak{p}) \leqq f(\mathfrak{p}) \leqq f_\varepsilon^+(\mathfrak{p}).$$

Da $f_\varepsilon^-(\tau)$, $f_\varepsilon^+(\tau)$ nur in $\mathfrak{G}_{2\varepsilon}^+ - \mathfrak{G}_{2\varepsilon}^-$ von einander abweichen, gilt nach (53)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-, 1) = 0.$$

Da nun (6) mit f_ε^+, f_ε^- anstelle von f für beliebiges $\varepsilon > 0$ richtig ist, gilt (6) auch für f selbst.

Wir müssen uns jetzt noch von der Voraussetzung frei machen, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ in einem Kompaktum von $\tilde{\mathfrak{F}}$ enthalten sein sollte. Für jedes $H > \frac{\sqrt{3}}{2}$ sei $\tilde{\mathfrak{G}}_1(H)$ diejenige Punktmenge von $\tilde{\mathfrak{F}}$, die der Punktmenge $\mathfrak{F}_H : \tau \in \mathfrak{F}$, $y < H$ entspricht, und $f_1(\mathfrak{p}, H)$ die zugehörige charakteristische Funktion. (6) gilt dann mit $f(\mathfrak{p}) = f_1(\mathfrak{p}; H)$. Da (6) nach III auch mit der Funktion $f(\mathfrak{p}) \equiv 1$ richtig ist, gilt (6) auch für die Funktion $f(\mathfrak{p}) \equiv f_2(\mathfrak{p}; H) = 1 - f_1(\mathfrak{p}; H)$. $f_2(\mathfrak{p}; H)$

ist die charakteristische Funktion des Bereiches $\tilde{\mathfrak{S}}_2(H) = \tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{\mathfrak{S}}_1(H)$, den man durch Übertragen der Punkte τ aus $\mathfrak{F}$ mit $y \geqq H$ erhält. Ist nun $\tilde{\mathfrak{S}}$ eine beliebige offene Punktmenge auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $f(\mathfrak{p})$ ihre charakteristische Funktion, so bilden wir die Mengen

$$\tilde{\mathfrak{S}}^-(H) = \tilde{\mathfrak{S}} \cap \tilde{\mathfrak{S}}_1(H), \quad \tilde{\mathfrak{S}}^+(H) = \tilde{\mathfrak{S}} \cup \tilde{\mathfrak{S}}_2(H)$$

und ihre charakteristischen Funktionen $f^-(\mathfrak{p}; H)$, $f^+(\mathfrak{p}; H)$. Da $\tilde{\mathfrak{S}}^-(H)$ offen und in einem Kompaktum von $\tilde{\mathfrak{F}}$ enthalten ist, gilt (6) für $f^-(\mathfrak{p}; H)$ anstelle von $f(\mathfrak{p})$. Ferner gilt (6) aber auch für $f^+(\mathfrak{p}; H)$ anstelle von f, da ja

$$f^+(\mathfrak{p}; H) = f^-(\mathfrak{p}; H) + f_2(\mathfrak{p}; H)$$

ist. Aus den Relationen

$$f^-(\mathfrak{p}; H) \leqq f(\mathfrak{p}) \leqq f^+(\mathfrak{p}; H),$$

$$\lim_{H \to \infty} (f^+(\mathfrak{p}; H) - f^-(\mathfrak{p}; H), 1) = 0$$

folgt nun die Gültigkeit von (6) auch für die Funktion $f(\mathfrak{p})$ selbst. Damit ist der Beweis des Satzes auch für die allgemeinste Art offener Mengen erbracht.

Literatur

[1] E. Hecke: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen ..., 1. Mitt. Math. Z. 1, 357–376 (1918); 2. Mitt. Math. Z. 6, 11–51 (1920). — [2] E. Hecke: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. 112, 664–699 (1936). — [3] H. Maass: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen .... Math. Ann. 121, 141–183 (1949). — [4] H. Maass: Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen. Math. Ann. 122, 90–108 (1950). — [5] W. Roelcke: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Heidelberg. Akad. Wiss. 1956, 4. Abh. — [6] B. Schoeneberg: Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen .... Math. Ann. 116, 511–523 (1938–39). — [7] E. C. Titchmarsh: The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford 1951. — [8] G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922. — [9] N. Wiener: The Fourier Integral and certain of its Applications. Cambridge 1933. — [10] E. Witt: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Hamburg. Abh. 14, 323–337 (1941).

(Eingegangen am 8. September 1955)

CORDES, H. O.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 278—312 (1956)

Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen

Von
HEINZ OTTO CORDES aus Göttingen

Die Frage nach der Existenz von Lösungen der ersten Randwertaufgabe für quasilineare elliptische Differentialgleichungen ist im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen von LERAY und SCHAUDER [5] auf die Anwendung topologischer Resultate zurückgeführt worden. Der dabei gefundene Existenzsatz wurde später unter schwächeren Voraussetzungen von L. NIRENBERG [7] wiederbewiesen.

NIRENBERG erreicht dieses Ziel direkt durch Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes. Der wesentliche Punkt seines Verfahrens ist die Gewinnung einer apriori-Hölderkonstanten für die ersten Ableitungen jeder zweimal stetig differenzierbaren Lösung u der linearen Differentialgleichung $a_{ik}(x)\, u_{|ik} = 0$, die im wesentlichen nur von den Randwerten von u und der Form des zugrunde gelegten Gebietes, nicht aber insbesondere vom Stetigkeitsverhalten der $a_{ik}(x)$ als Funktionen von x abhängt. NIRENBERG erhält diese Konstante durch ein Verfahren, welches die Quasi-Konformität des Systems $u_{|i}$ von Funktionen (u eine Lösung von $a_{ik} u_{|ik} = 0$) benutzt nebst einem Lemma folgenden Typs: Wenn für ein stetig differenzierbares v gilt $\int (v_x^2 + v_y^2)\, |x - x_0|^{-2\alpha} dx \leqq c$, $\alpha > 0$ und $|v| \leqq C$ für alle x_0 eines Gebietes D, dann folgt für jedes im Innern liegende Teilgebiet die Existenz einer gleichmäßigen Hölderschranke zum Exponenten α für v, die nur von α, c und der Beschaffenheit von Gebiet und Teilgebiet abhängt. Im Zusammenhang mit Existenzfragen bei quasilinearen Differentialgleichungen scheinen Gedanken dieser Art erstmalig von C. B. MORREY [6] publiziert zu sein.

Im Fall von n unabhängigen Veränderlichen gewinnt NIRENBERG auf diesem Wege zwar eine entsprechende apriori-Abschätzung [1], jedoch tritt die in diesem Zusammenhang entscheidende Unabhängigkeit vom Stetigkeitsverhalten der $a_{ik}(x)$ jetzt nicht mehr auf, so daß mit ihr der von NIRENBERG für $n = 2$ benutzte Weg nicht mehr gangbar ist.

In vorliegender Arbeit greife ich den Gedanken der Zurückführung von Hölderstetigkeitsaussagen auf Beschränktheitsaussagen für gewisse Integrale im Quadratmittel auf, jedoch ohne eine Zurückspielung auf quasikonforme Abbildungen oder deren Verallgemeinerungen vorzunehmen, und auf eine etwas andere Weise. Es ist möglich, für beliebige quadratisch integrable Funktionen $v(x)$ die Hölderstetigkeit und die Gewinnung gleichmäßiger Hölderkonstanten auf den Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit von $\int (v(x) - v(x_0))^2\, |x - x_0|^{-n-2\alpha} dx$ zurückzuführen (vgl. § 1). Eine Aussage über

die Hölderstetigkeit der ersten Ableitungen von v ist aus der Kenntnis einer Majoranten des entsprechenden Integrals über den Reihenrest der bei den Gliedern erster Ordnung abgebrochenen Taylorentwicklung von v möglich.

Diese Bemerkungen und einige scharfe Abschätzungen von $\int u^2 r^{\varkappa-2} dx$ und $\int u_{|i}^2 r^{\varkappa} dx$ durch $\int (a_{ik} u_{|ik})^2 r^{\varkappa+2} dx$, die bis zum Rande Gültigkeit haben und die durch Verschärfung gewisser von E. Heinz [3] zur Behandlung gewisser Fragen beim Cauchyschen Anfangswertproblem benutzten Abschätzungen gewonnen werden, gestatten es, die Unabhängigkeit vom Stetigkeitsmodul der $a_{ik}(x)$ und damit den Existenzbeweis für die Lösungen der ersten Randwertaufgabe bei quasilinearen Gleichungen auch im Falle von mehr als zwei Veränderlichen zu erzielen. Allerdings benötigen wir dabei für die Matrix $((a_{ik}))$ eine die Bedingung der Elliptizität verschärfende sog. Kegelbedingung, die im Falle $n = 2$ gerade mit der gewöhnlichen Elliptizitätsforderung übereinstimmt, mit wachsender Variablenzahl n aber eine mehr und mehr einschneidende Forderung darstellt (vgl. § 4). Es hat den Anschein, als ob diese Forderung weniger durch die Grenzen der Richtigkeit der Existenzaussage, als vielmehr durch die zu ihrer Herleitung benutzten *quadratischen* Abschätzungen impliziert würde. Eine analog durchgeführte Abschätzung mit dem Exponenten eins bzw. $1 + \varepsilon$ (ε klein) scheint aus einem gewissen Aspekt heraus mehr Aussicht darauf zu haben, eine Existenzaussage zu liefern, die nur mit der Forderung der Elliptizität allein auskommt. Jedoch ist mir z. Z. noch nicht bekannt, ob derartige Abschätzungen mit entsprechend scharfen Konstanten möglich sind. Über weitere Einzelheiten zu den oben angedeuteten Aussagen vergleiche man den § 4: Problemstellung.

Die Paragraphen 1, 2, 3 entwickeln im einzelnen die später benötigten Hilfsmittel, insbesondere die Verbindung zwischen Hölderstetigkeit und Integralbeschränktheit (§ 1) und die erwähnten Abschätzungen von $\int u^2 r^{\varkappa-2} dx$ und $\int u_{|i}^2 r^{\varkappa} dx$ durch $\int (a_{ik} u_{|ik})^2 r^{\varkappa+2} dx$ (§§ 2, 3). In den §§ 5—8 erfolgt dann die Herleitung der entscheidenden Abschätzung, bei der die Kegelbedingungen eingehen.

Es sei bemerkt, daß wir außer ganz elementarem Rüstzeug nichts voraussetzen, als allein die Richtigkeit des Schauderschen Fixpunktsatzes und den Existenzsatz für die Lösung der ersten Randwertaufgabe bei linearen Gleichungen, wie er in der bekannten Arbeit von Schauder [9] formuliert und bewiesen ist.

In einer weiteren Arbeit hoffe ich darzutun, daß auch der erwähnte Schaudersche Existenzsatz für lineare Gleichungen unmittelbar mit denselben Mitteln und nach derselben Methode gewonnen werden kann, und zwar nicht nur für die erste Randwertaufgabe, sondern auch für die zweite und dritte (es handelt sich dabei im wesentlichen nur um die Gewinnung von a priori-Hölder-Abschätzungen auch für die zweiten Ableitungen, wobei aber die Abschätzungskonstanten jetzt vom Stetigkeitsverhalten der a_{ik} abhängen dürfen). Ferner erscheint es mir dann möglich, auf entsprechende Weise auch Existenzsätze für höhere Randwertaufgaben bei quasilinearen Differentialgleichungen zu beweisen.

§ 1. Hölderstetigkeit und Beschränktheit von $\int u^2 r^\alpha dx$

Die Funktion $u(x)$ sei in dem n-dimensionalen, beschränkten Bereich D erklärt. Wir wollen eine Beziehung herleiten zwischen der Hölderstetigkeit von $u(x)$ und der Beschränktheit des Integrals $\int \frac{(u(x) - u(x_0))^2}{|x - x_0|^{n+2\alpha}} dx$. Zunächst definieren wir etwas abweichend vom üblichen Sprachgebrauch als Hölderkonstante $H_{\alpha,\delta} = H_{\alpha,\delta}(u; D)$ der Funktion $u(x)$ im Bereich D und zum Exponenten α:

$$H_{\alpha,\delta} = \sup_{\substack{x^1 \neq x^2;\, x^1, x^2 \in D \\ |x^1 - x^2| \leq \delta}} \{|u(x^1) - u(x^2)|\, |x^1 - x^2|^{-\alpha}\}.$$

$\delta > 0$ sei dabei fest vorgegeben. Wenn wir $u(x)$ in D gleichmäßig α-hölderstetig nennen, sobald $H_{\alpha,\delta} < \infty$ ist, so ist diese Definition bei gleichmäßig beschränkten Funktionen oder auch bei nicht zu ausgearteten Bereichen D äquivalent zur üblichen Definition der gleichmäßigen α-Hölderstetigkeit, nur ist die übliche Hölderkonstante $H_\alpha(u, D)$ durch eine im allgemeinen kleinere, aber in unserm Zusammenhang übersichtlicher zu handhabende Konstante ersetzt. Zum Beispiel können wir mit $H_{\alpha,\delta}$ leicht folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz: *Der Bereich D möge in einem Gebiet D_0 eingebettet sein, in welchem $u(x)$ auch noch erklärt sein möge. Der Abstand des Bereiches D vom Rande des Gebietes D_0 sei $d > 0$.*

Behauptung: Wenn für ein $\delta < d$ und ein $\alpha > 0$ gilt

$$\int_{|x - x_0| \leq \delta} \frac{(u(x) - u(x_0))^2}{|x - x_0|^{n+2\alpha}} dx \leq q(\delta)$$

gleichmäßig für alle $x_0 \in D$, so ist $u(x)$ in D gleichmäßig hölderstetig mit einer Hölderkonstanten $H_{\alpha,\delta}(u; D)$, für die gilt

$$H_{\alpha,\delta} \leq 2^{n/2+1} \sqrt{n\, q(\delta)\, \omega_n^{-1}} \tag{1.1}$$

(ω_n sei die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel).

Bemerkung: Die Behauptung gilt auch noch für $H_{0,\delta} = S(\delta)$, den Stetigkeitsmodul von $u(x)$, d. h. aus

$$\int_{|x - x_0| \leq \delta} \frac{(u(x) - u(x_0))^2}{|x - x_0|^n} dx \leq q(\delta)$$

folgt

$$S(\delta) \leq 2^{n/2+1} \sqrt{n\, q(\delta)\, \omega_n^{-1}}\,. \tag{1.1 a}$$

Beweis[1]): Für beliebiges $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$ aus D und x aus D_0 mit $|x^1 - x^2| \leq \delta$ gilt: $(u(x^1) - u(x^2))^2 \leq 2\,(u(x) - u(x^1))^2 + 2\,(u(x) - u(x^2))^2$.

---

[1]) Der kleine Kunstgriff dieses Beweises entstammt dem Beweis eines Lemmas von Nirenberg [7], S. 110. Nirenberg beweist dort damit die Beschränktheit von $H_{\alpha,\delta}$ durch $\int (u_{|x}^2 + u_{|y}^2)\, r^{-2\alpha}\, dx\, dy$ im Falle $n = 2$.

Integriere diese Ungleichung über die Kugel $\mathfrak{K}$: $\left|x - \frac{x^1+x^2}{2}\right| \leqq \frac{1}{2}|x^1 - x^2|$:

$$\frac{1}{n}\,\omega_n \frac{|x^1-x^2|^n}{2^n}(u(x^1)-u(x^2))^2 \leqq 2\int_{\mathfrak{K}}(u(x)-u(x^1))^2dx + 2\int_{\mathfrak{K}}(u(x)-u(x^2))^2dx \leqq$$

$$\leqq 2\,|x^1-x^2|^{n+2\alpha}\int_{\mathfrak{K}}\frac{(u(x)-u(x^1))^2}{|x-x^1|^{n+2\alpha}}\,dx + 2\,|x^1-x^2|^{n+2\alpha}\int_{\mathfrak{K}}\frac{(u(x)-u(x^2))^2}{|x-x^2|^{n+2\alpha}}\,dx\,.$$

Daraus:

$$\left(\frac{|u(x^1)-u(x^2)|}{|x^1-x^2|^\alpha}\right)^2 \leqq 2^{n+1}\frac{n}{\omega_n}\int_{|x-x^1|\leqq\delta}\frac{(u(x)-u(x^1))^2}{|x-x^1|^{n+2\alpha}}\,dx +$$

$$+\,2^{n+1}\frac{n}{\omega_n}\int_{|x-x^2|\leqq\delta}\frac{(u(x)-u(x^2))^2}{|x-x^2|^{n+2\alpha}}\,dx \leqq 2^{n+2}\,n/\omega_n\,q(\delta)\,,$$

also $H_{\alpha,\delta} \leqq 2^{n/2+1}\sqrt{n\,q(\delta)\,\omega_n^{-1}}$, w.z.b.w.

A fortiori können wir aus einer Abschätzung der Form

$$\int_{|x-x_0|\leqq\delta}\frac{(u(x)-u(x_0)-(x_i-x_i^0)u_{|i}(x))^2}{|x-x_0|^{n+2+2\alpha}}\,dx \leqq q_1(\delta), \qquad \alpha \geqq 0,\ \delta > 0,\ x_0 \in D$$

die gleichmäßige Hölderstetigkeit der ersten partiellen Ableitungen $u_{|i}$ in D herleiten. Wir kürzen dabei ab $u_{|i} = \partial u/\partial x_i$; über doppelt vorkommende Indizes werde summiert, also z. B. sei $(x_i - x_i^0)\,u_{|i}$ geschrieben für $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\partial u/\partial x_i = (x - x_0, \operatorname{grad} u)$. Es gilt der

Hilfssatz: *Über D, D_0 und d mögen die Voraussetzungen des ersten Hilfssatzes erfüllt sein. $u_{|i} = \partial u/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, existiere für x_0 aus D.*

Behauptung: Wenn für ein $\delta < d$ und ein $\alpha > 0$ gilt

$$\int_{|x-x_0|\leqq\delta}\frac{(u(x)-u(x_0)-(x_i-x_i^0)\,u_{|i}(x_0))^2}{|x-x_0|^{n+2+2\alpha}}\,dx \leqq q_1(\delta)$$

gleichmäßig für alle $x_0 \in D$, dann ist $u_{|i}(x)$ in D gleichmäßig hölderstetig und es gilt für die Hölderkonstante

$$H'_{\alpha,\delta} = H'_{\alpha,\delta}(u;D) = \sup_{\substack{x^1 \neq x^2;\ x^1,x^2 \in D\\ |x^1-x^2|\leqq\delta}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(u_{|i}(x^1)-u_{|i}(x^2))^2\right]^{1/2}|x^1-x^2|^{-\alpha}\right\}$$

die Abschätzung

(1.2) $$H'_{\alpha,\delta} \leqq 2^{n/2+2}\sqrt{n(n+2)\,q_1(\delta)\,\omega_n^{-1}}\,.$$

Beweis: Wir haben diesmal mit $x_0 = \frac{x^1+x^2}{2} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\int_{\mathfrak{K}}(u(x)-u(x^1)-(x_i-x_i^1)\,u_{|i}(x^1))^2\,dx +$$

$$+\int_{\mathfrak{K}}(u(x)-u(x^2)-(x_i-x_i^2)\,u_{|i}(x^2))^2dx \geqq$$

$$\geqq 1/2\int_{\mathfrak{K}}(u(x^1)+(x_i^0-x_i^1)\,u_{|i}(x^1)-u(x^2)-(x_i^0-x_i^2)\,u_{|i}(x^2)+$$

$$+\,(x_i-x_i^0)\,(u_{|i}(x^1)-u_{|i}(x^2)))^2\,dx$$

$$= 1/2\int_{\mathfrak{K}}(u(x^1)+(x_i^0-x_i^1)\,u_{|i}(x^1)-u(x^2)-(x_i^0-x_i^2)\,u_{|i}(x^2))^2\,dx +$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\omega_n\,[n(n+2)]^{-1}\frac{|x^2-x^1|^{n+2}}{2^{n+2}}(u_{|i}(x^1)-u_{|i}(x^2))^2 \geqq$$

$$\geqq \omega_n\,[n(n+2)]^{-1}\,2^{-n-3}\,|x^1-x^2|^{n+2}(u_{|i}(x^1)-u_{|i}(x^2))^2\,.$$

Hierbei wurde benutzt, daß $\int\limits_{\mathfrak{K}} (x_i - x_i^0)\, d x = 0$, wie auch $\int\limits_{\mathfrak{K}} (x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)\, d x = 0$, $i \neq k$, gilt. Es ergibt sich genau wie beim ersten Hilfssatz:

$$\frac{[(u_{|i}(x^1) - u_{|i}(x^2))^2]^{1/2}}{|x^1 - x^2|^\alpha} \leqq 2^{n/2+2}\sqrt{n(n+2)\, q_1(\delta)\, \omega_n^{-1}}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Auch hier gilt der

Zusatz: Die behauptete Ungleichung gilt sinngemäß auch für $\alpha = 0$, wo die Hölderkonstante $H'_{\alpha,\delta}(u; D)$ in den Stetigkeitsmodul $S'(\delta)$ der Vektorfunktion $u_{|i}(x)$ im Bereich D übergeht.

Wir können auch für die zweiten Ableitungen $u_{|ik}(x)$ und augenscheinlich für alle höheren Ableitungen entsprechende Relationen herleiten, jedoch ergeben sich dabei etwas andere Formeln. Wieder wird, wenn wir

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \Big(u(x) - u(x_1) - (x_i - x_i^1)\, u_{|i}(x^1) - \frac{1}{2!}(x_i - x_i^1)(x_k - x_k^1)\, u_{|ik}(x^1)\Big)^2 d x = I(x, x^1)$$

setzen:

$$I(x, x^1) + I(x, x^2)$$
$$\geqq 1/8 \int\limits_{\mathfrak{K}} \big((x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)(u_{|ik}(x^1) - u_{|ik}(x^2)) + P(x - x_0)\big)^2 d x,$$

wobei $P(x - x_0) = p_{0i}(x_i - x_i^0) + p_1$ ein Polynom ersten Grades in den $(x_i - x_i^0)$ ist mit gewissen, von der Integrationsvariablen unabhängigen Koeffizienten. Jedoch sind die beiden in den Absolutstrichen auftretenden Terme jetzt nicht mehr orthogonal, es folgt vielmehr:

$$I(x, x^1) + I(x, x^2)$$
$$\geqq 1/8 (u_{|ik}(x^1) - u_{|ik}(x^2))\, (u_{|jl}(x^1) - u_{|jl}(x^2)) \times$$
$$\times \int\limits_{\mathfrak{K}} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)\, d x +$$
$$+ 1/8 \int\limits_{\mathfrak{K}} (p_{0i}(x_i - x_i))^2 d x + 1/8\, p_1^2\, \omega_n / n\, |x^1 - x^2|^n\, 2^{-n} +$$
$$+ 1/4\, (u_{|ii}(x_1) - u_{|ii}(x_2))\, p_1 \frac{\omega_n}{n(n+2)}\, |x^1 - x^2|^{n+2}\, 2^{-n-2}.$$

Nun ist die $n^2 \times n^2$-Matrix $Z_{ik,jl} = \int\limits_{\mathfrak{K}} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)\, d x$ ($i\,k$ vorderer, $j\,l$ hinterer Index) im Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen c_{ik} positiv definit, denn es folgt für beliebige Konstanten c_{ik} mit $c_{ik} = c_{ki}, ik = 1, \ldots, n$, sofort

$$\sum_{i,j,k,l=1} Z_{ik,jl}\, c_{ik}\, c_{jl} = \int\limits_{\mathfrak{K}} [c_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)]^2\, d x \geqq 0$$

und „=“ dann und nur dann, wenn das Polynom $c_{ik} x_i x_k$ identisch verschwindet, d. h. wenn $c_{ik} = 0$, $i, k = 1, \ldots, n$ gilt. Bei Betrachtung des Verhaltens der $Z_{ik,jl}$ unter Einwirkung einer Ähnlichkeitstransformation $x' = \varrho\, x$ bemerkt man, daß gelten muß

$$Z_{ik,jl}\, c_{ik}\, c_{jl} \geqq a_n\, |x^1 - x^2|^{n+4}\, c_{ik}^2$$

mit einem nur von n abhängigen a_n. Folglich ist

$$\begin{aligned}\frac{(u_{|ik}(x^1)-u_{|ik}(x^2))^2}{|x^1-x^2|^{2\alpha}} &\leqq 8\,a_n^{-1}\,|x^1-x^2|^{-n-4-2\alpha}\,(I(x,x^1)+I(x,x^2))+\\ &+2^{-n-2}\,[a_n\,n(n+2)]^{-1}\,\omega_n\,|x^1-x^2|^{-2\alpha}\times\\ &\quad\times\left\{-\frac{4(n+2)\,p_1^2}{|x^1-x^2|^4}+2\,\frac{(u_{|ii}(x^1)-u_{|ii}(x^2))}{2\sqrt{n+2}}\,\frac{2\,p_1\sqrt{n+2}}{|x^1-x^2|^2}\right\}\\ &\leqq 16\,a_n^{-1}q_2(\delta)+2^{-n-4}\omega_n\,[a_n\,n(n+2)^2]^{-1}\,\frac{(\varDelta u(x^1)-\varDelta u(x^2))^2}{|x^1-x^2|^{2\alpha}},\end{aligned}$$

sofern jetzt die zu den Bedingungen der ersten beiden Hilfssätze analoge Forderung

$$\begin{aligned}\int\limits_{|x-x_0|\leqq\delta}\Big(u(x)-u(x_0)-(x_i-x_i^0)\,u_{|i}(x_0)-\frac{1}{2!}(x_i-x_i^0)\,(x_k-x_k^0)\,u_{|ik}(x_0)\Big)^2\times\\ \times\frac{dx}{|x-x_0|^{4+n+2\alpha}}\leqq q_2(\delta)\end{aligned}$$

für $x_0\in D$ gestellt wird.

Ersichtlich ist also die Hölderkonstante $H''_{\alpha,\delta}$ der zweiten Ableitungen von u auf diese Weise durch $q_2(\delta)$ und die Hölderkonstante $H_{\alpha,\delta}(\varDelta\,u;\,D)$ der Funktion $\varDelta\,u$ abgeschätzt, jedoch ergibt sich nicht mehr eine Abschätzung durch $q_2(\delta)$ allein.

Wir werden die beiden Ungleichungen (1.1) und (1.2) später wesentlich verwenden, jedoch nicht die Ungleichung (1.3).

Wir bemerken endlich, daß umgekehrt aus der Existenz von $H_{\alpha,\delta}$ nur die gleichmäßige Beschränktheit von $\int\limits_{|x-x_0|\leqq\delta}\frac{(u(x)-u(x_0))^2}{|x-x_0|^{n+2\alpha'}}\,dx$ für $\alpha'<\alpha$ folgt. Daher ist die Existenz einer Konstanten $q(\delta)$ mit den im ersten Hilfssatz geforderten Eigenschaften zwar äquivalent mit der Forderung der gleichmäßigen Hölderstetigkeit, jedoch nur qualitativ (ohne Anschauung der α). Bei der Betrachtung der α ist ersteres schärfer. Entsprechendes gilt für die Aussagen der Ungleichungen (1.2) und (1.3).

§ 2. Herleitung einiger Integralidentitäten

Zum Zwecke späteren Gebrauchs stellen wir in diesem Paragraphen einige Identitäten zusammen, die sich sämtlich elementar mit Hilfe partieller Integration herleiten lassen. Die Gebietsintegrale seien dabei stets bei $x=0$ im uneigentlichen Sinne existent[2]).

B sei irgendein Bereich mit der zweimal hölderstetig differenzierbaren Berandung Γ. Die Funktion $u(x)$ sei in B zweimal stetig differenzierbar.

Behauptung:

$$\text{(2.1}'\text{)}\qquad\begin{aligned}\int\limits_B u_{|i}^2\,r^\alpha\,dx+\int\limits_B u\,\varDelta\,u\,r^\alpha\,dx-\frac{\alpha(\alpha+n-2)}{2}\int\limits_B u^2r^{\alpha-2}\,dx\\ =\int\limits_\Gamma u\,u_{|\nu}\,r^\alpha\,do-\frac{\alpha}{2}\int\limits_\Gamma u^2\,r^{\alpha-1}\,r_{|\nu}\,do.\end{aligned}$$

[2]) Vorausgesetzt, daß B den Nullpunkt im Innern oder als Randpunkt enthält.

Darin sei $u_{|\nu}$ der Differentialquotient von u in Richtung der äußeren Normalen und $u_{|i}$ sei als Abkürzung für $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ geschrieben; über doppelt vorkommende Indizes möge summiert werden von 1 bis n (also bedeutet auch z. B. $u_{|i}^2$ soviel wie $\sum_{i=1}^{m} u_{|i}^2$). α sei beliebig reell.

Zum Beweis obiger Identität genügt die Bemerkung, daß $\Delta u^2 = 2 u_{|i}^2 + 2 u \Delta u$ und daß $\Delta(r^\alpha) = \alpha(\alpha + n - 2) r^{\alpha-2}$ gilt, man folgert daraus die Formel durch die partielle Integration

$$\int_B \Delta(u^2) r^\alpha dx = \int_B u^2 \Delta(r^\alpha) dx + \int_\Gamma ((u^2)_{|\nu} r^\alpha - u^2 (r^\alpha)_{|\nu}) do.$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}(2.2')\qquad &\int_B (\Delta u)^2 r^{\alpha+2} dx - \int_B u_{|ik}^2 r^{\alpha+2} dx - \\ &\quad - \alpha(\alpha+2) \int_B u_{|r}^2 r^\alpha dx + (\alpha+2)(\alpha+n-1) \int_B u_{|i}^2 r^\alpha dx \\ &= \int_\Gamma u_{|\nu} u_{|ii} r^{\alpha+2} do - \int_\Gamma u_{|i} u_{|i\nu} r^{\alpha+2} do - \\ &\quad - (\alpha+2) \int_\Gamma (u_{|r} u_{|\nu} - u_{|i}^2 r_{|\nu}) r^{\alpha+1} do.\end{aligned}$$

Beweis: Man bemerke, daß für dreimal stetig differenzierbare $u(x)$ gilt:

$$(\Delta u)^2 - (u_{|ik}^2) = (u_{|i} u_{|k})_{|ik} - \Delta(u_{|i}^2).$$

Es folgt daher

$$\begin{aligned}\int_B ((\Delta u)^2 - u_{|ik}^2) r^{\alpha+2} dx &= \int_B ((u_{|i} u_{|k})_{|ik} - (u_{|i}^2)_{|kk}) r^{\alpha+2} dx \\ &= \int_B (u_{|i} u_{|k}) (r^{\alpha+2})_{|ik} - u_{|i}^2 (r^{\alpha+2})_{|kk}) dx + \\ &\quad + \int_\Gamma (u_{|i} u_{|k})_{|i} \nu_k r^{\alpha+2} do - \int_\Gamma (u_{|i}^2)_{|\nu} r^{\alpha+2} do - \\ &\quad - \int_\Gamma u_{|i} u_{|k} (r^{\alpha+2})_{|k} \nu_i do + \int_\Gamma u_{|i}^2 (r^{\alpha+2})_{|\nu} do.\end{aligned}$$

Wegen

$$(r^{\alpha+2})_{|ik} = (\alpha+2) r^\alpha \delta_{ik} + \alpha(\alpha+2) r^{\alpha-2} x_i x_k$$

ergibt sich danach:

$$\begin{aligned}\int_B ((\Delta u)^2 - (u_{|ik}^2)) r^{\alpha+2} dx &= -(\alpha+2)(\alpha+n-1) \int_B u_{|i}^2 r^\alpha dx + \\ &\quad + \alpha(\alpha+2) \int_B u_{|r}^2 r^\alpha dx + \int_\Gamma u_{|ii} u_{|\nu} r^{\alpha+2} do - \int_\Gamma u_{|i} u_{|i\nu} r^{\alpha+2} do - \\ &\quad - (\alpha+2) \int_\Gamma u_{|r} u_{|\nu} r^{\alpha+1} do + (\alpha+2) \int_\Gamma u_{|i}^2 r^{\alpha+1} r_{|\nu} do.\end{aligned}$$

Da in der so für dreimal stetig differenzierbaren, hergeleiteten Formel $u(x)$ keine dritten Ableitungen mehr auftreten, ist es leicht, dieselbe durch Grenzübergang auch für zweimal stetig differenzierbare Funktionen als gültig nachzuweisen.

Wir werden die beiden Formeln (2.1′) und (2.2′) nur für Kugelbereiche $|x| \leq r_0$ und nur für nebst Normalableitung auf $|x| = r_0$ verschwindende Funktionen $u(x)$ benötigen, jedoch brauchen wir sie auch für solche u, die

stetig differenzierbar auf B sind und deren 2. Ableitungen noch stückweise stetig sind, d. h. stetig sind bis auf endlich viele Sprungstellen längs gewisser zweimal stetig differenzierbarer Hyperflächen[3]) Γ_1 in B. Für solche Funktionen ergeben sich (2.1′) und (2.2′) auf folgendem Wege: Alle oben gemachten Schlüsse können zunächst wiederholt werden, jedoch treten neben den bisherigen Randintegralen über Γ noch die entsprechenden Integrale über jede der Flächen von Γ_1 genommen auf, und zwar jeweils mit entgegengesetztem Vorzeichen an beiden Seiten der Fläche genommen. Zu zeigen ist, daß diese zusätzlichen Randintegrale stets verschwinden. Zunächst haben wegen der Stetigkeit bis zu den ersten Ableitungen hinauf alle solchen Randintegraldifferenzen bei der Formel (2.1′) den Wert Null (es treten ja keine zweiten Ableitungen in den Randintegralen auf), bei der Formel (2.2′) dagegen erhält man Ausdrücke der Form

$$\int_{\Gamma_1} ((u_{|ii})_+ - (u_{|ii})_-)\, u_{|\nu}\, r^{\alpha+2}\, do - \int_{\Gamma_1} u_{|i}\, ((u_{|i\nu})_+ - (u_{|i\nu})_-)\, r^{\alpha+2}\, do .$$

Das Verschwinden dieser Terme ist z. B. folgendermaßen einzusehen: Man denke sich in irgendeinem Punkt x_0 von Γ_1, der nicht auf zwei Flächen von $\Gamma + \Gamma_1$ gleichzeitig liegt, die Tangentialebene an Γ_1 gelegt und (o.B.d.A.) durch eine lineare orthogonale Transformation der unabhängigen Variablen x diese zur Ebene $x_1 = 0$ und den Punkt x_0 zum Nullpunkt gemacht. Es geht alsdann $\partial/\partial\nu$ in $\pm\, \partial/\partial x_1$ über. Nach Voraussetzung ist $u_{|i}$ stetig auch in einer ganzen Umgebung von $x = 0$. $x' = (x_1', 0, \ldots, 0, x_k', 0, \ldots, 0)$, $k \neq 1$, mit $x_k' > 0$ sei ein weiterer Punkt auf Γ_1, der nahe genug an Null gelegen ist. Es kann x' von Null aus auf zwei verschiedenen Wegen erreicht werden (wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$), von denen je einer in jeder der Stetigkeitsteilumgebungen von Null für die zweite Ableitung gelegen ist, also Γ_1 außer in Null und in x' nirgends trifft. Sei $c' = \sup\limits_{\substack{|x_k| \le |x_k'| \\ (x_1, 0 \ldots 0, x_k, 0, \ldots 0) \in \Gamma_1}} \left| \frac{x_1}{x_k^2} \right|$ (c' ist sicherlich endlich) und sei $c = 2\,c'$.

Definiere:

$\mathfrak{C}_1$: 1) $x_2 = \cdots = x_n = 0,\ 0 \le x_1 \le c\, x_k'^2$; 2) $x_1 = c\, x_k'^2,\ 0 \le x_k \le x_k',\ x_j = 0,\ j \neq 1, k$;
3) $x_k = x_k',\ x_j = 0,\ j \neq 1, k,\ x_1' \le x_1 \le c\, x_k'^2$.

$\mathfrak{C}_2$: 1) $x_2 = \cdots = x_n = 0, -c\, x_k'^2 \le x_1 \le 0$; 2) $x_1 = -c\, x_k'^2,\ 0 \le x_k \le x_k'$,
$x_j = 0,\ j \neq 1, k$;
3) $x_k = x_k',\ x_j = 0,\ j \neq 1, k,\ -c\, x_k'^2 \le x_1 \le x_1'$.

Jede der Kurven sei von 0 nach x' orientiert. Dann folgt, da $u_{|i}$ auch auf Γ_1 stetig ist,

$$u_{|i}(x') - u_{|i}(0) = \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{\partial u_{|i}}{\partial s}\, ds = \int_{\mathfrak{C}_2} \frac{\partial u_{|i}}{\partial s}\, ds .$$

---

[3]) Selbstverständlich können auch Sprungstellen längs 2 mal stetig differenzierbarer Mannigfaltigkeiten der Dimension $< n - 1$ zugelassen werden. Da diese jedoch bei den durchgeführten partiellen Integrationen keine Randintegrale ergeben, sind für uns nur die Hyperflächen (Flächen der Dimension $n - 1$) wesentlich, und wir werden uns daher auf die Betrachtung dieser beschränken.

Dividiere diese Relation durch x_k' und berücksichtige, daß die Länge der jeweils ersten und letzten Geradenstücke, aus denen $\mathfrak{C}_j$ besteht, $= O(x_k'^2)$ ist, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{x_k'}\int_0^{x_k'} (u_{|ik}(c\, x_k'^2, 0, \ldots, 0, t_k, 0, \ldots 0) - u_{|ik}(-c\, x_k'^2, 0, \ldots, 0, t_k, 0, \ldots, 0))\, dt_k = O(x_k').$$

Bei Grenzübergang $x_k' \to 0$ folgt daraus sofort $u_{|ik+}(0) = u_{|ik-}(0)$. Da dies für alle $i = 1, \ldots, n$, $k = 2, \ldots, n$ richtig ist, kann bei $x = 0$ höchstens die doppelte Normalableitung $u_{|11} = u_{|\nu\nu}$ möglicherweise unstetig werden. Berücksichtigt man dies, so vereinfacht sich die oben angegebene Randintegraldifferenz über Γ_1 zu

$$\int_{\Gamma_1} ((u_{|\nu\nu+}) - (u_{|\nu\nu-}))\, u_{|\nu}\, r^{\alpha+2}\, d\,o - \int_{\Gamma_1} u_{|\nu}\, ((u_{|\nu\nu})_+ - (u_{|\nu\nu})_-)\, r^{\alpha+2}\, d\,o = 0$$

w.z.b.w.

Wir bezeichnen den Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen u mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen mit C_2^* und fixieren dieses Resultat in folgendem

Hilfssatz: *$u(x)$ sei in $|x| \leq r_0$ erklärt und aus C_2^*, und es sei $u(x) = 0$ für $r = r_0$. Dann gelten die beiden Formeln:*

$$\int_{r\leq r_0} u_{|i}^2\, r^\alpha\, dx + \int_{r\leq r_0} u\, \Delta u\, r^\alpha\, dx - \frac{\alpha(\alpha+n-2)}{2}\int_{r\leq r_0} u^2\, r^{\alpha-2}\, dx = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\int_{r\leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\, dx - \int_{r\leq r_0} u_{|ik}^2\, r^{\alpha+2}\, dx - \\ - \alpha(\alpha+2)\int_{r\leq r_0} u_{|r}^2\, r^\alpha\, dx + (\alpha+2)(\alpha+n-1)\int_{r\leq r_0} u_{|i}^2\, r^\alpha\, dx = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Beweis ist nach obigem evident.

Wir machen ferner einen für die Anwendung später wichtigen *Zusatz: Im Falle $\alpha = -n$ erhalten wir:*

$$\begin{aligned}\int_{r\leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n}\, dx - \int_{r\leq r_0} u_{|ik}^2\, r^{2-n}\, dx - \\ -(n-2)\int_{r\leq r_0} (n\, u_{|r}^2 - u_{|i}^2)\, r^{-n}\, dx \\ = \frac{(n-1)(n-2)}{n}\, \omega_n u_{|i}^2(0)\,.\end{aligned} \tag{2.2a}$$

Das Integral der zweiten Zeile ist dabei als Cauchyscher Hauptwert aufzufassen, d. h. $\int\limits_{r\leq r_0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon\leq r\leq r_0}$. Beweis evident.

Jetzt sei $k(r)$ eine in $0 < r \leq r_0$ stetig differenzierbare, in $0 < r < r_0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die gilt $k(r_0) = k'(r_0) = 0$. Wir wiederholen die beiden Herleitungsprozesse dieses Paragraphen, indem wir überall r^α bzw. $r^{\alpha+2}$ durch $k(r)$ mit $k(r) \sim r^{\gamma'}$, $\gamma' > 2 - n$, ersetzen. Insofern ergibt sich dabei eine Vereinfachung, als wir nicht auf die Randintegale $\int\limits_{r=r_0}$

zu achten brauchen, da diese verschwinden müssen. Es folgt in analoger Weise:

$$(2.3')\qquad \int_{r\le r_0} u_{|i}^2\, k(r)\,dx + \int_{r\le r_0} u\,\Delta u\, k(r)\,dx - 1/2 \int_{r\le r_0} u^2\,\Delta(k(r))\,dx = 0$$

und

$$\int_{r\le r_0} (\Delta u)^2 k(r)\,dx - \int_{r\le r_0} u_{|ik}^2\, k(r)\,dx = \int_{r\le r_0} \left(u_{|i}\, u_{|k} (k(r))_{|ik} - u_{|i}^2\, \Delta(k(r))\right) dx$$

jeweils für zweimal stetig differenzierbares $u(x)$, das aber nicht am Rande verschwinden zu braucht. Genau wie früher kann die Richtigkeit dieser Formeln auch für Funktionen $u(x) \in C_2^*$ gezeigt werden. Aus diesen beiden Identitäten entnehmen wir die folgenden Abschätzungen:

a) In (2.3') setze $k(r) = (r_0 - r)^{1+\gamma}\, r^{\gamma'}$, $\gamma > 0$, $\gamma' > 2 - n$.
Dann ist

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} \int_{r\le r_0} u_{|i}^2 (r_0 - r)^{1+\gamma}\, r^{\gamma'}\,dx &\le \varepsilon' \int_{r\le r_0} (\Delta u)^2 (r_0 - r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx + \\ &+ c(\varepsilon', \gamma, \gamma', r_0) \int_{r\le r_0} u^2 (r_0 - r)^{\gamma-1}\, r^{\gamma'-2}\,dx \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c(\varepsilon', \gamma, \gamma', r_0)$, die nur von den eingeklammerten Werten abhängt.

b) In (2.4') trage entsprechend ein: $k(r) = (r_0 - r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}$, $\gamma > 0$, $\gamma' > 2 - n$.
Es folgt

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &\left| \int_{r\le r_0} \left((u_{|ik}^2) - (\Delta u)^2\right) (r_0 - r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx \right| \le \\ &\le c(\gamma, \gamma', r_0) \int_{r\le r_0} u_{|i}^2 (r_0 - r)^{1+\gamma}\, r^{\gamma'}\,dx\,. \end{aligned}$$

§ 3. Abschätzung von $\int u^2 r^{\alpha-2}\,dx$ durch $\int (\Delta u)^2 r^{\alpha+2}\,dx$

Es soll folgende Ungleichung bewiesen werden:

$$(3.1)\qquad \int_{r\le r_0} \left(\left(\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}\right) u\right)^2 r^{\alpha-2}\,dx \le \int_{r\le r_0} (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\,dx\,.$$

Voraussetzungen dazu (a): $u(x)$ sei in $|x| \le r_0$ erklärt und $\in C_2^*$, es gelte $u = u_{|r} = 0$ für $|x| = r_0$. Beide Integrale und $\int (u r^{\frac{1}{2}(\alpha+n-2)})_{|r}^2\, r^{2-n}\,dx$ mögen existieren.

$-\nabla_\varphi$ sei der Beltramische Operator auf der n-Kugel, so daß also gilt:

$$\Delta = r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r}\, r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi = \nabla_r - \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi\,.$$

Der Beweis von (3.1) verläuft über folgende Identität:

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} \int_B (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\,dx &= \int_B (r\, z_{|r})_{|r}^2\, r^{2-n}\,dx + 2 \int_B |\Delta z_{|r}|^2\, r^{2-n}\,dx + \\ &+ \frac{\alpha^2 + (n-2)^2}{2} \int_B z_{|r}^2\, r^{2-n}\,dx + \int_B \left(\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}\right] z\right)^2 r^{-n}\,dx + \\ &+ 2 \int_\Gamma (z_{|\nu}\, z_{|rr} - z_{|i}\, z_{|ir}\, r_{|\nu})\, r^{4-n}\,do + R, \end{aligned}$$

und dabei seien R weitere Randintegrale über Γ, in denen nur $\leqq$ erste Ableitungen von z auftreten; ferner ist dabei $z = u\, r^{\frac{\alpha+n-2}{2}}$ gesetzt und der Differentialoperator Λ definiert durch

$$\int\limits_{r=r_0} |\Lambda u|^2\, do = \int\limits_{r=r_0} u\, \nabla_\varphi u\, do = \int\limits_{r=r_0} (u_{|i}^2 - u_{|r}^2)\, r^2\, do.^{4)}$$

u sei in B zweimal stetig differenzierbar und über B und Γ seien dieselben Voraussetzungen wie am Anfang von § 2 gefordert. Setzen wir die Richtigkeit dieser Formel voraus, dann ist daraus wie in § 2 wiederum die Gültigkeit der Identität (3.2) auch für $u \in C_2^*$, das obigen Voraussetzungen genügt, zu erschließen: Denn in den angeführten Randintegralen heben sich wiederum die Terme mit $z_{|rr}$ heraus. z besitzt für $x \neq 0$ dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie u, also fallen alle Randintegrale über die Unstetigkeitsflächen Γ_1 fort. Somit gilt für $u \in C_2^*$ mit den Voraussetzungen (a) die Identität:

$$\begin{aligned} \int\limits_{r\leqq r_0} (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\, dx &= \int\limits_{r\leqq r_0} (r\, z_{|r})_{|r}^2\, r^{2-n}\, dx \\ \text{(3.2')} \qquad &+ 2 \int\limits_{r\leqq r_0} |\Lambda z_{|r}|^2\, r^{2-n}\, dx + \frac{\alpha^2 + (n-2)^2}{2} \int\limits_{r\leqq r_0} z_{|r}^2\, r^{2-n}\, dx \\ &+ \int\limits_{r\leqq r_0} \left(\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}\right] u\right)^2 r^{\alpha-2}\, dx. \end{aligned}$$

Aus dieser ergibt sich unmittelbar (3.1)[5]). Wir benutzen (3.1), um daraus die folgenden beiden wichtigen Abschätzungen herzuleiten: Unter den Voraussetzungen (a) gilt:

$$\text{(3.3)} \qquad \left[\underset{l=0,1,2,\ldots}{\mathrm{Min}} \left(\left(l + \frac{n-2}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2\right] \int\limits_{r\leqq r_0} u^2 r^{\alpha-2}\, dx \leqq \int\limits_{r\leqq r_0} (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\, dx,$$

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{aligned} &\left[\underset{l=0,1,2,\ldots}{\mathrm{Min}} \left|\left(l + \frac{n-2}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right|\right] \int\limits_{r\leqq r_0} \left(|\Lambda u|^2 + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4} u^2\right) r^{\alpha-2}\, dx \\ &\qquad \leqq \int\limits_{r\leqq r_0} (\Delta u)^2\, r^{\alpha+2}\, dx. \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen ergeben sich unmittelbar aus der Tatsache, daß der auf der Kugel $|x| = 1$ erklärte Operator ∇_φ im Raum $\mathfrak{D}_0$ aller $u \in C_2^*$ ein diskretes Spektrum besitzt und daß seine Punkteigenwerte genau mit den Zahlen $l(l + n - 2)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ übereinstimmen, zu denen alle Kugelfunktionen der Ordnung l und der Dimension n als Eigenfunktionen gehören, mit andern Worten aus der Vollständigkeit des orthonormierten Systems der Kugelfunktionen. Es genügt daher, um die Betrachtungen dieses Paragraphen zu

---

[4]) Man denke sich durch irgendeine zusätzliche Vorschrift diese Definition von Λ in passender Weise eindeutig gemacht. $(\Lambda u, \Lambda v)$, welches wir allein benötigen, ist auch durch obige Angaben eindeutig bestimmt.

[5]) Insbesondere ist aus dieser Art der Herleitung zu erkennen: Die Ungleichung (3.1) ist scharf. Es gilt immer das $<$-Zeichen außer im Falle $u \equiv 0$. Man, erkennt daß auch die nachfolgenden Abschätzungen (3.3) und (3.4) nicht verbessert werden können.

vollenden, die Richtigkeit von Identität (3.2) für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u(x)$, die bei Null der Beziehung $u = o\left(r^{-\frac{\alpha+n-2}{2}}\right)$ genügen, nachzuweisen.

Beweis von Identität (3.2):

Wir substituieren $u = z\, r^{-\frac{\alpha+n-2}{2}} = z\, r^p$. Es wird:

$$\Delta u = r^{-\frac{\alpha+n-2}{2}} \Delta z - (\alpha + n - 2)\, z_{|r}\, r^{p-1} + \frac{\alpha^2 - (n-2)^2}{4} z\, r^{p-2},$$

$$r^{\frac{\alpha}{2}+1} \Delta u = r^{1-n/2} (r\, z_{|r})_{|r} - \alpha\, r^{1-n/2} z_{|r} - r^{-n/2}\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4}\right] z,$$

$$r^{\alpha+2} (\Delta u)^2$$

$$= r^{2-n} (r\, z_{|r})_{|r}^2 + \alpha^2 r^{2-n} z_{|r}^2 + r^{-n}\left(\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4}\right] z\right)^2 - \alpha\, r^{1-n} ((r z_r)^2)_{|r} +$$

$$+ 2\alpha\, r^{1-n} z_{|r}\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4}\right] z - 2\, r^{1-n} (r\, z_{|r})_{|r}\left[\nabla_\varphi + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4}\right] z.$$

Jetzt werde $\int\limits_B (\Delta u)^2 r^{\alpha+2}\, dx$ gebildet und durch partielle Integration der letzten drei Terme dafür gesorgt, daß in allen Integralen über B nur Quadrate von z und dessen Ableitungen auftreten. Zunächst mögen die Randintegrale betrachtet werden. Offenbar treten Randintegrale mit zweiten Ableitungen nur auf bei der Umformung des Termes

$$I_4 = -2 \int\limits_B (r\, z_{|r})_{|r}\, \nabla_\varphi\, z\, r^{1-n} dx.$$

Um diese zu bestimmen, betrachten wir

$$I_5 = 2 \int\limits_B (r\, z_{|r})_{|r}\, \Delta z\, r^{3-n} dx.$$

Für dreimal stetig differenzierbares z folgt:

$$I_5 = -2 \int\limits_B (r^{3-n} (r\, z_{|r})_{|r})_{|i}\, z_{|i}\, dx + 2 \int\limits_\Gamma (r\, z_{|r})_{|r}\, z_{|\nu}\, r^{3-n}\, do.$$

Ferner liefert bei der weiteren Umformung des ersten Termes noch die partielle Integration von $-2 \int\limits_B r^{3-n} (r\, z_{|r})_{|i\,r} z_{|i}\, dx$ nach r das Randintegral $-2 \int\limits_\Gamma r^{3-n} (r\, z_{|r})_{|i}\, z_{|i}\, r_{|\nu}\, do$. Infolgedessen treten bei Umformung von I_5 als Randintegrale mit zweiten Ableitungen nur auf

$$P = -2 \int\limits_\Gamma (z_{|i\,r}\, z_{|i}\, r_{|\nu} - z_{|r\,r}\, z_{|\nu})\, r^{4-n}\, do.$$

Aber es ist

$$I_4 = I_5 - 2 \int\limits_B (r\, z_{|r})_{|r} \left(z_{|rr} + \frac{n-1}{r} z_{|r}\right) r^{3-n}\, dx,$$

und bei der Umformung des zweiten Termes treten gar keine Randglieder mit zweiten Ableitungen auf. Also sind die Randglieder die einzigen in der endgültigen Formel vorkommenden Randglieder, die zweite Ableitungen enthalten. Nachdem dies einmal erkannt ist, bestimmen wir die Integrale über

den Bereich B so:

$$I_1 = -\alpha \int_B r^{1-n} (r z_{|r})^2_{|r} \, dx = \text{Randintegral}.$$

$$I_2 = 2\alpha \int_B z_{|r} \left(\nabla_\varphi z + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4} z \right) r^{1-n} \, dx$$

$$= \alpha \int_B \left((|\Lambda z|^2)_{|r} + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4} (z^2)_{|r} \right) r^{1-n} \, dx + \text{Randintegral} = \text{Randintegral}.$$

$$I_3 = -2 \int_B (r z_{|r})_{|r} \nabla_\varphi z \, r^{1-n} \, dx - \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{2} \int_B (r z_{|r})_{|r} z \, r^{1-n} \, dx$$

$$= \text{Randintegral} - 2 \int_B z_{|rr} \nabla_\varphi z \, r^{2-n} \, dx - \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{2} \int_B z_{|rr} z \, r^{2-n} \, dx$$

$$= \text{Randintegral} - 2 \int_B ((\Lambda z)_{|rr}, \Lambda z) \, r^{2-n} \, dx - \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{2} \int_B z_{|rr} z \, r^{2-n} \, dx$$

$$= \text{Randintegral} - \int_B \left(|\Lambda z|^2 + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{2} z^2 \right)_{|rr} r^{2-n} \, dx +$$

$$+ 2 \int_B \left(|\Lambda z_{|r}|^2 + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4} z^2_{|r} \right) r^{2-n} \, dx$$

$$= \text{Randintegral} + 2 \int_B \left(|\Lambda z_{|r}|^2 + \frac{(n-2)^2 - \alpha^2}{4} z^2_{|r} \right) r^{2-n} \, dx.$$

Man bemerke dabei insbesondere, daß die Existenz der Integrale ausreicht, um das Verschwinden aller Randintegrale für den eventuellen Randpunkt $x = 0$ zu gewährleisten. Alle auftretenden Randintegrale laufen daher nur über Γ. Durch Zusammenfassen aller dieser Formeln ergibt sich die gefragte Identität (3.2); man hat nur zu bemerken, daß alle Randglieder verschwinden, sobald $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ für $x \in \Gamma$ gefordert wird.

§ 4. Randwertaufgaben für quasilineare, elliptische Differentialgleichungen und Fixpunktsatz; Problemstellung

Sei vorgelegt die quasilineare, elliptische Differentialgleichung:

$$\text{I} \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u, u_{|j}) \, u_{|ik} = 0.$$

Voraussetzungen: Es sei a_{ik} für $x \in D$, $-\infty < u$, $u_{|j} < +\infty$ erklärt und λ-hölderstetig und für $x \in D$, $|u|$, $|u_{|j}| \leq k$, gelte jeweils eine gleichmäßige Hölderkonstante zum Exponenten $\lambda > 0$ in allen $2n + 1$ Variablen x_i, u, $u_{|j}$; $i, j = 1, \ldots, n$. D sei ein beschränkter Bereich des $(x_1, \ldots, x_n)$-Raumes, der von endlich vielen zweimal σ-hölderstetig differenzierbaren, geschlossenen, doppelpunktfreien Hyperflächen Γ berandet wird, welche sich weder durchdringen noch berühren. Es gelte $\sigma > \lambda$.

Wir fragen nach Lösungen von (I), die auf Γ vorgegebene Randwerte φ annehmen. Von den beiden in der Einleitung für $n = 2$ erwähnten Methoden [5, 7] benutzen wir die folgende, auf Nirenberg zurückgehende:

Sei $C_{m+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, der Banachraum aller für $x \in D$ m-mal γ-hölderstetig differenzierbaren $u(x)$ mit[6])

$$\|u\|_{m+\gamma} = \operatorname*{Max}_{\substack{i_j=1,\dots,n\\ x\in D}} [|u|, |u_{|i_1}|, |u_{|i_1 i_2}|, \dots, |u_{|i_1,\dots,i_m}|] + \operatorname*{Max}_{\substack{i_j=1,\dots,n\\ x\in D}} H_\gamma(u_{|i_1\cdots i_m})$$

und ferner $C'_{m+\gamma}$ der entsprechende Banachraum für Funktionen φ, die auf Γ erklärt sind, mit einem Betrag $\|\varphi\|'_{m+\gamma}$, der analog wie oben gebildet sei[7]) (nachdem zuvor Γ in passender Weise durch endlich viele offene Mengen U_i überdeckt wurde und alsdann jedes U_i auf ein Koordinatensystem bezogen wurde, werde $\|\varphi\|^{U_i}_{m+\gamma}$ wie oben und alsdann $\|\varphi\|_{m+\gamma} = \operatorname*{Max}_i \|\varphi\|^{U_i}_{m+\gamma}$ erklärt). Für $\gamma = 0$ möge erklärt sein $\|u\|_m = \operatorname{Max} [|u|, |u_{|i_1}|, \dots, |u_{|i_1\dots i_m}|]$ und entsprechend $\|\varphi\|'_m$; C_m bzw. C'_m seien die Räume aller stetigen Funktionen auf D bzw. Γ mit obigen Normen. Ersichtlich läßt sich übrigens $\|u\|_m$ wie auch $\|\varphi\|'_m$ auch für den in § 2 definierten Funktionenraum C_2^* definieren.

Zu irgendeinem fest vorgegebenen $\varphi \in C'_{2+\sigma}$ werde erklärt die Transformation $Z(z)$ von $C_{1+\gamma}$ in sich: $Z(z)$ sei die (eindeutig bestimmte) Lösung von

$$a_{ik}(x, z, z_{,j})\, Z_{|ik} = 0, \qquad x \varepsilon D,\ Z = \varphi,\ x \varepsilon \Gamma.$$

Wenn die Differentialgleichung (I) für jede Wahl von $z(x)$ elliptisch vorausgesetzt wird, so ergibt sich gemäß den Sätzen von J. Schauder [9] die Existenz von Z und die Apriori-abschätzung

$$\|Z\|_{2+\tau} \leq c\,(\|z\|_{1+\gamma})\, \|\varphi\|_{2+\tau} \quad \text{für jedes feste } 0 < \tau < \lambda\gamma. \tag{4.1}$$

Die Abhängigkeit der Abschätzungskonstante $c\,(\|z\|_{1+\gamma})$ von $\|z\|_{1+\gamma}$ kommt dadurch zustande, daß in der Schauderschen Abschätzung die Hölderkonstante der a_{ik} wesentlich eingeht. Zur Gewinnung einer Lösung des Randwertproblems zu (I) versuchen wir auf den Operator $Z(z)$ den Schauderschen Fixpunktsatz anzuwenden:

Wenn eine stetige Transformation $Z(z)$ eine Kugel $\|z\|_{1+\gamma} \leq c$ in eine kompakte Untermannigfaltigkeit ihrer selbst transformiert, so besitzt sie einen Fixpunkt z_0 mit $Z(z_0) = z_0$.

Ein Fixpunkt unserer Transformation wäre aber eine Lösung von

$$a_{ik}(x, z_0, z_{0|j})\, z_{0|ik} = 0, \qquad x \varepsilon D,\ z_0 = \varphi,\ x \varepsilon \Gamma,$$

also eine Lösung unserer quasilinearen Randwertaufgabe.

Sei also jetzt $\|z\|_{1+\gamma} \leq c_1$ vorausgesetzt. Zunächst ist die Kompaktheit der Menge aller $Z(z)$ mit $\|z\|_{1+\gamma} \leq c_1$ im Raum $C_{1+\gamma}$ evident, denn für $\|z\|_{1+\gamma} \leq c_1$ gilt

$$\|z\|_{2+\tau} \leq C(c_1)\, \|\varphi\|_{2+\tau} = K,$$

und bekanntlich ist jede Kugel $\|z\|_\mu \leq K$ in jedem Raum $C_{\mu'}$ mit $\mu' < \mu$ kompakt. Auch die Stetigkeit der Transformation $Z(z)$ ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen von Schauder [9]. Es ist somit nur noch ein c_1 und ein γ so zu bestimmen, daß die Kugel $\|z\|_{1+\gamma} \leq c_1$ durch $Z(z)$ in sich transformiert

---

6) H_γ sei die im üblichen Sinne definierte Hölderkonstante.

7) Dazu ist notwendig, daß Γ eine m-mal γ-hölderstetig differenzierbare Fläche sei; in unserem Falle existiert $\|\varphi\|_{m+\gamma}$ also für $m + \gamma \leq 2 + \sigma$.

wird. Aus Abschätzung (4.1) ergibt sich nun unmittelbar eine Abschätzung der Form

$$\|z\|_{1+\gamma} \leqq c_2(\|z\|_{1+\gamma}) \, \|\varphi\|_{2+\tau},$$

also

$$\|z\|_{1+\gamma} \leqq c_2(c_1) \, \|\varphi\|_{2+\tau} \qquad \text{für } \|z\|_{1+\gamma} \leqq c_1. \tag{4.2}$$

Für $c_2(c_1) \, \|\varphi\|_{2+\tau} \leqq c_1$ ist also die letzte Voraussetzung des Fixpunktsatzes auch erfüllt. Hier ergibt sich nun eine Bedingung für φ:

$$\|\varphi\|_{2+\tau} \leqq c_1 \cdot [c_2(c_1)]^{-1}. \tag{4.3}$$

Bei Verwendung der Schauderschen Abschätzung (4.1) zur Gewinnung von (4.2) zeigt sich nun, daß $c_2(c_1)$ in einer solchen Weise von c_1 abhängt, daß nur für sehr kleine $\|\varphi\|_{2+\tau}$ die Bedingung (4.3) erfüllt werden kann. LERAY und SCHAUDER überbrücken diese Schwierigkeit für $n = 2$ dadurch, daß sie die betrachteten Randwerte in einer stetigen Weise auf Null so zusammenziehen, daß sich der Abbildungsgrad der Transformation $Z(z)$ dabei nicht ändert, wobei sie zwar die oben erwähnten Voraussetzungen auch, nicht aber den Schauderschen Fixpunktsatz heranziehen. NIRENBERG dagegen geht ebenfalls für $n = 2$ das Problem der Auflösung von (I) mit beliebigen auch großen Randwerten direkt dadurch an, daß er sich bemüht, eine Verbesserung der Abschätzung (4.2) zu finden. Es zeigt sich dabei, daß in der Tat für $n = 2$ eine Apriori-Abschätzung gefunden werden kann, deren Konstante c_2 unabhängig ist vom Stetigkeitsverhalten der $a_{ik}(x, u, u_{|j})$, also auch unabhängig von $\|u\|_{1+\gamma}$ bzw. von c_1 ist. In diesem Fall kann durch genügend große Vorgabe von c_1 die Bedingung (4.3) für jedes $\varphi \in C_{1+\gamma}$ erfüllt werden.

Unsere Absicht ist es, unter Benutzung der in § 1 bis 3 bereitgestellten Hilfsmittel eine entsprechende, von den Stetigkeitseigenschaften der $a_{ik}(x,u,u_{|j})$ unabhängige Abschätzung auch für > 2 Dimensionen zu bewerkstelligen. Allerdings muß dazu die Forderung der Elliptizität von (I) für jedes u und $u_{|j}$ eine Verschärfung erfahren, die mit wachsendem n immer einschneidender wird.

Wir definieren:

Definition 1: *Eine symmetrische $n \times n$-Matrix $((a_{ik}))$ genügt einer K_ε-Bedingung, wenn folgendes gilt:*
Seien λ_i, $i = 1, \ldots, n$, die Eigenwerte der Matrix $((a_{ik}))$, dann gelte

$$(n-1) \sum_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 \leqq (1-\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2.$$

Definition 2: *Eine symmetrische $n \times n$-Matrix $((a_{ik}))$ genügt einer K'_ε-Bedingung, wenn folgendes gilt:*
Seien λ_i, $i = 1, \ldots, n$, die Eigenwerte der Matrix $((a_{ik}))$, dann gelte

$$(n-1)\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right) \sum_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 \leqq (1-\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2.$$

Deutet man die Matrix $((a_{ik}))$ als den Punkt $\lambda_A = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ im $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-Raum, so bedeutet die K_ε-Bedingung offenbar, daß λ_A innerhalb oder auf dem Rand eines gewissen „Kreiskegels" liegt, dessen Achse mit der Geraden $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ übereinstimmt und der für den (nicht erlaubten) Wert $\varepsilon = 0$ gerade die Wände des Winkelraumes $\lambda_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$ berührt, in welchem er ganz enthalten ist. Eine K_ε-Bedingung fordert also, daß λ_A in einem solchen Kegel liegt, während die Elliptizitätsforderung nur besagt, λ_A möge im Winkelraum $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, bzw. im Winkelraum $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$, liegen. Die Bedingung K'_ε ist die Ungleichung des Inneren eines gewissen, etwas engeren Kegels, dessen Radius um einen gewissen Faktor kleiner ist als der Radius des ersten Kegels. Der Faktor beträgt im Falle $n = 3$ etwa 0,85 und strebt für wachsendes n monoton gegen $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$. Es ist möglich, die Bedingungen K_ε und K'_ε auch direkt durch die Koeffizienten der Matrix $((a_{ik}))$ auszudrücken; man hat nämlich

$$\sum_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 = (n-1)\,(a_{ii})^2 - n\,(a_{ii}\,a_{kk} - a_{ik}^2)\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 = (a_{ii})^2\,.$$

Es ist ferner möglich, auch schärfere Bedingungen anzugeben, die die bei Nirenberg übliche Form besitzen:

$$m\,\xi_i^2 \leqq a_{ik}\,\xi_i \xi_k \leqq M\,\xi_i^2$$

und aus denen eine K_ε- bzw. eine K'_ε-Bedingung folgt, man hat dazu nur einen Quader $m \leqq \lambda_i \leqq M$ abzugrenzen, der noch ganz innerhalb eines solchen Kegels liegt. Allerdings ist es nicht mehr möglich, m beliebig klein positiv und M beliebig groß zu wählen.

Mit Hilfe einer Kegelbedingung formulieren wir nun unseren Existenzsatz wie folgt:

Satz 1: *Es existiert für $n > 2$ zu jedem $\varphi \in C'_{2+\sigma}$ eine Lösung $z(x)$ der quasilinearen Differentialgleichung* (I), *die auf dem Rand Γ die Werte φ annimmt, sofern neben den zuerst gemachten Voraussetzungen folgendes gilt:*

Es gibt für D positive Zahlen m, M, p, P, δ, ε, mit denen gilt: Zu $x_0 \in D$ gibt es eine nichtsinguläre $n \times n$-Matrix $T_{x_0} = ((t_{ik}^{x_0}))$ mit konstanten Koeffizienten, so daß:

1. $p\,|\xi| \leqq |T_{x_0}\xi| \leqq P\,|\xi|$ *ist für jedes* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$
$\left(\textit{ausgeschrieben: } p\left[\sum_i \xi_i^2\right]^{1/2} \leqq \left[\sum_i (t_{ik}^{x_0}\,\xi_k)^2\right]^{1/2} \leqq P\left[\sum_i \xi^2\right]^{1/2}\right)$.

2. *Wenn die Matrix* $\big((a_{ik}(x, u, u_{|j}))\big)$ *mit* $A(x, u, u_{|j})$ *bezeichnet sei, so genügt*

$$A^{T_{x_0}}(x, u, u_{|i}) = T'_{x_0}\,A(x, u, u_{|i})\;T_{x_0}$$

für alle $x \in D$ *mit* $|x - x_0| \leqq \delta$ *und für* $-\infty < u, u_{|i} < +\infty$ *der* K'_ε-*Bedingung mit dem oben vorgegebenen* ε.

3. *Es gelte* $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ *für* $x \in D$, $-\infty < u, u_{|i} < +\infty$.

Für diese Lösung kann eine Apriori-Abschätzung angegeben werden:

$$\|z\|_{2+\tau} \leqq c \, \|\varphi\|_{2+\tau},$$

deren c nur von der Gestalt des zugrunde gelegten Bereiches D und den Konstanten m, M, p, P, δ, ε, λ und σ abhängt.

§ 5. Abschätzung von $\int (\Delta u)^2 r^{\alpha+2} \, d\, x$ durch $\int (a_{ik} u_{|ik})^2 r^{\alpha+2} \, d\, x$; Abschätzung von $\int u_{|i}^2 r^\alpha \, d\, x$ und $\int u^2 r^{\alpha-2} \, d\, x$ durch $\int (a_{ik} u_{|ik})^2 r^{\alpha+2} \, d\, x$

Sei vorgelegt ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung:

$$L = a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Voraussetzungen: 1. Die Funktionen $a_{ik}(x)$ seien für $|x| \leqq r_0$ erklärt und meßbar.

2. Es gelte $a_{ii}(x) \neq 0$ für $|x| \leqq r_0$.

3. $((a_{ik}(x)))$ genüge in $|x| \leqq r_0$ einer gleichmäßigen K'_ε-Bedingung mit einem ε unabhängig von x.

Dann behaupten wir den

Satz 2: *Unter obigen Voraussetzungen gibt es ein $\alpha_0 > 0$ und eine Konstante c, welche nur von ε und α_0 abhängt, so daß für $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0$ gilt*

$$\int\limits_{r \leqq r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n-2\alpha} \, d\, x \leqq c \int\limits_{r \leqq r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2} r^{2-n-2\alpha} \, d\, x \tag{5.1}$$

für jedes $u \in C_2^*$ mit $u(x) = u_{|r}(x) = 0$ für $|x| = r_0$ und mit $u(0) = u_{|i}(0) = 0$.

Beweis: Wir definieren $s(x) = a_{ii}(x)$ und zerlegen jetzt

$$L(u) = a_{ik} u_{|ik} = 1/n \, s(x) \, \Delta u + (a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik}) \, u_{|ik}.$$

Demnach

$$\frac{L(u)}{(a_{ii})} = \frac{1}{n} \Delta u + 1/s(x) \cdot (a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik}) \, u_{|ik}.$$

Die Dreiecksungleichung liefert:

$$\begin{aligned} n \cdot \left[\int\limits_{r \leqq r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2} r^{2-n-2\alpha} \, d\, x \right]^{1/2} &\geqq \left[\int\limits_{r \leqq r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n-2\alpha} \, d\, x \right]^{1/2} - \\ &- \left[\int\limits_{r \leqq r_0} (b_{ik} u_{|ik})^2 r^{2-n-2\alpha} \, d\, x \right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei definiert werde $b_{ik} = (a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik}) \, (1/n \, s(x))^{-1}$. Wir betrachten weiter $(a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik}) \, u_{|ik}$. Für $i = k$ gilt $a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik} = \sum\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} 1/n \, (a_{ii} - a_{jj})$, für $i \neq k$ dagegen $a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik} = a_{ik}$. Es kann demzufolge umgeformt werden

$$\begin{aligned} [(a_{ik} - 1/n \, s(x) \, \delta_{ik}) \, u_{|ik}]^2 &= \left(\sum_{i<k} \frac{a_{ii} - a_{kk}}{n} (u_{|ii} - u_{|kk}) + 2 \sum_{i<k} a_{ik} u_{|ik} \right)^2 \\ &= \left[\sum_{i<k} (1/n \, (a_{ii} - a_{kk}) \, (u_{|ii} - u_{|kk}) + 2/\sqrt{2n} \, a_{ik} \cdot \sqrt{2n} \, u_{|ik}) \right]^2 \\ &\leqq \frac{1}{n^2} \sum_{i<k} ((a_{ii} - a_{kk})^2 + 2n \, a_{ik}^2) \cdot \sum_{i<k} ((u_{|ii} - u_{|kk})^2 + 2n \, u_{|ik}^2). \end{aligned}$$

Man hat

$$\begin{aligned}\sum_{i<k}((a_{ii}-a_{kk})^2+2\,n\,a_{ik}^2)\\ &=(n-1)\sum_i a_{ii}^2-2\sum_{i<k}a_{ii}\,a_{kk}+2\,n\sum_{i<k}a_{ik}^2\\ &=(n-1)\,(a_{ii})^2-n\,(a_{ii}\,a_{kk}-a_{ik}^2)\\ &=\sum_{i<k}(\lambda_i-\lambda_k)^2\end{aligned}$$

und entsprechend auch

$$\sum_{i<k}((u_{|ii}-u_{|kk})^2+2\,n\,u_{|ik}^2)=(n-1)\,(\Delta u)^2-n\,((\Delta u)^2-u_{|ik}^2)\,.$$

Somit folgt endlich

$$\begin{aligned}\int\limits_{r\le r_0}(b_{ik}\,u_{|ik})^2\,r^{2-n-2\alpha}\,dx \le \int\limits_{r\le r_0}(n-1)\,\frac{\sum_{ik}(\lambda_i-\lambda_k)^2}{\left(\sum_i\lambda_i\right)^2}\times\\ (5.3)\qquad \times\left[(\Delta u)^2-\frac{n}{n-1}\,((\Delta u)^2-u_{|ik}^2)\right]r^{2-n-2\alpha}\,dx\le\\ \le(1-\varepsilon)\left(1+\frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1}\times\\ \times\left[\int\limits_{r\le r_0}(\Delta u)^2\,r^{2-n-2\alpha}\,dx+\frac{n}{n-1}\int\limits_{r\le r_0}(u_{|ik}^2-(\Delta u)^2)\,r^{2-n-2\alpha}\,dx\right],\end{aligned}$$

wobei zuletzt die Gültigkeit der K'_ε-Bedingung herangezogen wurde.

Nun verwenden wir zur weiteren Abschätzung die Identität (2.2) des § 2. Es folgt, wenn darin α durch $-n-2\alpha$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}\int\limits_{r\le r_0}(u_{|ik}^2-(\Delta u)^2)\,r^{2-n-2\alpha}\,dx=(n-2+2\alpha)\,(1+2\alpha)\int\limits_{r\le r_0}|\Delta u|^2\,r^{-2-n-2\alpha}\,dx-\\ (5.4)\qquad -(n-2+2\alpha)\,(n-1)\int\limits_{r\le r_0}u_{|r}^2\,r^{-n-2\alpha}\,dx\le\\ \le(n-2+2\alpha)\int\limits_{r\le r_0}((1+2\alpha)\,|\Delta u|^2-(n-1)\,(1+\alpha)^2\,u^2)\,r^{-2-n-2\alpha}\,dx\,.\end{aligned}$$

Dabei wurde die folgende Ungleichung verwendet:

$$(1+\alpha)^2\int\limits_{r\le r_0}u^2\,r^{-2-n-2\alpha}\,dx\le\int\limits_{r\le r_0}u_{|r}^2\,r^{-n-2\alpha}\,dx\,,$$

welche sich nach Substitution $z=u\,r^{-(1+\alpha)}$, Ausdifferentation und partieller Integration unter Berücksichtigung des Verschwindens der Randintegrale ergibt.

Nun beachte man, daß obiger Term weiter abgeschätzt werden kann:

$$\le(n-2+2\alpha)\int\limits_{r\le r_0}''((1+2\alpha)\,|\Delta u|^2-(n-1)\,(1+\alpha)^2u^2)\,r^{-2-n-2\alpha}\,dx\,.$$

Das Zeichen $''$ soll dabei andeuten, daß nach Entwicklung von u in eine Reihe nach Kugelfunktionen die Komponenten von u hinsichtlich aller Kugelfunktionen nullter und erster Ordnung fortgelassen werden sollen. Denn für

diese Komponenten u_0, u_1 gilt offenbar

$$\int_{r \leq r_0} ((1+2\alpha)\,|\Delta u_j|^2 - (n-1)(1+\alpha)^2 u_j^2)\, r^{-2-n-2\alpha}\, dx \leq 0 .$$

Wir können daher jetzt die Ungleichungen (3.3) und (3.4) so anwenden, als ob u keine Komponente irgendeiner Kugelfunktion nullter oder erster Ordnung enthielte. Das bedeutet, daß darin $\underset{l=0,1,2,\dots}{\mathrm{Min}}$ durch $\underset{l=2,3,\dots}{\mathrm{Min}}$ ersetzt werden kann. Ersetzt man nun in (3.3) und (3.4) α durch $-n-2\alpha$ und fordert $0 \leq \alpha < 1$, so ergibt sich

$$\underset{l=2,3,\dots}{\mathrm{Min}} \left[\left(l+\frac{n-2}{2}\right)^2 - \frac{(n+2\alpha)^2}{4}\right] = \frac{(n+2)^2-(n+2\alpha)^2}{4}$$
$$= n+1+\varepsilon_0(\alpha) \qquad \text{mit } \varepsilon_0(\alpha)\to 0,\ \alpha\to 0 .$$

Also folgt

$$\int_{r \leq r_0}'' \left(|\Delta u|^2 + \frac{(n-2)^2-(n+2\alpha)^2}{4}\, u^2\right) r^{-n-2-2\alpha}\, dx \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{n+1} + \varepsilon_1(\alpha)\right) \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha} dx ,$$

$$\int_{r \leq r_0}'' u^2\, r^{-n-2-2\alpha} dx \leq \left(\frac{1}{n+1} + \varepsilon_1(\alpha)\right)^2 \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha} dx, \quad \varepsilon_1(\alpha)\to 0,\ \alpha\to 0 .$$

Für kleines α hat man $\frac{(n-2)^2-(n+2\alpha)^2}{4} = -(n-1)+\varepsilon_2(\alpha)$ mit $\varepsilon_2(\alpha)\to 0$, $\alpha\to 0$. Demgemäß findet man eine Abschätzung

$$\int_{r \leq r_0} (u_{|ik}^2 - (\Delta u)^2)\, r^{2-n-2\alpha}\, dx \leq \left(\frac{n-2}{n+1} + \varepsilon_3(\alpha)\right) \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx ,$$

und es ergibt sich schließlich

$$\int_{r \leq r_0} (b_{ik}\, u_{|ik})^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx \leq$$
$$\leq (1-\varepsilon)\left(1+\frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1} \left[\int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)} + \varepsilon_4(\alpha)\right) \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx\right] \leq$$
$$\leq (1-\varepsilon)\left(1+\frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1} \left(1+\frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)} + \varepsilon_4(\alpha)\right) \times$$
$$\times \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx \leq$$
$$\leq (1-\varepsilon') \int_{r \leq r_0} (\Delta u)^2\, r^{2-n-2\alpha}\, dx \quad \text{mit } \varepsilon' > 0,$$

sofern nur $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ gilt und α_0 hinreichend klein gewählt wird.

Folglich:

$$(5.5)\quad n\left[\int\limits_{r\leq r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}r^{2-n-2\alpha}dx\right]^{1/2}\geq(1-(1-\varepsilon')^{1/2})\left[\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx\right]^{1/2},$$

woraus durch Quadrieren die behauptete Abschätzung (5.1) folgt.

Nachdem wir $\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx$ für passendes α durch $\int\limits_{r\leq r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}r^{2-n-2\alpha}dx$ abgeschätzt haben, ist es nun ein leichtes, dasselbe auch für $\int\limits_{r\leq r_0}u_{|i}^2r^{-n-2\alpha}dx$ und $\int\limits_{r\leq r_0}u^2r^{-2-n-2\alpha}dx$ zu tun, sofern noch $\alpha>0$ vorausgesetzt wird. Da nämlich $\alpha\neq0$ vorausgesetzt wurde, folgen aus den Ungleichungen (3.3) und (3.4) unmittelbar die Abschätzungen:

$$(5.6)\quad \int\limits_{r\leq r_0}u^2r^{-2-n-2\alpha}dx\leq c(\alpha)\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx$$

$$(5.7)\quad \int\limits_{r\leq r_0}|\Lambda u|^2r^{-2-n-2\alpha}dx\leq c'(\alpha)\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx.$$

Aus (2.2) bzw. (5.3) erhält man:

$$\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx+(n-2+2\alpha)(1+2\alpha)\int\limits_{r\leq r_0}|\Lambda u|^2r^{-2-n-2\alpha}dx$$
$$=\int\limits_{r\leq r_0}u_{|ik}^2r^{2-n-2\alpha}dx+(n-2+2\alpha)(n-1)\int\limits_{r\leq r_0}u_{|r}^2r^{-n-2\alpha}dx,$$

also nach Verwendung von (5.7):

$$(5.8)\quad \int\limits_{r\leq r_0}u_{|r}^2r^{-n-2\alpha}dx\leq c''(\alpha)\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx.$$

Aus (5.7) und (5.8) zusammen folgt

$$(5.9)\quad \int\limits_{r\leq r_0}u_{|i}^2r^{-n-2\alpha}dx\leq c'''(\alpha)\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2r^{2-n-2\alpha}dx.$$

Wendet man endlich (5.1) und (5.6) bzw. (5.9) hintereinander an, so folgt

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gibt es zwei Konstanten c_1 und c_2, die nur von ε und α abhängen, so daß gilt:*

$$(5.10)\quad \int\limits_{r\leq r_0}u^2r^{-2-n-2\alpha}dx\leq c_1\int\limits_{r\leq r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}r^{2-n-2\alpha}dx.$$

$$(5.11)\quad \int\limits_{r\leq r_0}u_{|i}^2r^{-n-2\alpha}dx\leq c_2\int\limits_{r\leq r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}r^{2-n-2\alpha}dx.$$

§ 6. Abschätzung von $u_{|i}^2(0)$, $\int u_{|i}^2r^{3-n}dx$ und $\int u_{|i}^2(r_0-r)^{1+\gamma}r^{\gamma'}dx$

In diesem Paragraphen streben wir nach weiteren Abschätzungen durch $\int\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}r^{\alpha}dx$, die sich in gewisser Weise ähnlich zu denen von § 5 verifizieren lassen. Wir gehen zunächst aus von Ungleichung (2.2a) und machen

dieselben Voraussetzungen über $u(x)$ und die $a_{ik}(x)$ wie in § 5 außer der einen, daß wir nämlich nicht mehr $u_{|i}^2(0) = 0$ fordern. Es folgt, indem wir (2.2a) ähnlich wie früher (2.2) etwa auf die Gestalt (5.4) umformen.

$$\frac{1}{n}(n-1)(n-2)\,\omega_n\,\beta\,u_{|i}^2(0) + \int\limits_{r\leq r_0}(u_{|ik}^2 - (\Delta u)^2)\,r^{2-n}\,dx \leq$$

$$\leq (n-2)\int\limits_{r\leq r_0}{}'' (|\Delta u|^2 - (n-1)\,u^2)\,r^{-2-n}\,dx +$$

$$+\frac{2\beta}{\alpha}(n-1)(n-2)\,r_0^{2\alpha}\,e^{-\alpha/\beta}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{r\leq\beta'}(u(x)-u(0)-x_i u_{,i}(0))^2\,r^{-2-n-2\alpha}\,dx + \int\limits_{r\leq\beta'}(u_{|i}(x)-u_{|i}(0))^2\,r^{-n-2\alpha}\,dx\Big]$$

$$\leq \frac{n-2}{n+1}\int\limits_{r\leq r_0}(\Delta u)^2\,r^{2-n}\,dx + \frac{2\beta}{\alpha}(n-1)(n-2)\,r_0^{2\alpha}\,e^{-\alpha/\beta}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{r\leq\beta'}(u(x)-u(0)-x_i u_{|i}(0))^2 r^{-2-n-2\alpha}\,dx + \int\limits_{r\leq\beta'}(u_{|i}x)-u_{|i}(0))^2\,r^{-n-2}\,dx\Big].$$

Hier sei $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$; α, β beliebig sonst gewählt und ferner $\beta' = r_0 e^{-(2\beta)^{-1}}$ gesetzt. Die Rechnung verläuft etwas anders als in § 5, daher führen wir sie noch etwas näher aus.

Aus (2.2a) ergibt sich

$$1/n(n-1)(n-2)\,\omega_n u_{|i}^2(0) + \int\limits_{r\leq r_0}(u_{|ik}^2 - (\Delta u)^2)\,r^{2-n}\,dx$$
$$= (n-2)\int\limits_{r\leq r_0}(|\Delta u|^2 - (n-1)\,r^2 u_{|r}^2)\,r^{-n-2}\,dx.$$

Das Integral $\int(|\Delta u|^2 - (n-1)\,r^2 u_{|r}^2)\,r^{-n-2}\,dx$ ist hierbei, wie auch schon in Formel (2.2a) als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen $\Big(\text{d. h. } \int\limits_{r\leq r_0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon\leq r\leq r_0}\Big)$. Jedoch existiert $\int\limits_{r\leq r_0} r^2 u_{|r}^2\,r^{-n-2}\,dx$ nicht mehr notwendig; wir erhalten daher statt der Formel

$$\int\limits_{r\leq r_0} u^2\,r^{-2-n}\,dx \leq \int\limits_{r\leq r_0} u_{|r}^2\,r^{-n}\,dx$$

jetzt die Identität

$$-\int\limits_{r\leq r_0}(r^2 u_{|r}^2 - u^2)\,r^{-n-2}\,dx$$
$$= -\int\limits_{r\leq r_0}(u/r)_{|r}^2\,r^{2-n}\,dx + \int do_1\Big(\int\limits_0^{r_0}(u/r)_{|r}\,dr\Big)^2,$$

in welcher das Zeichen $\int do_1$ Integration über die Einheitskugel bedeute. Nun ist einerseits

$$\int do_1\Big(\int\limits_0^{r_0}(u/r)_{|r}\,dr\Big)^2 = 1/n\,\omega_n\,u_{|i}^2(0),$$

andererseits folgt für jedes β' aus $0 < \beta' < r_0$ die Abschätzung

$$\int do_1\left(\int_0^{r_0} (u/r)_{|r}\, dr\right)^2 \leq 2\int do_1\left(\int_0^{\beta'} (u/r)_{|r}\, dr\right)^2 + 2\int do_1\left(\int_{\beta'}^{r_0} (u/r)_{|r}\, dr\right)^2$$

$$\leq 2\int do_1\left(\int_0^{\beta'} (x_i\, u_{|i}(x) - u(x) + u(0))\, dr/r^2\right)^2 +$$

$$+ 2\log (r_0/\beta') \int_{r \leq r_0} (u/r)^2_{|r}\, r^{2-n}\, dx$$

$$\leq 4\int_0^{\beta'} dr/r^{1-2\alpha} \int_{r \leq \beta'} (u(x) - u(0) - x_i\, u_{|i}(0))^2\, r^{-2-n-2\alpha}\, dx$$

$$+ 4\int_0^{\beta'} dr/r^{1-2\alpha} \int_{r \leq \beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\, dx + 2\log (r_0/\beta') \int_{r \leq r_0} (u/r)^2_{|r}\, r^{2-n}\, dx$$

$$\leq 2\beta'^{2\alpha}/\alpha \int_{r \leq \beta'} (u(x) - u(0) - x_i\, u_{|i}(0))^2 r^{-2-n-2\alpha}\, dx$$

$$+ 2\beta'^{2\alpha}/\alpha \int_{r \leq \beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\, dx + 2\log (r_0/\beta') \int_{r \leq r_0} (u/r)^2_{|r}\, r^{2-n}\, dx\,.$$

Daher kann man weiter folgern:

$$- \int_{r \leq r_0} (r^2 u^2_{|r} - u^2)\, r^{-n-2}\, dx \leq - \int_{r \leq r_0} (u/r)^2_{|r}\, r^{2-n}\, dx + 2\,\beta \log (r_0/\beta') \times$$

$$\times \int_{r \leq r_0} (u/r)^2_{|r}\, r^{2-n}\, dx + 2\,\beta\,\beta'^{2\alpha}/\alpha \int_{r \leq \beta'} (u(x) - u(0) - x_i\, u_{|i}(0))^2\, r^{-2-n-2\alpha}\, dx +$$

$$+ 2\,\beta\,\beta'^{2\alpha}/\alpha \int_{r \leq \beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\, dx + (1-\beta)\, 1/n\, \omega_n\, u^2_{|i}(0)\,.$$

Bestimmt man hierin β so, daß $2\,\beta \log (r_0/\beta') = 1$ wird, also $\beta' = r_0\, e^{-(2\beta)^{-1}}$, dann heben sich die beiden Integrale der rechten Seite fort. Insgesamt folgt daher

$$1/n \cdot (n-1)\,(n-2)\, \omega_n\, u^2_{|i}(0) + \int_{r \leq r_0} (u^2_{|ik} - (\varDelta\, u)^2)\, r^{2-n}\, dx$$

$$= (n-2) \int_{r \leq r_0} (|\varLambda\, u|^2 - (n-1)\, u^2)\, r^{-n-2}\, dx -$$

$$-(n-1)\,(n-2) \int_{r \leq r_0} (r^2\, u^2_{|r} - u^2)\, r^{-n-2}\, dx$$

$$\leq (n-2) \int_{r \leq r_0} (|\varLambda\, u|^2 - (n-1)\, u^2)\, r^{-n-2}\, dx +$$

$$+ (1-\beta)\, 1/n \cdot (n-1)\,(n-2)\, \omega_n\, u^2_{|i}(0) +$$

$$+ 2\,\beta/\alpha\, (n-1)\,(n-2) r_0^{2\alpha}\, e^{-\alpha/\beta} \times$$

$$\times \int_{r \leq \beta'} (u(x) - u(0) - x_i\, u_{|i}(0))^2\, r^{-2-n-2\alpha}\, dx +$$

$$+ 2\,\beta/\alpha\, (n-1)\,(n-2)\, r_0^{2\alpha}\, e^{-\alpha/\beta} \int_{r \leq \beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\, dx$$

also nach Ausgleich der beiden Terme mit $u^2_{|i}(0)$ die erste Abschätzung der behaupteten Formel. Aus ihr folgt, indem wir wie in § 5 die Ungleichung (3.4) verwenden, auch die zweite Abschätzung. Bei der Anwendung von Ungleichung (3.4) hat man dabei insbesondere zu berücksichtigen, daß eine Funktion $u \in C_2^*$, die orthogonal auf allen Kugelfunktionen nullter und erster Ordnung ist, notwendig mitsamt ihres Gradienten bei $x = 0$ verschwindet, so daß die Voraussetzungen für (3.4) alle erfüllt sind.

Weiter ergibt sich analog zu § 5:

$$(n-2)\,\omega_n\,\beta\,u_{|i}^2(0) + \int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n}\,dx + n/(n-1) \int\limits_{r\le r_0} (u_{|ik}^2 - (\Delta u)^2)\, r^{2-n}\,dx$$

$$\le \left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right) \int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n}\,dx +$$

$$+ 2\beta/\alpha\, n(n-2)\, r_0^{2\alpha} e^{-\alpha/\beta} \int\limits_{r\le\beta'} (u(x) - u(0) - x_i u_{|i}(0))\, r^{-2-n-2\alpha}\,dx +$$

$$+ 2\beta/\alpha\, n(n-2)\, r_0^{2\alpha} e^{-\alpha/\beta} \int\limits_{r\le\beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\,dx$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n-2}\;\delta\sqrt{\omega_n\beta}\;[u_{|i}^2(0)]^{1/2} + \\
&+\left[\int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n}\,dx + n/(n-1)\int\limits_{r\le r_0}(u_{|ik}^2 - (\Delta u)^2)\, r^{2-n}\,dx\right]^{1/2} \\
&\le \left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{1/2} \sqrt{1+\delta^2}\left[\int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n}dx\right]^{1/2} + \\
&+\sqrt{2\beta/\alpha}\;[n(n-2)(1+\delta^2)\, r_0^{2\alpha} e^{-\alpha/\beta}]^{1/2} \times \\
&\times\left[\int\limits_{r\le\beta'} (u(x) - u(0) - x_i u_{|i}(0))^2 r^{-2-n-2\alpha} dx + \right. \\
&\left. + \int\limits_{r\le\beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\,dx\right]^{1/2} \qquad \text{für jedes } \delta > 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Jetzt mögen die Abschätzungen (5.3) und (5.2), die ja auch für $\alpha = 0$ gelten, mit (6.1) kombiniert werden; es folgt:

$$\begin{aligned}
&n\left[\int\limits_{r\le r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\, r^{2-n} dx\right]^{1/2} \ge \left[\int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n}\,dx\right]^{1/2} - \\
&-(1-\varepsilon)^{1/2}\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{1/2}(1+\delta^2)^{1/2} \times \\
&\times\left[\int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{2-n} dx\right]^{1/2} \\
&-(1-\varepsilon)^{1/2}\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1/2}\sqrt{2\beta/\alpha}\;[n(n-2)(1+\delta^2)\, r_0^{2\alpha} e^{-\alpha/\beta}]^{1/2} \times \\
&\times\left[\int\limits_{r\le\beta'} (u(x) - u(0) - x_i u_{|i}(0))^2 r^{-2-n-2\alpha} dx + \int\limits_{r\le\beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\,dx\right]^{1/2} + \\
&+(1-\varepsilon)^{1/2}\left(1 + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)}\right)^{-1/2}(n-2)^{1/2}\,\delta\sqrt{\omega_n\beta}\;[u_{|i}^2(0)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wähle δ so klein, daß $(1-\varepsilon)(1+\delta^2) = 1$ wird, dann ergibt sich für $n > 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&u_{|i}^2(0) \le c/\beta \int\limits_{r\le r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\, r^{2-n}\,dx + c' e^{-\alpha/\beta} \times \\
&\times\left[\int\limits_{r\le\beta'} (u(x) - u(0) - x_i\, u_{|i}(0))^2\, r^{-2-n-2\alpha}\,dx + \int\limits_{r\le\beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2\, r^{-n-2\alpha}\,dx\right].
\end{aligned}$$

Im Falle $n = 2$ erhält man auf diesem Wege für $u^2_{|i}(0)$ offensichtlich keine Abschätzung; dagegen liegt es nahe, in diesem Fall anstatt (2.2a) die entsprechende Identität zu verwenden, bei welcher anstatt r^{2-n} der Logarithmus $\log 1/r$ verwendet wird. In der Tat ist es möglich, auf diesem Wege ganz analog vorzugehen; während jedoch für $n = 2$ die K'_ε-Bedingung in die gleichmäßige Elliptizitätsforderung übergeht, so daß die Nirenbergschen a priori-Abschätzungen für die Hölderkonstante der ersten Ableitungen wieder herauskommen, benötigt man zur Durchführung einer Abschätzung der ersten Ableitungen selbst nach obigem Muster im Fall $n = 2$ eine noch schärfere Kegelbedingung. Im Fall $n = 2$ erscheint es infolgedessen günstiger, auf den Radóschen Satz zurückzugreifen, wie NIRENBERG es tut. Wir wollen in diesem Zusammenhang von der Behandlung des Falles $n = 2$ absehen. Für $n > 2$ folgt

Satz 4: *Im Falle der Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 2 außer der Forderung $u^2_{|i}(0) = 0$ ergibt sich für $n > 2$ eine Abschätzung*

$$u^2_{|i}(0) \leq c/\beta \int\limits_{r \leq r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2} r^{2-n}\, dx + c' e^{-\alpha/\beta} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{r \leq \beta'} (u(x) - u(0) - x_i u_{|i}(0))^2 r^{-2-n-2\alpha}\, dx + \int\limits_{r \leq \beta'} (u_{|i}(x) - u_{|i}(0))^2 r^{-n-2\alpha}\, dx \right]$$

mit beliebigem α, β aus $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ und mit $\beta' = r_0 e^{-(2\beta)^{-1}}$, bei der c und c' nur von r_0 und α und von dem ε der K'_ε-Bedingung abhängen.

Wenn wir weiter nach einer Abschätzung für $\int\limits_{r \leq r_0} u^2_{|i} r^{3-n} dx$ trachten, so zeigt es sich, daß man in diesem Falle mit der (schwächeren) K_ε-Bedingung auskommt, also in Kegeln operieren kann, die die Wände des Winkelraumes $\lambda_i \geq 0$ nahezu berühren. Für den Operator L von § 5 fordern wir dann die Erfülltheit folgender *Voraussetzungen:*

1) *$a_{ik}(x)$ sei für $|x| \leq r_0$ erklärt und meßbar;*

2) *es gelte $a_{ii}(x) \neq 0$ für $|x| \leq r_0$;*

3) *$((a_{ik}(x)))$ genüge in $|x| \leq r_0$ einer K_ε-Bedingung mit einem ε unabhängig von x.*

Voraussetzungen über $u(x)$:

1) *$u \in C^*_2$ (vgl. § 2);*

2) *$u(x) = u_{|r}(x) = 0$ auf $|x| = r_0$;*

3) *$u(0) = 0$.*

Satz 5: *Unter obigen Voraussetzungen gilt für $n > 2$ eine Abschätzung der Form*

$$\int\limits_{r \leq r_0} (\Delta u)^2 r^{1-n}\, dx \leq c \int\limits_{r \leq r_0} \frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2} r^{3-n}\, dx$$

mit einem c, das nur von ε abhängt.

Beweis: Zunächst zerlegt man und schätzt ab wie beim Beweis von Satz 2 in § 5 und betrachtet dann die Gleichung (5.4). Hier ist jetzt $\alpha = -1/2$ zu setzen. Es folgt

$$\text{(6.2)} \quad \int\limits_{r \leq r_0} (u^2_{|ik} - (\Delta u)^2)\, r^{3-n}\, dx = -(n-1)(n-3) \int\limits_{r \leq r_0} u^2_{|r}\, r^{1-n}\, dx \leq 0.$$

Anstelle von (5.3) ergibt sich

$$\int\limits_{r\le r_0} (b_{ik}\,u_{|ik})^2\, r^{3-n}\,dx \le \int\limits_{r\le r_0} (n-1)\,\frac{\sum\limits_{i<k}(\lambda_i-\lambda_k)^2}{\left(\sum\limits_i \lambda_i\right)^2}\,(\Delta u)^2\, r^{3-n}\,dx \tag{6.3}$$

$$\le (1-\varepsilon)\int\limits_{r\le r_0} (\Delta u)^2 r^{3-n}\,dx.$$

Dies und (5.2) liefern

$$\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\left[\int\limits_{r\le r_0}(\Delta u)^2\, r^{3-n}\,dx\right]^{1/2} \le n\left[\int\limits_{r\le r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\, r^{3-n}\,dx\right]^{1/2},$$

aus welchem die Behauptung folgt. Mit den Ungleichungen (3.3) und (3.4) sowie mit der Identität (2.2) ergibt sich endlich

Satz 6: *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 gilt*

$$\int\limits_{r\le r_0} u^2\, r^{-1-n}\,dx \le c\int\limits_{r\le r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\, r^{3-n}\,dx \tag{6.4}$$

$$\int\limits_{r\le r_0} u_{|i}^2\, r^{1-n}\,dx \le c'\int\limits_{r\le r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\, r^{3-n}\,dx \tag{6.5}$$

jeweils mit Konstanten c, c', die nur von ε abhängen.

Als letztes benötigen wir noch eine Abschätzung über $\int u_{|i}^2\,dx$, bei der nicht das Verschwinden von u am Rande erforderlich ist. Dazu dienen uns die beiden Ungleichungen (2.3) und (2.4). Es genügt, eine K_ε-Bedingung zu fordern, und es ergibt sich folgender Satz:

Satz 7: *Seien über $a_{ik}(x)$ die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt. Es gelte ferner $u(x)\in C_2^*$, aber nichts weiter sonst.*

Behauptung: *Für jedes $\gamma > 0$ und jedes $\gamma' > 2-n$ gilt*

$$\int\limits_{r\le r_0} u_{|i}^2\,(r_0-r)^{1+\gamma}\, r^{\gamma'}\,dx \le \tau\int\limits_{r\le r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\,(r_0-r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx \tag{6.6}$$

$$+\, c(\varepsilon,\gamma,\gamma',\tau,r_0)\,\underset{|x|\le r_0}{\mathrm{Max}}\,|u(x)|^2.$$

Dabei kann $\tau > 0$ beliebig klein vorgegeben werden.

Zum Beweis werde zunächst wiederum zerlegt und abgeschätzt wie bei (5.2). Es folgt

$$n\left[\int\limits_{r\le r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}\,(r_0-r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx\right]^{1/2} \ge \left[\int\limits_{r\le r_0}(\Delta u)^2\,(r_0-r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\right]^{1/2} -$$

$$-\,(1-\varepsilon)^{1/2}\left[\int\limits_{r\le r_0}\left((\Delta u)^2+\frac{n}{n-1}\left(u_{|ik}^2-(\Delta u)^2\right)\right)(r_0-r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx\right]^{1/2}.$$

Nun gilt gemäß (2.4)

$$\left|\int\limits_{r\le r_0}\left(u_{|ik}^2-(\Delta u)^2\right)(r_0-r)^{3+\gamma}\, r^{\gamma'+2}\,dx\right| \le c(\gamma,\gamma',r_0)\int\limits_{r\le r_0} u_{|i}^2\,(r_0-r)^{1+\gamma}\, r^{\gamma'}\,dx,$$

also folgt

$$n\left[\int_{r\leq r_0}\frac{(L(u))^2}{(a_{ii})^2}(r_0-r)^{3+\gamma}r^{\gamma'+2}\,dx\right]^{1/2}$$

$$\geq (1-\sqrt{1-\varepsilon})\left[\int_{r\leq r_0}(\Delta u)^2(r_0-r)^{3+\gamma}r^{\gamma'+2}\,dx\right]^{1/2}-$$

$$-\sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{n/(n-1)}\,c^{1/n}(\gamma,\gamma',r_0)\left[\int_{r\leq r_0}u_{|i}^2(r_0-r)^{1+\gamma}r^{\gamma'}\,dx\right]^{1/2}.$$

Somit:

$$\int_{r\leq r_0}(\Delta u)^2(r_0-r)^{3+\gamma}r^{\gamma'}\,dx\leq c(\varepsilon,\gamma,\gamma',r_0)\int_{r\leq r_0}(L(u))^2(r_0-r)^{3+\gamma}r^{\gamma'+2}\,dx+$$
$$+c'(\varepsilon,\gamma,\gamma',r_0)\int_{r\leq r_0}u_{|i}^2(r_0-r)^{1+\gamma}r^{\gamma'}\,dx.$$

Dies trage man in Abschätzung (2.3) ein, deren ε' noch hinreichend klein gewählt wird. Es ergibt sich, wenn man noch

$$\int_{r\leq r_0}u^2(r_0-r)^{\gamma-1}r^{\gamma'-2}\,dx\leq c\operatorname*{Max}_{|x|\leq r_0}|u|^2$$

abschätzt, die behauptete Ungleichung.

§ 7. Apriori-Abschätzungen für $\|u\|_{1+\alpha}$

Es sei vorgelegt der lineare Differentialausdruck

$$L_1=a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}+b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x),\qquad n>2.$$

Voraussetzungen:

1) In der Kugel $|x|\leq R+\varkappa$, $0<\varkappa\leq R$, mögen $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ und $c(x)$ erklärt und meßbar sein.

2) Es gebe eine positive Konstante Q, so daß gilt

$$|b_i|\leq Q,\quad |c(x)|\leq Q\quad\text{für}\quad i=1,\ldots,n,\ |x|\leq R+\varkappa.$$

3) Es gibt positive Zahlen $m, M, p, P, \delta, \varepsilon$ und zu jedem x_0 mit $|x_0|\leq R$ eine nichtsinguläre, konstante $n\times n$-Matrix T_{x_0}, so daß gilt:

a) $p|\xi|\leq|T_{x_0}\xi|\leq P|\xi|$ für jedes n-tupel $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$;

b) $A^{T_{x_0}}(x)=T'_{x_0}A(x)T_{x_0}$ $\big($mit $A(x)=((a_{ik}(x)))\big)$ genügt in $|x-x_0|\leq\delta$ einer K_ε-Bedingung mit dem oben vorgegebenen ε (es wird $\delta\leq\varkappa$ vorausgesetzt);

c) $m\leq\operatorname{Spur}(A^{T_{x_0}}(x))\leq M$ für $|x-x_0|\leq\delta$.

Wir beweisen in diesem Paragraphen den folgenden

Satz 8: *Jede in $|x|\leq R+\varkappa$ stetig differenzierbare Funktion mit stückweise stetigen zweiten partiellen Ableitungen, die der Differentialgleichung $L_1(u)=f$ genügt, erfüllt mit einem passenden α, dessen Auswahl nur von der Größe der Zahl ε abhängt, die a priori-Abschätzung*

$$\operatorname*{Max}_{|x|\leq R}|u|+\operatorname*{Max}_{|x|\leq R}[u_{|i}^2]^{1/2}+H'_{\alpha,\delta}(u;|x|\leq R)\tag{7.1}$$
$$\leq c\operatorname*{Max}_{|x|\leq R+\varkappa}|f|+c'\operatorname*{Max}_{|x|\leq R+\varkappa}|u|$$

mit $\vartheta = \delta\, p/16\, P$ und zwei Konstanten c, c', die nur von Q, m, M, p, P, δ, ε abhängen.

Beweis: Sei $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^1)$ ein Punkt mit $|x_0| \leq R$ und $T_{x_0} = ((t_{ik}^{x_0}))$ die zugehörige nichtsinguläre, konstante Matrix. Führe für $|x - x_0| \leq \delta$ die folgenden neuen unabhängigen Variablen y ein: $y_i = t_{ji}^{x_0}(x_j - x_j^0)$, also $y = T'_{x_0} \times$ $\times (x - x_0)$. Bei der Transformation auf diese Veränderlichen transformiert sich die Matrix $A(x) = \big((a_{ik}(x))\big)$ in die Matrix $A^{T_{x_0}}(x)$, wir erhalten demgemäß im Bild den Operator

$$L_1^{x_0} = a_{ik}^{x_0}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_k} + b_i^{x_0}(x)\,\frac{\partial}{\partial y_i} + c^{x_0}(x)\,,$$

wobei $A^{T_{x_0}}(x) = \big((a_{ik}^{x_0}(x))\big)$ gilt. Der Bildbereich der Kugel $|x - x_0| \leq \delta$ ist offenbar ein Ellipsoid, dargestellt durch die Ungleichung $|T_{x_0}^{-1'} y| \leq \delta$; es enthält zufolge der Voraussetzung 3a) die Kugel $|y| \leq \delta\, p$ (da ja $|T_{x_0}\xi| \geq p\,|\xi|$ verlangt wurde).

Beschränken wir uns jetzt auf diese Kugel, so sind in ihr und natürlich auch in jeder kleineren Kugel für die $a_{ik}^{x_0}(x)$ die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt und somit erst recht die (schwächeren) Voraussetzungen von Satz 5. Sei $u(x) \in C_2^*$ eine Lösung von $L_1(u) = f$ und sei $v(y) = u(x_0 + T_{x_0}^{-1'} y)$, $g(y)$ $= f(x_0 + T_{x_0}^{1'} y)$, so gilt in $|y| \leq \delta\, p$ die Differentialgleichung $L_1^{x_0}(v) = g$. Sei weiter $\varrho = (y_i^2)^{1/2}$ und $\zeta(\varrho)$ eine in $0 \leq \varrho \leq p\,\delta/8$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$\zeta(\varrho) = 1 \text{ in } 0 \leq \varrho \leq p\,\delta/16,\ \zeta(\varrho) = \zeta'(\varrho) = 0 \text{ in } y = p\,\delta/8.$$

Bilde dann

$$w(y) = \zeta(\varrho)\,\big(v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0)\big)$$

(mit $|\,i$ sei hier die Differentiation nach y_i gemeint), und wende auf $w(y)$ mit $a_{ik}^{x_0}(x(y))$ und $r_0 = p\,\delta/8$ eine der beiden Ungleichungen von Satz 3 an (dessen Voraussetzungen sind nunmehr erfüllt). Es folgt etwa aus (5.10):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varrho \leq p\delta/16} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy \leq \\
&\quad \leq c_1 m^{-2} \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} (L_1^{x_0}(v))^2 \varrho^{2-n-2\alpha}\, dy + c_1' \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 dy\; + \\
&\quad + c_1'' \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 dy + c_1''' \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{2-n-2\alpha}\, dy\; + \\
&\quad + c_1^{\mathrm{IV}} \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} v^2(y)\, \varrho^{2-n-2\alpha}\, dy \leq \\
&\quad \leq K_1 \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_1^{\mathrm{I}} v_{|i}^2(0) + K_1^{\mathrm{II}} \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} v_{|i}^2(y)\, dy\; + \\
&\quad + K_1^{\mathrm{III}} \int\limits_{\varrho \leq p\delta/8} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{2-n-2\alpha}\, dy + K_1^{\mathrm{IV}} \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |u|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (5.11) liefert entsprechend

$$\int\limits_{\varrho \leq p\delta/16} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy \leq \cdots,$$

wobei rechts genau dieselben Abschätzungsterme wie oben auftreten.

Jetzt definieren wir $z(y) = \zeta(\varrho/2)\,(v(y) - v(0))$ und wenden auf $z(y)$ die Abschätzungen der Sätze 4 und 6 mit $r_0 = p\,\delta/4$ an: Es folgt aus Satz 4 (für $n > 2$):

$$\begin{aligned}
v_{|i}^2(0) \le{} & K_2/\beta \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_2^{\mathrm{I}}/\beta \int\limits_{\varrho \le p\delta/4} v_{|i}^2(y)\, dy + \\
&+ K_2^{\mathrm{II}}/\beta \int\limits_{\varrho \le p\delta/4} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{2-n}\, dy + K_2^{\mathrm{III}}/\beta \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2 + \\
&+ K_2^{\mathrm{IV}}\, e^{-\alpha/\beta} \Big[\int\limits_{\varrho \le \beta'} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy + \\
&\quad + \int\limits_{\varrho \le \beta'} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy\Big] \\
&\text{mit } \beta' = r_0\, e^{-(2\beta)^{-1}} = p\,\delta/4 \cdot e^{-(2\beta)^{-1}}.
\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus Satz 6:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varrho \le p\delta/4} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{2-n-2\alpha}\, dy \le (p\,\delta/4)^{1-2\alpha} \int\limits_{\varrho \le p\delta/4} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{1-n}\, dy \le \\
&\le K_3 \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_3^{\mathrm{I}} \int\limits_{\varrho \le p\delta/2} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{3-n}\, dy + K_3^{\mathrm{II}} \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2,
\end{aligned}$$

falls noch $\alpha \le 1/2$ gefordert wird. Zusammen hat man damit

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varrho \le p\delta/16} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy \\
&\le K_4/\beta \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_4^{\mathrm{I}}/\beta \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2 + K_4^{\mathrm{II}}/\beta \int\limits_{\varrho \le p\delta/2} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{3-n}\, dy + \\
&+ K_4^{\mathrm{III}} e^{-\alpha/\beta} \Big[\int\limits_{\varrho \le \beta'} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy + \\
&+ \int\limits_{\varrho \le \beta'} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy\Big]
\end{aligned}$$

und Entsprechendes für

$$\int\limits_{\varrho \le p\delta/16} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy.$$

Wir addieren nun beide Ungleichungen und wählen alsdann β so klein, daß einmal $\beta' \le p\,\delta/16$ wird, zum anderen aber der Koeffizient der Summe $\int (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy + \int (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung kleiner als 1/2 wird. (Das ist möglich, da in ihm der Faktor $e^{-\alpha/\beta}$ auftritt.) Alsdann folgen die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varrho \le p\delta/16} (v(y) - v(0) - y_i v_{|i}(0))^2 \varrho^{-2-n-2\alpha}\, dy + \int\limits_{\varrho \le p\delta/16} (v_{|i}(y) - v_{|i}(0))^2 \varrho^{-n-2\alpha}\, dy \\
&\le K_5 \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_5' \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2 + K_5'' \int\limits_{\varrho \le p\delta/2} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{3-n}\, dy
\end{aligned}$$

und

$$v_{|i}^2(0) \le K_6 \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_6' \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2 + K_6'' \int\limits_{\varrho \le p\delta/2} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{3-n}\, dy.$$

Schließlich halten wir fest

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varrho \le p\delta/16} (v(y) - v(0))^2 \varrho^{-n-1}\, dy \le{} & K_7 \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K_7' \Big(\operatorname*{Max}_{|x| \le R+\varkappa} |u|\Big)^2 + \\
& + K_7'' \int\limits_{\varrho \le p\delta/2} v_{|i}^2(y)\, \varrho^{3-n}\, dy,
\end{aligned}$$

eine Abschätzung, die zwar für diese Überlegungen nicht wesentlich ist, die aber auch dann gilt, wenn anstatt der K'_ε-Bedingung nur die K_ε-Bedingung gefordert wird und aus welcher man den Existenzsatz für quasilineare Differentialgleichungen unter diesen allgemeineren Voraussetzungen erschließen kann, falls in den Koeffizienten a_{ik} nur das u, nicht aber die Ableitungen $u_{|i}$ als unabhängige Veränderliche auftreten.

Somit bleibt als nächstes abzuschätzen $\int\limits_{\varrho \leq p\delta/2} v_{|i}^2(y)\,\varrho^{3-n}\,dy$. Dazu verwenden wir die Ungleichung (6.6) zu Satz 7. Es folgt

$$\int\limits_{\varrho \leq p\delta/2} v_{|i}^2(y)\,\varrho^{3-n}\,dy \leq K_7\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K'_7\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |u|\Big)^2 .$$

Wir führen schließlich die alten Koordinaten wieder ein. Es gilt

$$p\,|x - x_0| \leq \varrho \leq P\,|x - x_0|; \quad y_i v_{|i}(0) = (x_i - x_i^0)\,u_{|i}(x_0);$$
$$P^{-2}(u_{|i}^2(x_0)) \leq v_{|i}^2(0) \leq p^{-2}(u_{|i}^2(x_0)).$$

Das Bildellipsoid $|T'_{x_0}(x - x_0)| \leq p\,\delta/16$ im x-Raum der Kugel $|y| \leq p\,\delta/16$ enthält die Kugel $|x - x_0| \leq p\,\delta/16\,P$. Demgemäß folgert man für alle x_0 mit $|x_0| \leq R$ die Abschätzbarkeit von

$$\int\limits_{|x-x_0| \leq p\delta/16P} (u(x) - u(x_0) - (x_i - x_i^0)\,u_{i|}(x_0))^2\,|x - x_0|^{-2-n-2\alpha}\,dx,$$
$$\int\limits_{|x-x_0| \leq p\delta/16P} (u_{|i}(x) - u_{|i}(x_0))^2\,|x - x_0|^{-n-2\alpha}\,dx, \quad u_{|i}^2(x_0) \quad \text{und}$$
$$\int\limits_{|x-x_0| \leq p\delta/16P} (u(x) - u(x_0))^2\,|x - x_0|^{-n-1}\,dx$$

durch einen Ausdruck der Form

$$K\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K'\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |u|\Big)^2 .$$

Dabei hängen K und K' ersichtlich nur von Q, m, M, p, P, δ und ε ab. Jetzt mögen die Sätze des § 1 herangezogen werden. Dann folgt unmittelbar

$$H'^2_{\alpha,\vartheta}(u;\,|x_0| \leq R) \leq K\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |f|\Big)^2 + K'\Big(\operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |u|\Big)^2 \quad \text{mit} \quad \vartheta = p\,\delta/16\,P .$$

Also gilt insgesamt Ungleichung (7.1), womit Satz 8 bewiesen ist.

Bemerkung zu Satz 8: Gilt in den Voraussetzungen zu Satz 8 nur die K_ε-Bedingung anstelle der K'_ε-Bedingung, so ergibt sich statt der Abschätzung (7.1) die schwächere Abschätzung

$$\operatorname*{Max}_{|x| \leq R} |u| + H_{1/2,\vartheta}(u;\,|x| \leq R) \leq K \operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |f| + K' \operatorname*{Max}_{|x| \leq R+\varkappa} |u| .$$

§ 8. Beweis des Existenzsatzes

Der Beweis des Satzes 1 erledigt sich jetzt einfach folgendermaßen durch den Beweis nachstehenden Satzes.

Sei vorgelegt der lineare Differentialoperator

$$L_1 = a_{ik}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} + b_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \qquad n > 2 .$$

Voraussetzungen über L_1:

1. $a_{ik}(x)$ sei in D erklärt und meßbar. D besitze die in § 4 geforderten Eigenschaften.

2. Es gebe eine positive Konstante Q, so daß gilt

$$|b_i(x)| \leq Q, \ |c(x)| \leq Q \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n, \ x \in D.$$

3. Es gebe feste positive Konstanten m, M, p, P, δ, ε und zu jedem x_0 aus D eine nichtsinguläre konstante Matrix T_{x_0}, so daß gilt:

a) $p\,|\xi| \leq |T_{x_0}\xi| \leq P\,|\xi|$ für jedes n-tupel $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$;

b) $A^{T_{x_0}}(x) = T'_{x_0} A(x)\, T_{x_0}$ (mit $A(x) = ((a_{ik}(x))))$ genügt für $x \in D$, mit $|x - x_0| \leq \delta$ einer K'_ε-Bedingung;

c) $m \leq \text{Spur}\,(A^{T_{x_0}}(x)) \leq M$.

Voraussetzungen über $u(x)$:

Die Funktion $u(x)$ sei $\in C_2^*$ und Lösung des Randwertproblems

$$\text{II} \qquad L_1(u) = f, \ x \in D; \ u = \varphi, \ x \in \Gamma.$$

φ sei auf Γ zweimal stetig differenzierbar.

Satz 9: *Es gibt ein $\alpha > 0$, das nur von ε abhängt, so daß*

$$(8.1) \qquad \|u\|_{1+\alpha} \leq K\,\|\varphi\|'_2 + K'\|u\| + K''\|f\|$$

gilt. Dabei sind K, K', K'' nur abhängig von der speziellen Gestalt des Bereiches D und den Konstanten $Q, m, M, p, P, \delta, \varepsilon$.

Beweis: Um jeden Punkt x_0 von Γ beschreibe man eine Kugel $|x - x_0| \leq \mu$ (μ hinreichend klein) und bilde durch eine zweimal stetig differenzierbare Transformation $x = x(y)$ der unabhängigen Variablen x mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante den Durchschnitt dieser Kugel mit dem Bereich D so auf einen Bereich G^* eines y-Raumes ab, daß x_0 nach Null abgebildet wird und das Hyperflächenstück $|x - x_0| \leq \mu$, $x \in \Gamma$ in eine Umgebung von $y = 0$ auf der Hyperebene $y_1 = 0$ übergeht. Für $|x - x_0| \leq \mu$, $x \in D - \Gamma$ gelte $y_1 > 0$.

Die Transformation $x = x(y)$ ist durch die verlangten Eigenschaften natürlich nicht eindeutig bestimmt. Mit ihr leistet z. B. die Abbildung $x = x(B\,y)$ genau dasselbe, wenn B eine beliebige konstante, nichtsinguläre $n \times n$-Matrix von positiver Determinante ist, die die Ebene $y_1 = 0$ invariant läßt. Sei $S(x) = ((\partial y_k/\partial x_i))$, dann transformiert sich bei der Abbildung $x = x(y)$ der Operator L_1 in den Operator

$$L_1^* = a_{ik}^*(y)\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_k} + b_i^*(y)\,\frac{\partial}{\partial y_i} + c^*(y)$$

mit $((a_{ik}(y))) = A^*(y)$ und $A^*(y) = S'(x(y))\,A(x(y))\,S(x(y))$, $A(x) = ((a_{ik}(x)))$. Definiere nun $B = S'(x_0)\,T'^{-1}_{x_0} O$ mit einer orthogonalen Matrix O, die dafür sorgt, daß B, wie verlangt, eine positive Determinante hat und die Ebene $y_1 = 0$ in sich transformiert. Eine solche Matrix O kann immer gefunden werden. Wendet man die Transformation $x = x(B\,y)$ mit dem so bestimmten B an, so geht L_1 über in den Operator

$$L_1^{**} = a_{ik}^{**}(y)\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_k} + b_i^{**}(y)\,\frac{\partial}{\partial y_i} + c^{**}(y)$$

mit $((a_{ik}^{**}(y))) = A^{**}(y)$ und

$$A^{**}(y) = B^{-1} S'(x(B\,y))\, A(x(B\,y))\, S(x\,(B\,y))\, B^{-1\prime}$$
$$= O'\, T'_{x_0} S'^{-1}(x_0)\, S'(x(By))\, A(x(By))\, S(x(By))\, S^{-1}(x_0)\, T_{x_0} O.$$

Für $y = 0$ kommt also heraus: $A^{**}(0) = O' A^{T_{x_0}}(x_0)\, O$, und diese Matrix genügt der K'_ε-Bedingung mit dem in der Voraussetzung zu Satz 9 angegebenen ε, denn die orthogonale Transformation O läßt die Eigenwerte von $A^{T_{x_0}}(x_0)$, also auch jede K_ε- und K'_ε-Bedingung invariant. Wir wollen uns davon überzeugen, daß auch noch jede $K'_{\varepsilon'}$-Bedingung mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ in einer hinreichend kleinen Halbumgebung $|y| \leqq \delta'$, $y_1 \geqq 0$, $x(y) \in D$ von $y = 0$ erfüllt ist, wobei δ' nur von den Konstanten ε, ε', p, P, δ und der Beschaffenheit der Transformation $x = x(y)$, also letzten Endes von der Beschaffenheit des Bereichs D abhängt. Mit

$$Z(y) = S(x(B\,y))\, S^{-1}(x_0) - E, \quad E = ((\delta_{ik})),$$

folgt

$$A^{**}(y) = O'\, T'_{x_0} A(x(By))\, T_{x_0} O +$$
$$+ O'\, T'_{x_0} Z'(y)\, A(x(By))\, T_{x_0} O + O'\, T'_{x_0} A(x(By))\, Z(y)\, T_{x_0} O + \tag{8.2}$$
$$+ O'\, T'_{x_0} Z'(y)\, A(x(By))\, Z(y)\, T_{x_0} O.$$

Wie bereits in § 4 ausgeführt, kann die K'_ε-Bedingung auf die Komponenten der Matrix, anstatt auf ihre Eigenwerte, bezogen werden. Gilt für $C = ((c_{ik}))$ die K'_ε-Bedingung, dann ist das gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\left((n-1) + \frac{n(n-2)}{n+1}\right) c_{ik}^2 \leqq \left(1 + \frac{n-2}{n-1} - \varepsilon/n\right) (c_{ii})^2.$$

Wir erhalten nun etwa für

$$C = ((c_{ik})) = O'\, T'_{x_0} Z'(y)\, A(x(By))\, T_{x_0} O = O'\, T'_{x_0} Z'\, T'^{-1}_{x_0} A^{T_{x_0}}(x(By))\, O$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} c_{ik}^2 &\leqq t_{ik}^{x_0 2}\, z_{ik}^2(y)\, \hat{t}_{ik}^{x_0 2} (a_{ik}^{x_0}(x(By)))^2, \qquad \text{mit } ((\hat{t}_{ik}^{x_0})) = T_{x_0}^{-1}, \\ &\leqq n^2 z_{ik}^2(y)\, p^{-2} P^2 \left(1 + \frac{n-2}{n+1}\right) \left((n-1) + \frac{n(n-2)}{n+1}\right)^{-1} (a_{ii}^{x_0}(x(By)))^2 \\ &\leqq c_1(n)\, p^{-2} P^2 (z_{ik})^2 (a_{ii}^{x_0}(x(B\,y)))^2, \end{aligned}$$

falls y so nahe an Null gewählt wird, daß gilt $|x(B\,y) - x_0| \leqq \delta$. Entsprechend erhält man für die Matrizen $O'\, T'_{x_0} A(x(By))\, Z(y)\, T_{x_0} O$ und

$$O'\, T'_{x_0} Z'(y)\, A(x(By))\, Z(y)\, T_{x_0} O$$

Abschätzungen durch

$$c_1(n)\, p^{-2} P^2 (z_{ik}(y))^2 (a_{ii}^{x_0}(x(By)))^2 \text{ bzw. } c'_1(n)\, p^{-4} P^4 (z_{ik}^2(y))^2 (a_{i}^{x_0}(x(By)))^2.$$

Es ist aber $S(x(y))$ stetig differenzierbar (da $x(y)$ zweimal stetig differenzierbar ist), und also folgt für y mit $|x(y) - x_0| \leqq \delta$ eine Abschätzung der Form $|z_{ik}(y)| \leqq \tau_0 |y|$, wobei τ_0 nur von δ, p, P und den Eigenschaften der Trans-

formation $x = x(y)$ abhängt. Folglich gilt

$$(a_{ik}^{**}(y))^2$$
$$\leq \left[\left(1 + \frac{n-2}{n+1} - \frac{\varepsilon}{n}\right)\left(n - 1 + \frac{n(n-2)}{n+1}\right)^{-1} + c_1''(n, p, P, \delta)\,|y|^2\right](a_{ii}^{x_0}(x(By)))^2.$$

Weiter folgt für $C = ((c_{ik}))$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}|c_{ii}| &\leq n^2 \sqrt{\tau_0}\,|y|\,p^{-1}\,P\,[a_{ik}^{x_0}(x(By))^2]^{1/2}\\ &\leq |y|\,c_1'''(n, p, P, \delta)\,(a_{ii}^{x_0}(x(By)))\end{aligned}$$

und Entsprechendes für die dritte und vierte Matrix auf der rechten Seite der Formel (8.2). Somit hat man schließlich

$$\begin{aligned}a_{ii}^{**}(y) &\geq a_{ii}^{x_0}(x(By)) - |y|\,c_1^{\mathrm{IV}}(n, p, P, \delta)\,a_{ii}^{x_0}(x(By))\\ &= (1 - |y|\,c^{\mathrm{IV}})\,a_{ii}^{x_0}(x(By)).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$a_{ik}^{**}(y)^2 \leq$$
$$\leq \left[\left(1 + \frac{n-2}{n+1} - \varepsilon/n\right)\left((n-1) + \frac{n(n-2)}{n+1}\right)^{-1} + |y|^2 c_1''\right](1 - |y|\,c^{\mathrm{IV}})^{-2}(a_{ii}^{**}(y))^2.$$

Zu jedem ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ läßt sich nun ein $\delta'(\varepsilon, \varepsilon', p, P, \delta)$ bestimmen, so daß für $|y| \leq \delta'$ mit $x(y) \in D$ gilt

$$\left[\left(1 + \frac{n-2}{n+1} - \varepsilon/n\right)\left((n-1) - \frac{n(n-2)}{n+1}\right)^{-1} + |y|^2 c_1''\right](1 - |y|\,c_1^{\mathrm{IV}})^{-2}$$
$$\leq \left(1 + \frac{n-2}{n+1} - \varepsilon'/n\right)\left((n+1) - \frac{n(n-2)}{n+1}\right)^{-1}.$$

Also gilt in $|y| \leq \delta'$, $x(y) \in D$ die $K_{\varepsilon'}'$-Bedingung für die Matrix $A^{**}(y)$ selbst.

Wenn wir jetzt die Transformation $x = x(By)$ schlechthin wieder mit $x = x(y)$ bezeichnen, so können wir sagen: Die Transformation $x = x(y)$ kann so gewählt werden, daß sie neben den zuerst angegebenen Eigenschaften auch noch die folgende besitzt: Zu jedem ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ gibt es eine Halbkugel $|y| \leq \delta'$, $y_1 \geq 0$, so daß nach Transformation auf die neuen Variablen y der Operator L_1 die Gestalt

$$L_1^* = a_{ik}^*(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_k} + b_i^*(y)\frac{\partial}{\partial y_i} + c^*(y)$$

annimmt mit einer Matrix $A^*(y) = ((a_{ik}(y)))$, die für $|y| \leq \delta'$, $y_1 \geq 0$, $x(y) \in D$ der $K_{\varepsilon'}'$-Bedingung genügt.

Man entscheide sich nun für ein festes ε' aus $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, beschreibe um $y = 0$ eine Halbkugel $|y| \leq \eta_0$, $y_1 \geq 0$ mit $\eta_0 \leq \delta'$, die noch ganz in G^* liegt und bezeichne mit G_{x_0} den Bildbereich der Halbkugel $|y| \leq \eta_0/2$, $y_1 \geq 0$ im x-Raum. $|x - x_0| \leq \hat{r}$ sei eine Kugel, deren Durchschnitt mit dem Bereich G_{x_0} übereinstimmt mit ihrem Durchschnitt mit D, und F_{x_0} endlich bestehe aus allen Punkten $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq \hat{r}/2$. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz gibt es dann endlich viele Punkte $\hat{x}^\tau$, $\tau = 1, \ldots, N_1$, auf Γ und endlich viele Kugeln $\mathfrak{K}_\tau : |x - x^\tau| \leq r_\tau$, $\tau = 1, \ldots, N_2$, für die $|x - x^\tau| \leq 3\,r_\tau$

noch ganz in D liegt, so daß die Kugeln $\mathfrak{K}_\tau$, $\tau = 1, \ldots, N_2$ und die Bereiche $F_{\hat{x}\tau}: |x - \hat{x}^\tau| \leq \hat{r}_\tau/2, x \in D$, $\tau = 1, \ldots, N_1$, den abgeschlossenen Bereich D vollständig überdecken.

Wir werden zeigen, daß sowohl in $|x - x^\tau| \leq 2\, r_\tau$ als auch in $G_{\hat{x}^\tau}$ die Abschätzung (7.1) erfüllt ist. In $|x - x^\tau| \leq 2\, r_\tau$ ist dies evident, denn die Voraussetzungen 1), 2), 3a, b, c) von Satz 8 sind erfüllt mit $R = 2\, r_\tau$, $K = r_\tau$, $\delta \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \operatorname{Min}(r_\tau, \delta)$. Also fehlt nur die Betrachtung der $G_{\hat{x}^\tau}$. Wir transformieren zu diesem Ende auf die neuen Koordinaten y und erhalten im y-Raum zwei Halbkugeln $|y| \leq \eta_0/2$, $y_1 \geq 0$ und $|y| \leq \eta_0$, $y_1 \geq 0$ und darin erklärt den Operator L_1^*, und wenn $v(y)$ und $g(y)$ die Transformation von $u(x)$ und $f(x)$ auf die neuen Veränderlichen sind, so folgt $L_1^*(v) = g$. Wir erklären endlich in $|y| \leq \eta_0$, $y_1 \geq 0$ die Funktion $\psi(y) = \varphi(x(\bar{y}))$, wenn $\bar{y}$ die orthogonale Projektion von y auf die Hyperebene $y_1 = 0$ sei. Ersichtlich gilt dann

$$\operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0} (\psi^2, \psi_{|i}^2, \psi_{|ik}^2) \leq c_2 \|\varphi\|_2'^2 ,$$

wobei c_2 nur von den Eigenschaften der Transformation $x(y)$ abhängt. Setzt man $w = \psi - v$, dann folgt

$$L_1^*(w) = h(y) \quad \text{mit} \quad h(y) = L_1^*(\psi) - g(y) \quad \text{in} \quad |y| \leq \eta_0, \quad y_1 \geq 0;$$
$$w(y) = 0 \quad \text{für} \quad y_1 = 0, \quad |y| \leq \eta_0,$$

und es gilt offenbar $\operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0, y_1 \geq 0} |h| \leq c_2' \|\varphi\|_2' + \|f\|$, wobei c_2' nur von der Transformation $x = x(y)$ und den Konstanten M, Q abhängt.

Jetzt werde eine Spiegelung an der Ebene $y_1 = 0$ vorgenommen, und zwar sollen $w(y)$ und $h(y)$ ungerade fortgesetzt werden. Da nach Voraussetzung $w(y) = 0$ ist für $y_1 = 0$, ergibt sich stetige Differenzierbarkeit von $w(y)$ auch auf der Hyperebene $y_1 = 0$. Allein die zweiten Ableitungen können auf $y_1 = 0$ allenfalls springen. Es gilt also $w(y) \in C_2^*$ auch im Bereich $|y| \leq \eta_0$. Werden auch $a_{ik}^*(y), b_i^*(y), c^*(y)$ an der Hyperebene $y_1 = 0$ gespiegelt, und zwar $a_{11}^*(y)$, $a_{\lambda\mu}^*(y)$, $b_\lambda^*(y)$, $\lambda, \mu = 2, \ldots, n$, sowie $c^*(y)$ gerade, dagegen $a_{1\lambda}^*(y)$, $\lambda = 2, \ldots, n$ und $b_1^*(y)$ ungerade, so gilt auch in der ganzen Kugel $|y| \leq \eta_0$ stets $L_1^*(w) = h$. Da die Spiegelung einer orthogonalen Transformation der unabhängigen Veränderlichen gleichkommt, bleibt die K_r'-Bedingung, die sich ja hier gemäß unserer Konstruktion auf die Matrix $A^*(y)$ selbst bezieht, auch für $y_1 \leq 0$ erfüllt und überhaupt gelten die für $y_1 \geq 0$ hergeleiteten Voraussetzungen 1), 3a, b, c) des Satzes 8 mit den gleichen Konstanten auch für $y_1 < 0$. Eine neue Konstante Q', die $b_i^*(y)$ und $c^*(y)$ für $|y| \leq \eta_0$ majorisiert, läßt sich ebenfalls leicht aus den Konstanten Q, m, M, p, P von L_1 und den Eigenschaften der Transformation $x = x(y)$ bestimmen; daher gilt auch Voraussetzung 2).

Es ist also die Abschätzung (7.1) mit $R = \varkappa = \eta_0/2$, $\vartheta = p\, \eta_0/32\, P$ richtig und wegen der Symmetrie der Funktionen w und h gilt auch

$$\operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0/2, y_1 \geq 0} |w| + \operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0/2, y_1 \geq 0} [w_{|i}^2]^{1/2} + H'_{\alpha,\vartheta}(w; |y| \leq \eta_0/2, y_1 \geq 0)$$
$$\leq c_3 \operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0, y_1 \geq 0} |h| + c_3' \operatorname*{Max}_{|y| \leq \eta_0, y_1 \geq 0} |w| ,$$

woraus man nach Zerspaltung von w in seine Bestandteile v und ψ folgert:

$$\underset{|y|\leq\eta_0/2,\,y_1\geq 0}{\operatorname{Max}} |v| + \underset{|y|\leq\eta_0/2,\,y_1\geq 0}{\operatorname{Max}} [v_{|i}^{2}]^{1/2} + H'_{\alpha,\vartheta}(v;|y|\leq\eta_0/2,\,y_1\geq 0)$$
$$\leq c_4 \underset{|y|\leq\eta_0/2,\,y_1\geq 0}{\operatorname{Max}} |v| + c'_4 \|\varphi\|'_2 + c''_4 \|f\| .$$

Man kann nun auf die alten Variablen x zurücktransformieren und erhält für $u(x)$ im Bereich $G_{\hat{x}^\tau}$ die Abschätzung

$$\underset{x\in G_{\hat{x}^\tau}}{\operatorname{Max}} |u| + \underset{x\in G_{\hat{x}^\tau}}{\operatorname{Max}} [u_{|i}^{2}]^{1/2} + H'_{\alpha,\vartheta'}(u;G_{\hat{x}^\tau}) \leq c_5 \|u\| + c'_5 \|\varphi\|'_2 + c''_5 \|f\| .$$

In dieser ist definiert

$$\vartheta' = \vartheta \quad \underset{\substack{y^1+y^2,\,|y^1-y^2|\leq\vartheta\\ |y^i|\leq\eta_0/2,\,y_1^i\geq 0,\,i=1,2.}}{\text{untere Grenze}} \frac{|x(y^1)-x(y^2)|}{|y^1-y^2|} .$$

Man zeigt leicht, daß ϑ' positiv ist, es folgt dies daraus, daß die Transformation $x = x(y)$ umkehrbar eindeutig vorausgesetzt wurde. In den Kugeln $|x - x^\tau| \leq 2\,r_\tau$ hat man entsprechend

$$\underset{|x-x^\tau|\leq 2r_\tau}{\operatorname{Max}} |u| + \underset{|x-x^\tau|\leq 2r_\tau}{\operatorname{Max}} [u_{|i}^{2}]^{1/2} + H'_{\alpha,\vartheta_\tau}(u;|x-x^\tau|\leq 2\,r_\tau) \leq c_6 \|u\| + c'_6 \|f\| ,$$

was unmittelbar aus Ungleichung (7.1) mit $R = 2\,r_\tau$, $k = r_\tau$, $\vartheta_\tau = p/16\,P(\operatorname{Min}(\delta, r_\tau))$ folgt. Indem man mit ϑ'' das Minimum aller ϑ_τ, $\tau = 1, \ldots, N_2$ und aller Zahlen $\hat{\vartheta}_\tau = \operatorname{Min}(\vartheta, \hat{r}_\tau/2)$, $\tau = 1, \ldots, N_1$, bezeichnet, folgt schließlich in jedem $G_{\hat{x}^\tau}$ und jedem $|x - x_\tau| \leq 2\,r_\tau$ die Ungleichung

$$\operatorname{Max} |u| + \operatorname{Max} [u_{|i}^{2}]^{1/2} + H'_{\alpha,\vartheta''}(u) \leq c_7 \|u\| + c'_7 \|\varphi\|'_2 + c''_7 \|f\| .$$

Da nun schon die $F_{\hat{x}^\tau}$ und die $|x - x^\tau| \leq r_\tau$ miteinander ganz D überdecken, liegen je zwei Punkte aus D mit einem Abstand kleiner als ϑ'' voneinander stets in mindestens einem $G_{\hat{x}^\tau}$ oder $|x - x^\tau| \leq 2\,r_\tau$ gemeinsam.

Also ergibt sich

$$\|u\|_1 + H_{\alpha,\vartheta''}(u;D) \leq c_8 \|u\| + c'_8 \|\varphi\|'_2 + c''_8 \|f\| ,$$

und so hat man abschließend

$$\|u\|_{1+\alpha} \leq c_9 \|u\| + c'_9 \|\varphi\|'_2 + c''_9 \|f\| ,$$

also die Aussage des Satzes 9.

Wenn schließlich über die Voraussetzungen von Satz 9 hinaus für den Operator L_1 noch gilt

$$c(x) \leq 0, \; f(x) = 0 \qquad \text{für } x \in D$$

und wenn, wie wir es für den Beweis des Existenzsatzes von § 4 voraussetzen können, die Koeffizienten $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ stetig sind, dann können wir das Maximumprinzip anwenden [4] und aus (8.1) die Abschätzungen

$$\|u\|_{1+\alpha} \leq c_{10} \|\varphi\|'_2 ,$$

also die in § 4 zum Beweis des Existenzsatzes noch benötigte a priori-Abschätzung folgern, bei welcher die Konstante c_{10} nicht mehr vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten $a_{ik}(x)$ abhängt. Der Existenzsatz ist also damit bewiesen.

Literatur

[1] Bers-Bochner-John: Partial Differential Equations. Ann. of Math. Studies Nr. 33. Princeton 1954. — [2] Giraud, G.: Sur certaines problèmes nonlinéaires de Neumann. Ann. Sci. Ec. norm. sup. **49**, 245—309 (1932). — [3] Heinz, E.: Über die Eindeutigkeit des Cauchyschen Anfangswertproblems. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1955. — [4] Hopf, E.: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Berlin **1927**, 145. — [5] Leray-Schauder: Topologie et équations fonctionelles. Ann. Sci. Ec. norm. sup. **51**, 45—78 (1934). — [6] Morrey, C. B.: On the Solutions of Quasilinear Elliptic Partial Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [7] Nirenberg, L.: On nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Hölder-continuity. Commun. Pure Appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [8] Radó, T.: Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Acta Lit. Sci. Regiae Univ. Hungar. Sectio Sci. Math. Szeged **1924—26**, 228—253. — [9] Schauder, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934).

(Eingegangen am 19. Dezember 1955)

Lamprecht, E.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 313—335 (1956)

Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper. I*)

Von

Erich Lamprecht in Würzburg

1. Problemstellung und Einleitung

Ein Körper A heiße algebraischer Funktionenkörper von n Veränderlichen über einem Teilkörper k, wenn A durch Adjunktion endlich vieler Elemente zu k entsteht (endlich-erzeugbar ist) und zugleich vom Transzendenzgrad n über k ist; ist zusätzlich k in A algebraisch-abgeschlossen, d. h. sind alle über k algebraischen Elemente aus A schon in k enthalten, so sagen wir abkürzend, A sei ein AFn über k. Ist K ein Teilkörper des AFn A über k mit $A \supset K \supset k$, der in A algebraisch-abgeschlossen ist und der über k vom Transzendenzgrad $m < n$ ist, so sagen wir abkürzend, K sei ein TKm für A über k.

Ausgangspunkt dieser Untersuchungen ist eine bewertungstheoretische Definitionsvorschrift für Zetafunktionen zu Körpern, die algebraische Funktionenkörper von $n \geqq 0$ Veränderlichen über ihrem Primkörper sind[1]); speziell für Körper A der Stufe 2[2]) ergibt sich diese Vorschrift aus dem nachstehenden Schema.

Die Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$. Es sei A ein $AF1$ über K_1 und x_i ein über K_1 transzendentes Element aus A. Jede diskrete 1-rangige Exponentenbewertung $v_{\mathfrak{p}_1}$ von K_1 ($\mathfrak{p}_1$ sei der zugehörige Primdivisor) kann zunächst eindeutig als Funktionalbewertung $v_{\mathfrak{P}'_{1i}}$ bezüglich x_i auf $K_1(x_i)$ fortgesetzt werden (vgl. [5a], S. 133ff.); der zugehörige Primdivisor von $K_1(x_i)$ sei $\mathfrak{P}'_{1i}$. $v_{\mathfrak{P}'_{1i}}$ hat in der endlich-algebraischen Erweiterung A von $K_1(x_i)$ mindestens eine und höchstens endlich viele Fortsetzungen $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$, die diskrete 1-rangige Bewertungen von A sind. Somit werden jedem $\mathfrak{p}_1$ von K_1 endlich viele durch x_i eindeutig bestimmte Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ zugeordnet.

Zetafunktionen eines Körpers der Stufe 2. Ist A von der Stufe 2, so ist K_1 entweder ein endlich-algebraischer Zahlkörper oder ein $AF1$ über einem Galoisfeld k. Ausgehend von allen diskreten $\mathfrak{p}_1$ von K_1 erhält man nach obigem Schema ein durch x_i eindeutig bestimmtes System $B(K_1, x_i)$ von Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ von A. Die Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$[3]) sind für alle

*) Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für Unterstützung bei der Durchführung dieser Untersuchungen zu Dank verpflichtet.

1) Vgl. [3b, c], [5b], [7a, b], [9a]; Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis dieser Arbeit.

2) Ist der Primkörper ein Galoisfeld, so ist die Stufe gleich dem Transzendenzgrad n; ist der Primkörper der rationale Zahlkörper, so ist $n + 1$ die Stufe des Körpers.

3) Mit $A\mathfrak{P}_{1i}$ bezeichnen wir den Restklassenkörper A modulo $\mathfrak{P}_{1i}$ und entsprechend später mit $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ die Restklasse eines Elementes $\xi \in A$ modulo $\mathfrak{P}_{1i}$, wobei $\xi\mathfrak{P}_{1i} = \infty$ gesetzt wird, falls ξ nicht im zugehörigen Bewertungsring $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ liegt.

$\mathfrak{P}_{1i} \in B(K_1, x_i)$ *AF1* über einem Galoisfeld, besitzen also eindeutig bestimmte Zetafunktionen $Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$. Wir definieren dann durch

$$(1.1) \qquad Z_A(s; K_1, x_i) = \prod_{\mathfrak{P}_{1i} \in B(K_1, x_i)} Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$$

die arithmetische Zetafunktion von A bezüglich der „Erzeugung" (K_1, x_i).

Da man bei Zugrundelegung verschiedener „Erzeugungen" (K_1, x_i) von A im allgemeinen verschiedene Zetafunktionen erhält (vgl. die Beispiele in [7b]), interessieren Gesetzmäßigkeiten, die diese Abhängigkeit der Zetafunktion von der „Erzeugung" beschreiben, und ob es eine (oder endlich viele) ausgezeichnete Zetafunktionen solcher Körper gibt[4]). Weiter kann man fragen, welche arithmetischen und algebraischen Beschreibungen bzw. Aussagen durch die in die Definition der Zetafunktionen eingehenden Bewertungen ermöglicht werden (vgl. hierzu auch [7a], *4.2*).

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß A ein *AF2* über einem Galoisfeld k ist, und beginnen in dieser Note mit der Untersuchung der Frage, welche Folgerungen aus den Eigenschaften des Systems der Bewertungen von $B(K_1, x_i)$ auf die Struktur der zugehörigen Zetafunktionen gezogen werden können. Dabei setzen wir vorerst viel allgemeiner voraus, daß k ein beliebiger Körper, A ein *AF2* über k und K_1 ein *TK1* für A über k sei; unter $B(K_1, x_i)$ verstehen wir wie oben das System derjenigen $\mathfrak{P}_{1i}$, das man erhält, wenn man von allen $\mathfrak{p}_1$ von K_1 über k ausgeht (erst bei den Anwendungen auf die Zetafunktionen werden wir zusätzlich voraussetzen, daß k ein Galoisfeld ist).

Neben Eigenschaften des Systems $B(K_1, x_i)$ werden wir untersuchen, welche Beziehungen zwischen der Arithmetik des *AF1* A über K_1 und der seiner homomorphen Bilder $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ für $\mathfrak{P}_{1i} \in B(K_1, x_i)$, den *Konstantenreduktionen von* A[5]), bestehen. Es zeigen sich hierbei weitgehende Parallelen zwischen diesen Konstantenreduktionen und den *Konstantenerweiterungen*, der anderen Konstantenoperation eines *AF1*; Eigenschaften eines *AF1*, die sich unter gewissen Voraussetzungen auf alle Konstantenerweiterungen übertragen, gelten unter den gleichen Voraussetzungen für „fast alle" $\mathfrak{P}_{1i}$ in den zugehörigen Konstantenreduktionen.

Über die $\mathfrak{P}_{1i}$ und die Konstantenreduktionen waren bis jetzt unter der zusätzlichen Annahme, daß x_i *separierende Variable* für A über K_1 ist (d. h. A über K_1 separabel erzeugbar), folgende Aussagen bekannt (vgl. etwa Deuring [3a]):

(D_1) Für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ ist $\mathfrak{P}_{1i}$ träge über $\mathfrak{P}'_{1i}$, d. h. unverzweigt und unzerlegt.

(D_2) Für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ ist $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ der genaue Konstantenkörper von $A\mathfrak{P}_{1i}$ (als *AF1* über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$).

[4]) Auf die Möglichkeit, durch Abänderung der Beiträge für endlich viele $\mathfrak{P}_{1i}$ in (1.1) zu einer invarianten Zetafunktion zu kommen, gehen wir zunächst nicht ein (vgl. diesbezügliche Ansätze in [3c]).

[5]) $A\mathfrak{P}_{1i}$ ist algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$, d. h. eine durch Konstantenoperationen bestimmte homomorphe „Verkleinerung" von A über K_1.

(D_3) Für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ ist das Geschlecht $g(A/K_1)$ von A über K_1 gleich dem Geschlecht $g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i})$ von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$.

Um die Untersuchungen weitgehend frei von Beschränkungen durch Separabilitätsvoraussetzungen zu halten, werden wir zunächst keine dieser drei Aussagen zugrunde legen; vielmehr wird später eine (D_1) und (D_2) stark verallgemeinernde Aussage hergeleitet. — Wie in 5. gezeigt wird, gilt (D_3) unter den angegebenen Voraussetzungen nicht allgemein (vgl. auch diesbezügliche Bemerkungen in [3c]).

In 2. wird der hier benutzte Begriff der „Erzeugung" (K_1, x_i) durch einen allgemeineren körpertheoretischen Erzeugungsbegriff ersetzt und gezeigt (Satz 1), daß die Bewertungssysteme $B(K_1, x_i)$ diesen allgemeineren Erzeugungen invariant zugeordnet sind (dies bedeutet ihre Invarianz bei einer Klasse von birationalen Transformationen). Ein Satz über das Erhaltenbleiben von Transzendenzeigenschaften von Elementen bei Restabbildung mod$\mathfrak{P}_{1i}$ (Satz 2), Transformationsregeln für den Übergang von einem Bewertungssystem zu einem anderen (Satz 3) sowie Folgerungen für die Struktur der in einem *AF 2* enthaltenen *AF 1* bilden den Inhalt von 3. — Einführendes über die Restabbildung von Divisoren und ein grundlegender Satz über die „Verlagerung" der Grade von Relativerweiterungen (Satz 4 und Korollare) sind in 4. enthalten. In 5. werden Kriterien für die Erhaltung bzw. Änderung des Geschlechts bei Konstantenreduktion angegeben.

Folgerungen aus diesen Überlegungen auf die Struktur der arithmetischen Zetafunktionen (Spezialfall: k = Galoisfeld) werden in 6. angegeben. Eine Transformationsregel für die Zetafunktionen bei Erzeugungswechsel (Satz 5) z. B. garantiert, daß ein wesentlicher Bestandteil der Zetafunktion zumindest Invariante für A als *AF1* über einem *TK1* K_1 ist. Die Invarianz der Zetafunktion bei rein inseparablen Erweiterungen (Satz 6) gestattet es, Separabilitätsvoraussetzungen bei der Berechnung der Zetafunktionen weitgehend zu eliminieren.

Diese Untersuchungen sind ein erster nur einfache Hilfsmittel aus der Algebra und Bewertungs- bzw. Idealtheorie verwendender Schritt in Richtung auf das in [7a], *4.2* angedeutete Programm. Auf weitere Fragestellungen aus [7a], § 4 soll in den geplanten Fortsetzungen dieser Note eingegangen werden.

2. Algebraische Erzeugungen

Es sei k ein beliebiger Körper und A ein *AF2* über k. Der in 1. erwähnte „Erzeugungsbegriff" (K_1, x_i), d. h. die Auszeichnung eines *TK1* K_1 und eines über K_1 transzendenten Elementes $x_i \in A$, soll zunächst durch einen etwas allgemeineren Begriff ersetzt werden.

Definition 1. *Sind K_1 und $K_i \neq K_1$ zwei TK1 für A über k, so nennen wir das geordnete Paar (K_1, K_i) eine algebraische Erzeugung (kurz: Erzeugung) von A über k*[6]).

[6]) Da K_1 und K_i in A algebraisch-abgeschlossene *AF1* über k sind und da $K_1 \neq K_i$ ist, ist notwendig $K_1 \cap K_i = k$, d. h. jedes $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$ ist transzendent über K_1.

Dieser algebraische Erzeugungsbegriff (K_1, K_i) ist im folgenden Sinn zu verstehen: 1. A werde über k als Körperturm

$$k \subset K_1 \subset A \tag{2.1}$$

erzeugt, und 2. die Erzeugung von A über K_1 geschehe durch Adjunktion eines (über K_1 transzendenten) Elementes $x_i \in K_i$, $x_i \notin k$ zu K_1 und anschließende endlich-algebraische Erweiterung (zu A). Gemäß dieser Interpretation können jeder algebraischen Erzeugung (K_1, K_i) unendlich viele der provisorischen Erzeugungen (K_1, x_i) aus 1. zugeordnet werden nach dem Schema

$$(K_1, x_i) \to (K_1, K_i), \text{ falls } x_i \in K_i,\ x_i \notin k\,. \tag{2.2}$$

Invarianten einer algebraischen Erzeugung von A über k sind Bildungen, die nur von der Angabe des geordneten Paares (K_1, K_i) abhängen, d. h. unabhängig von der Erzeugung von K_1 über k und der Auswahl von x_i aus K_i sind; sie sind also invariant bei birationalen Transformationen von K_1 in sich und bei solchen von K_i in sich. Einer algebraischen Erzeugung (K_1, K_i) ist somit eine Vielzahl von erzeugenden Gleichungen für A über k zugeordnet[7]). Im Spezialfall, daß A ein *AF1* über k ist, liefert die sinngemäße Einschränkung der Erzeugungsinvarianz, da dann A mit K_1 zusammenfällt, die volle birationale Invarianz für *AF1*; die Erzeugungsinvarianz ist somit eine echte Verallgemeinerung derselben auf *AF2*.

Durch eine Erzeugung (K_1, K_i) ist eindeutig der durch Adjunktion aller Elemente von K_i zu K_1 entstehende Körper $K_{1i} = K_1(K_i)$ bestimmt; da $K_{1i} = k(K_1, K_i)$, ist in dieser Bezeichnungsweise $K_{1i} = K_{i1}$. Wegen $A \supseteqq K_{1i} \supseteqq K_1(x_i)$ für $x_i \in K_i$, $x_i \notin k$, ist K_{1i} endlich-erzeugbar und vom Transzendenzgrad 1 über dem in K_{1i} algebraisch-abgeschlossenen Körper K_1, d. h. K_{1i} ist ein *AF1* über K_1 und als solcher gleich der Konstantenerweiterung von K_i über k mit K_1; das Entsprechende gilt für K_{1i} über K_i. Somit ist

$$K_{1i} = K_{i1} = K_1 \cdot K_i \tag{2.3}$$

das unabhängige Kompositum von K_1 und K_i über k und heiße *der zur Erzeugung (K_1, K_i) gehörige Doppelkörper.*

Verstehen wir die Separabilität einer beliebigen Körpererweiterung im Sinne von Chevalley (vgl. [2], S. 79ff.), bei endlich-erzeugbaren Erweiterungen ist dann Separabilität mit separabler Erzeugbarkeit gleichwertig, so werden durch diese Untersuchungen die nachstehenden Bezeichnungen nahegelegt.

Definition 2. *Ein TK1 K_1 von A über k heiße separabel, falls K_1 über k separabel ist, er heiße separierend, falls A über K_1 separabel ist. Eine Erzeugung (K_1, K_i) heiße separabel bzw. separierend, wenn K_1 separabler bzw. separierender TK1 ist; eine separierende Erzeugung (K_1, K_i) heiße stark separierend, wenn zusätzlich in K_i ein für A über K_1 separierendes Element x_i existiert.*

---

[7]) Allerdings ist bei unseren Erzeugungen zu beachten, daß eine feste Numerierung, d. h. eine vorgegebene Reihenfolge der Adjunktion, wesentlich eingeht.

Diese Begriffe stehen naturgemäß in enger Beziehung zur Separabilität von A über k (beachte, wenn k vollkommen ist, ist A stets separabel über k): Ist A über k separabel, so ist auch jeder *TK1* von A über k separabel; ist A über k nicht separabel, so kann ein separabler *TK1* nicht gleichzeitig separierend sein. — Existiert ein separabler separierender *TK1* K_1 für A über k, so ist A über k separabel und es gibt eine (separable) stark separierende Erzeugung, in der K_1 erste Komponente ist; ist dabei x_i separierende Variable für A über K_1 und x_1 separierende Variable für K_1 über k, so ist wegen der Separabilität von K_1 über $k(x_1)$ auch $K_1(x_i)$ über $k(x_1, x_i)$ separabel, und wegen der Separabilität von A über $K_1(x_i)$ ist A über $k(x_1, x_i)$ separabel und endlich-algebraisch. — Ist andererseits A über k separabler *AF2*, d. h. von der Form $A = k(x_1, x_i, y)$, wobei y separabel und algebraisch über $k(x_1, x_i)$ ist, und ist K_1 der $k(x_1)$ enthaltende *TK1*, so ist A auch separabel über $K_1(x_i)$, d. h. K_1 ist ein separabler separierender *TK1*. Da $K_1(x_i) \subseteq K_{1i} = K_1 \cdot K_i \subseteq A$ $(x_i \in K_i)$, ist A über K_{1i} separabel, und wegen der Separabilität von $K_{1i} = K_1 \cdot K_i$ über K_1 und über K_i ist K_i ebenfalls separierender *TK1* und (K_1, K_i) und (K_i, K_1) sind stark separierende separable Erzeugungen.

Lemma 1. *Die Separabilität eines AF2 A über k ist äquivalent der Existenz eines separablen separierenden TK1 K_1 und der einer separablen stark separierenden Erzeugung (K_1, K_i) für A über k. Mit (K_1, K_i) ist auch (K_i, K_1) separabel und stark separierend; ferner ist A über $K_{1i} = K_1 \cdot K_i$ separabel algebraisch und es gibt Elemente $x_1 \in K_1, x_i \in K_i$, so daß A separabel und endlich-algebraisch über $k(x_1, x_i)$ ist.*

Daß andererseits nicht jedes Paar separabler separierender *TK1* eine separable und stark separierende Erzeugung liefert, zeigt das folgende *Gegenbeispiel:*

Es sei k ein Galoisfeld der Charakteristik p (also vollkommen) und $A = k(x_1, x_2, x_3)$ mit der erzeugenden Gleichung

$$x_1^p - x_2(x_3 + 1) = 0. \tag{2.4}$$

Die Teilkörper $K_i = k(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ sind in A algebraisch abgeschlossen, da (2.4) in K_i absolut irreduzibel ist. Alle drei *TK1* K_i sind separabel und auch separierend, da A sowohl über K_{12} als auch über K_{13} separabel algebraisch ist (Relativgrad $= 1$). Obwohl K_2 und K_3 separable und separierende *TK1* sind, ist A über $K_{23} = k(x_2, x_3)$ rein inseparabel, d. h. (K_2, K_3) keine stark separierende Erzeugung.

Somit ist bei separablem A über k die Beschränkung auf stark separierende Erzeugungen eine (völlig invariant formulierbare) im allgemeinen echte Einschränkung unter der Vielzahl der möglichen Erzeugungen. — Ist A über k separabel, so ist für jede Erzeugung (K_1, K_i) K_{1i} über K_1, K_i und k separabel; durch Adjunktion aller über K_{1i} separablen Elemente von A zu K_{1i} entsteht ein über k separabler *AF2* $A_{1i} \supseteq K_{1i}$, über dem A rein inseparabel ist. A_{1i} heiße die *separable Abschließung* und der (endliche) Grad $[A : A_{1i}]$ der *Inseparabilitätsindex der Erzeugung* (K_1, K_i). Nach Lemma 1 ist $[A : A_{1i}] = 1$ (d. h. $A = A_{1i}$) äquivalent damit, daß (K_1, K_i) eine stark separierende Erzeugung ist.

Falls A über k nicht separabel ist und (K_1, K_i) eine Erzeugung von A über k ist, werden wir neben K_{1i} noch Hilfskörper der folgenden Art gelegentlich verwenden: Wir wählen einen in K_i enthaltenen und in K_i separabelabgeschlossenen über k separablen *AF1* $K_{i(s)}$ aus (ein solcher existiert, ist aber im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt); wir bilden den in K_{1i} enthaltenen Doppelkörper $K_{1i(s)} = K_1 \cdot K_{i(s)}$, der über K_1 separabler *AF1* ist.

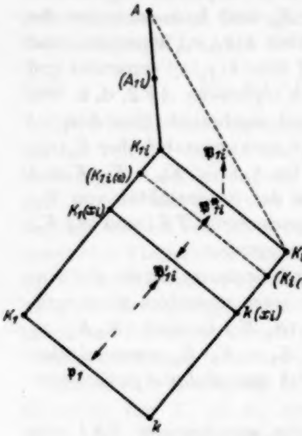

Fig. 1

Es sei nun wieder A ein *AF2* über k ohne jegliche Separabilitätsvoraussetzungen; K_1 sei ein *TK1* für A über k, x_i ein über K_1 transzendentes Element aus A und K_i der $k(x_i)$ enthaltende *TK1*. Wir wollen zeigen, daß das System $B(K_1, x_i)$ der $\mathfrak{P}_{1i}$, d. h. die Gesamtheit der Fortsetzungen bezüglich x_i aller $\mathfrak{p}_1$ von K_1 über k, nur von der Erzeugung (K_1, K_i), die gemäß (2.2) (K_1, x_i) zugeordnet ist, nicht aber von der speziellen Auswahl von x_i aus K_i abhängt.

Die Fortsetzungen $v_{\mathfrak{P}'_{1i}}$ der $v_{\mathfrak{p}_1}$ bezüglich x_i auf $K_1(x_i)$ (vgl. 1.) bewerten $k(x_i)$ identisch und sind also diskrete (1-rangige) Bewertungen des *AF1* $K_1(x_i)$ über $k(x_i)$. Die Fortsetzungen $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ dieser $v_{\mathfrak{P}'_{1i}}$ auf die endlich-algebraische Erweiterung A von $K_1(x_i)$ sind unabhängig von der Einschiebung von Zwischenkörpern zwischen A und $K_1(x_i)$ und zugehöriger schrittweiser Fortsetzung. Wir setzen die $v_{\mathfrak{P}'_{1i}}$ zunächst auf die endlich-algebraische Erweiterung $K_{1i} \subseteq A$ von $K_1(x_i)$ fort und erhalten so Bewertungen $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ von K_{1i} über $k(x_i)$; die Fortsetzungen der $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ auf A liefern die Gesamtheit der $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ (vgl. Fig. 1).

Die $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ bewerten mit $k(x_i)$ auch seine algebraische Abschließung K_i in K_{1i} identisch, d. h. sie sind Bewertungen des *AF1* K_{1i} über K_i. Da die $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ in K_1 die ursprüngliche Bewertung $v_{\mathfrak{p}_1}$ induzieren und da es bei der Konstantenerweiterung von K_1 über k mit K_i zu K_{1i} über K_i jeweils zu einem $v_{\mathfrak{p}_1}$ nur genau eine Fortsetzung in K_{1i} über K_i gibt (vgl. [2], S. 92–96), sind die $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ gerade die Fortsetzungen der $v_{\mathfrak{p}_1}$ im Sinne der Konstantenerweiterung mit K_i; somit liegt über jedem $\mathfrak{p}_1$ genau ein $\mathfrak{P}^*_{1i}$, d. h. $\mathfrak{p}_1 \leftrightarrow \mathfrak{P}^*_{1i}$, und die $\mathfrak{P}^*_{1i}$ sind unabhängig von der Auszeichnung des $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$.

Da die $\mathfrak{P}_{1i}$ von A über K_i mit den Fortsetzungen aller $\mathfrak{P}^*_{1i}$ von K_{1i} über K_i übereinstimmen, sind auch die $\mathfrak{P}_{1i}$ von der Auszeichnung des Elementes $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$ unabhängig. Somit hängt die Gesamtheit $B(K_1, x_i)$ der $\mathfrak{P}_{1i}$ nur von dem geordneten Paar der *TK1* K_1 und K_i ab, d. h. ist eine Invariante der algebraischen Erzeugung (K_1, K_i); wir schreiben deshalb fortan abkürzend B_{1i} für $B(K_1, x_i)$. — Natürlich braucht zwischen den $\mathfrak{P}^*_{1i}$ und den $\mathfrak{P}_{1i}$

keine eineindeutige Zuordnung mehr zu bestehen, denn bei der endlich-algebraischen Erweiterung von K_{1i} zu A können die $\mathfrak{P}^*_{1i}$ jeweils in endlich viele $\mathfrak{P}_{1i}$ zerlegt sein; ferner ist durch diese Überlegungen die Abhängigkeit von B_{1i} von der Transzendenten x_i nicht vollkommen befreit, sondern nur eingeengt, denn bei Ersetzung der zweiten Komponente K_i durch einen anderen *TK1* $K_j \neq K_1$ kann man ein anderes System B_{1j} erhalten.

Satz 1. *Das System B_{1i} der Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ ist eine Invariante der Erzeugung (K_1, K_i) von A über k, d. h. die $\mathfrak{P}_{1i}$ hängen nicht von der speziellen Auswahl eines $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$ ab; die $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ für $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ sind Bewertungen des AF1 A über K_i und ihre Einschränkungen $v_{\mathfrak{P}^*_{1i}}$ auf den Doppelkörper $K_{1i} = K_1 \cdot K_i$ sind die Fortsetzungen der $v_{\mathfrak{p}_1}$ von K_1 über k bezüglich der Konstantenerweiterung mit K_i und entsprechen den $v_{\mathfrak{p}_1}$ umkehrbar eindeutig.*

Nach Satz 1 hängt alles Weitere über Konstantenreduktionen und die Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ nur noch von den algebraischen Erzeugungen (K_1, K_i) ab, was die Zweckmäßigkeit dieser Begriffsbildung bestätigt.

3. Restabbildungen von Elementen und Teilkörpern

Es sei weiter (K_1, K_i) eine algebraische Erzeugung eines *AF2* A über k und B_{1i} das System der zugehörigen Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$. Die Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$ enthalten jeweils den zu K_i isomorphen Teilkörper $K_i\mathfrak{P}_{1i}$, sind also endlich-erzeugbare Erweiterungen vom Transzendenzgrad 1 über dem isomorphen Bild $k\mathfrak{P}_{1i}$ von k; somit sind alle $A\mathfrak{P}_{1i}$ *AF1* über einem Konstantenkörper, der entweder gleich dem homomorphen Bild $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ von K_1 oder über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ und damit auch über $k\mathfrak{P}_{1i}$ endlich algebraisch ist. — Wir untersuchen zunächst, wann die Restabbildung $y\mathfrak{P}_{1i}$ eines Elementes $y \in A$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ eine Konstante (bzw. ∞), d. h. wann $y\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ algebraisch ist, und wann es transzendent (über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$) ist.

Ist $y \in K_1$, so ist für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ entweder $y\mathfrak{P}_{1i} \in K_1\mathfrak{P}_{1i}$ oder $y\mathfrak{P}_{1i} = \infty$. — Für jedes $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$ und für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ ist $x_i\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent, da $K_i\mathfrak{P}_{1i}$ isomorphes Bild von K_i ist; folglich gibt es keine nichttriviale Gleichung $f(X)$ mit über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ algebraischen Koeffizienten, so daß $f(x_i\mathfrak{P}_{1i}) = 0$. Wir zeichnen jetzt ein festes solches x_i als Hilfselement aus.

Sei nun $y \in A$ aber $y \notin K_1$, d. h. y transzendent über K_1, so ist y sicher über $K_1(x_i)$ algebraisch, d. h. genügt einer Gleichung

$$(3.1) \qquad 0 = f(y, x_i) = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu}\, y^\mu\, x_i^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(y)\, x_i^\nu \qquad (a_{\nu\mu} \in K_1),$$

wobei mindestens eine x_i-Potenz wirklich auftritt, d. h. mindestens ein Polynom $g_\nu(y) \neq 0$ für $\nu \geq 1$ ist. Da ein von 0 verschiedenes Element aus A nur endlich viele $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ als Pol oder Nullstelle haben kann, werden mit den Polen und Nullstellen der endlich vielen $g_\nu(y) \neq 0$ in B_{1i} nur endlich viele $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ ausgeschlossen. Somit ist *für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ zu jedem $g_\nu(y) \neq 0$* auch $g_\nu(y)\,\mathfrak{P}_{1i} \neq 0$ aus $A\mathfrak{P}_{1i}$. Wäre nun $y\mathfrak{P}_{1i}$ algebraisch über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ für eines dieser $\mathfrak{P}_{1i}$, so wären auch die $g_\nu(y)\mathfrak{P}_{1i}$ algebraisch über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ und es folgte, daß $x_i\mathfrak{P}_{1i}$ einer Gleichung mit über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ algebraischen Koeffizienten

genügte; dies ist ein Widerspruch zur obigen Feststellung. Folglich ist für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ $y\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$; die Gesamtheit dieser fast allen $\mathfrak{P}_{1i}$ sei mit $B_{1i}(y)$ bezeichnet.

Wir erhalten somit ohne jegliche Separabilitätsvoraussetzungen den nachstehenden *Restabbildungssatz*.

Satz 2. *Ist B_{1i} das zur Erzeugung (K_1, K_i) des AF2 A über k gehörende System von Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ und y ein Element von A, so ist $y\mathfrak{P}_{1i} \in K_1\mathfrak{P}_{1i}$ (konstant) bzw. $y\mathfrak{P}_{1i} = \infty$ für alle $\mathfrak{P}_{1i}$, falls $y \in K_1$ ist, und es ist $y\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$, nämlich für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(y)$, falls $y \notin K_1$ ist.*

Dieser für alle anschließenden Untersuchungen grundlegende Satz[8]) gestattet es, sofort eine Reihe von Folgerungen für die Restabbildung von Teilkörpern zu ziehen.

Bei der obigen Bedeutung von A, k, K_1, K_i und B_{1i} sei $x_j \notin K_1$ ein Element von A; für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$, nämlich alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(x_j)$, ist $x_j\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ und somit auch über $k\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent. Ist $f(x_j) \in k[x_j]$, $f(x_j) \notin k$, so ist für jedes $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(x_j)$ $f(x_j)\mathfrak{P}_{1i} \neq 0$ sogar keine Konstante in $A\mathfrak{P}_{1i}$, d. h. $f(x_j)\mathfrak{P}_{1i} \notin k\mathfrak{P}_{1i}$; folglich ist für jedes $\xi \neq 0$ aus $k(x_j)$ $\xi\mathfrak{P}_{1i} \neq 0$ aus $A\mathfrak{P}_{1i}$, d. h. $k(x_j)\mathfrak{P}_{1i}$ ist isomorphes Bild von $k(x_j)$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ und $k(x_j)$ wird durch $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ identisch bewertet. Mit $k(x_j)$ wird auch jede endlich-algebraische Erweiterung von $k(x_j)$ in A und insbesondere auch der $k(x_j)$ umfassende *TK1* K_j durch $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(x_j)$ identisch bewertet; ferner ist für diese $\mathfrak{P}_{1i}$ $K_j\mathfrak{P}_{1i}$ isomorphes Bild von K_j in $A\mathfrak{P}_{1i}$ und $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ ist zugleich Bewertung des *AF1* A über K_j.

Da mit dem obigen willkürlichen x_j auch jedes andere $x'_j \in K_j$ mit $x'_j \notin k$ durch alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(x_j)$ auf ein über $k\mathfrak{P}_{1i}$ transzendentes Element abgebildet wird, kann $B_{1i}(x_j)$ auch charakterisiert werden als Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$, für die $K_j\mathfrak{P}_{1i}$ ein zu K_j isomorpher Teilkörper von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\mathfrak{P}_{1i}$ ist; wir können somit die Bezeichnungsweise abändern zu

$$B_{1i}(K_j) = B_{1i}(x_j) \quad \text{für} \quad x_j \in K_j,\ x_j \notin k \ \text{und}\ K_j \neq K_1\,, \tag{3.2}$$

d. h. dieses Teilsystem von B_{1i} in elementfreier Weise erklären, und erhalten das

Korollar zu Satz 2. *Die Gesamtheit $B_{1i}(K_j)$ der $\mathfrak{P}_{1i}$ zur Erzeugung (K_1, K_i) des AF2 A über k, für die $K_j\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\mathfrak{P}_{1i}$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ isomorphes Bild des TK1 K_j über k ist, ist gemäß* (3.2) *identisch mit der Gesamtheit der $\mathfrak{P}_{1i}$, für die $x_j\mathfrak{P}_{1i}$ bei beliebigem $x_j \in K_j$, $x_j \notin k$ ein über $k\mathfrak{P}_{1i}$ transzendentes Element ist; $B_{1i}(K_j)$ besteht aus fast allen $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ und alle $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$ sind Bewertungen des AF1 A über K_j.*

Sei weiterhin $K_j \neq K_1$. Wir betrachten die Einschränkungen der $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu den $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$, die Bewertungen von A über K_j sind, im Doppelkörper $K_{1j} = K_1 \cdot K_j$ und bezeichnen sie mit $v_{\mathfrak{P}_{1ij}}$; da A über K_{1j} endlich-algebraisch ist, können jeweils endlich viele der $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ ein und dasselbe $v_{\mathfrak{P}_{1ij}}$ liefern. Die

[8]) Insbesondere wird hiermit im geplanten Teil III dieser Arbeit gezeigt werden, daß das aus Kombination der $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ mit den Bewertungen der Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$ entstehende System 2-rangiger Bewertungen ausreicht, um ein Element von A bis auf einen Faktor aus k eindeutig festzulegen.

$v_{\mathfrak{P}_{1ij}}$ sind Bewertungen von K_{1j} über K_j, die zugleich in K_1 die ursprünglichen Bewertungen $v_{\mathfrak{p}_1}$ induzieren; somit sind sie (vgl. Beweis von Satz 1) Fortsetzungen der $v_{\mathfrak{p}_1}$ von K_1 über k bezüglich der Konstantenerweiterung mit K_j, d. h. vom Typus $v_{\mathfrak{P}^*_{1j}}$. Folglich sind auch alle $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$ gleichzeitig Bewertungen vom Typus $v_{\mathfrak{P}_{1j}}$ zu gewissen $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1j}$, d. h. $B_{1i}(K_j)$ kann mit einem Teilsystem von B_{1j} identifiziert werden (die zugehörigen Bewertungen und damit auch ihre Restklassenkörper sind identisch).

Entsprechend ist das aus fast allen $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1j}$ der Erzeugung (K_1, K_j) bestehende Teilsystem $B_{1j}(K_i)$ für $K_i \neq K_1$ auch ein Teilsystem von B_{1i}. Da die $v_{\mathfrak{P}_{1j}}$ zu $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1j}(K_i) \subseteq B_{1i}$ sowohl K_j als auch K_i identisch bewerten, gilt überdies $B_{1j}(K_i) \subseteq B_{1i}(K_j)$; aus Symmetriegründen gilt auch die Umkehrung $B_{1i}(K_j) \supseteq B_{1j}(K_i)$ und wir erhalten zusammen

$$B_{1i}(K_j) = B_{1j}(K_i), \quad \text{falls } K_1 \neq K_i \text{ und } K_1 \neq K_j. \tag{3.3}$$

Bezeichnen wir mit $S_{1i}(K_j)$ das System der endlich vielen $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$, die K_j nicht isomorph abbilden (die also für K_j „singulär" sind), d. h. die Ergänzungsmenge zu $B_{1i}(K_j)$ in B_{1i}, und erklären wir $S_{1j}(K_i)$ entsprechend, so folgt zusammen mit dem Korollar zu Satz 2 die nachstehende Regel für die Abhängigkeit des Systems B_{1i} von der zweiten Komponente der Erzeugung.

Satz 3. *Sind K_1, K_i und K_j drei voneinander verschiedene TK1 des AF2 A über k, so stimmt das System B_{1i} der zur Erzeugung (K_1, K_i) gehörigen $\mathfrak{P}_{1i}$ mit dem System B_{1j} der zu (K_1, K_j) gehörigen $\mathfrak{P}_{1j}$ bis auf jeweils endlich viele Ausnahmen überein und bei obiger Erklärung der endlichen Primdivisormengen $S_{1i}(K_j)$, $S_{1j}(K_i)$ gilt die Austauschregel*

$$B_{1i} - S_{1i}(K_j) = B_{1i}(K_j) = B_{1j}(K_i) = B_{1j} - S_{1j}(K_i)^{9)}; \tag{3.4}$$

ferner ist ein beliebiger TK1 K_j bei vorgegebener Erzeugung (K_1, K_i) entweder identisch mit K_1 oder aber für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$, nämlich für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$, ist $K_j\mathfrak{P}_{1i}$ zu K_j isomorpher Teilkörper in $A\mathfrak{P}_{1i}$.

Während in Satz 1 die Abhängigkeit des Systems B_{1i} der $\mathfrak{P}_{1i}$ von K_1 und dem Element x_i auf die Abhängigkeit von der Erzeugung (K_1, K_i) zurückgeführt wurde, zeigt Satz 3, wie B_{1i} von der zweiten Komponente K_i der Erzeugung (K_1, K_i) abhängt; bei einem Wechsel der zweiten Komponente sind nur endlich viele $\mathfrak{P}_{1i}$, nämlich die aus $S_{1i}(K_j)$, durch endlich viele andere, nämlich die $\mathfrak{P}_{1j} \in S_{1j}(K_i)$, zu ersetzen und fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ bleiben unverändert. Diese Überlegungen zeigen andererseits, daß sich bei einem Wechsel der ersten Erzeugungskomponente, etwa bei Ersetzung von K_1 durch einen *TK1* $K_2 \neq K_1$, die zugehörigen Primdivisorsysteme in fast allen Primdivisoren unterscheiden, denn während K_2 durch fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ isomorph abgebildet wird, wird K_1 durch kein $\mathfrak{P}_{1i}$ isomorph abgebildet.

Da bei einem Wechsel der zweiten Erzeugungskomponente mit fast allen $\mathfrak{P}_{1i}$ auch fast alle Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$ unverändert bleiben, folgt für die in 1. zitierten Aussagen (D_1), (D_2) und (D_3) das

---

[9]) Mit $B_{1i} - S_{1i}(K_j)$ bezeichnen wir die Differenzmenge der angegebenen Primdivisorenmengen; $B_{1i}(K_j)$ sei wie in (3.2) erklärt.

Korollar 1 zu Satz 3. *Sind bei der Erzeugung* (K_1, K_i) *des AF 2 A über k die Aussagen* (D_2) *bzw.* (D_3) *erfüllt, so auch bei jeder Erzeugung* (K_1, K_j) *mit der gleichen ersten Komponente* K_1; *sind fast alle* $\mathfrak{P}_{1i}$ *über* $K_1(x_i)$ *träge, so sind auch fast alle* $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1j}$ *träge über* $K_1(x_i)$ *und umgekehrt.*

Ist das Primdivisorsystem B_{1i} einer festen Erzeugung (K_1, K_i) von A über k vorgegeben, so ist gemäß Satz 3 jedem *TK1* $K_j \neq K_1$ von A über k eindeutig ein Teilsystem von endlich vielen $\mathfrak{P}_{1i}$ zugeordnet, nämlich das System der Ausnahmeprimdivisoren $S_{1i}(K_j)$ [für $K_j = K_i$ ist dieses System trivialerweise leer; für $K_j = K_1$ könnte man sinngemäß $S_{1i}(K_1) = B_{1i}$ (unendliches System!) setzen]. Die Frage, ob umgekehrt ein *TK1* K_j schon durch $S_{1i}(K_j)$ eindeutig charakterisiert ist, muß auf Grund einfacher Gegenbeispiele[10]) verneint werden.

Die letzte Aussage aus Satz 3 gestattet es bei vorgegebener Erzeugung (K_1, K_i) von A über k, den möglichen Typus eines *TK1* von A über k durch den Typus von K_1, K_i und den der Konstantenreduktionen $A\mathfrak{P}_{1i}$ und $A\mathfrak{P}_{i1}$ (bei umgekehrter Erzeugung) stark einzuschränken. Diese Abschätzungen sind besonders genau, wenn die Struktur der Körper $A\mathfrak{P}_{1i}$ und $A\mathfrak{P}_{i1}$ von vornherein bekannt ist; falls speziell $A = K_{1i} = K_1 \cdot K_i$ ein Doppelkörper über k ist, so ist nach bekannten Sätzen (vgl. [2], S. 91—95)

$$(3.5) \qquad A\mathfrak{P}_{1i} = K_{1i}\mathfrak{P}_{1i} = K_1\mathfrak{p}_1 \cdot K_i, \quad \text{falls } K_i \text{ über } k \text{ oder falls } K_1\mathfrak{p}_1 \text{ über } k\mathfrak{p}_1 \cong k \text{ separabel ist,}$$

d. h. der Restklassenkörper ist gleich der Konstantenerweiterung des zugehörigen Komponentenkörpers. Als Ergebnis erhalten wir

Korollar 2 zu Satz 3. *Sind* K_1 *und* $K_2 \neq K_1$ *zwei TK1 für A über k, so ist jeder TK1* K_j *von A entweder gleich* K_1 *oder gleich* K_2 *oder aber fast alle* $A\mathfrak{P}_{12}$ *und fast alle* $A\mathfrak{P}_{21}$ *enthalten einen zu* K_j *isomorphen Teilkörper über* $k\mathfrak{P}_{12}$ *bzw.* $k\mathfrak{P}_{21}$ $(\mathfrak{P}_{12} \in B_{12}, \mathfrak{P}_{21} \in B_{21})$; *ist speziell* $A = K_{12} = K_1 \cdot K_2$ *ein Doppelkörper über k und* K_j *ein von* K_1 *und* K_2 *verschiedener TK1 von A über k, so enthalten fast alle Konstantenerweiterungen* $K_1\mathfrak{p}_1 \cdot K_2$ *und* $K_2\mathfrak{p}_2 \cdot K_1$, *für die* $K_1\mathfrak{p}_1$ *oder* K_2 *bzw.* $K_2\mathfrak{p}_2$ *oder* K_1 *über k separabel ist, einen zu* K_j *isomorphen Teilkörper*[11]).

Falls der Doppelkörper aus zwei über k separablen *AF1* K_1 und K_2 komponiert ist, ist somit jeder von K_1 und K_2 verschiedene *TK1* K_j „fast isomorph" einem Teilkörper von K_1 und von K_2, nämlich isomorph in einer unendlichen Schar von endlichen Konstantenerweiterungen von K_1 bzw. K_2 enthalten. Fall jeweils eine der zulässigen Konstantenerweiterungen vom

---

[10]) Sei z. B. $A = k(x_1, x_2)$ ein rationaler *AF2* und $K_1 = k(x_1)$, $K_2 = k(x_2)$; B_{12} sei das System der $\mathfrak{P}_{12}$. Sei ferner $\xi_1 = x_1 x_2$, $\xi_2 = x_1^2 x_2$; dann sind ξ_1 und ξ_2 die gleichen Ausnahme-$\mathfrak{P}_{12}$ zugeordnet, nämlich die dem Zähler und Nenner von x_1 in K_1 entsprechenden, d. h. den algebraischen Abschließungen von $k(\xi_1)$ und $k(\xi_2)$ in A entspricht das gleiche Ausnahmesystem. Wegen $x_1 = \xi_2/\xi_1$ und $x_2 = \xi_1^2/\xi_2$ sind ξ_1 und ξ_2 algebraisch unabhängig und die algebraischen Abschließungen (*TK1*) von $k(\xi_1)$ und $k(\xi_2)$ verschieden, q.e.d.

[11]) Dieses Korollar verallgemeinert (bis auf die dort zitierten Geschlechtsabschätzungen) wesentlich die Aussage von Lemma 3 in [7a] und benötigt nicht die dortige Voraussetzung über k; außerdem wird der dort knapp formulierte rechnerische Beweis durch einen ausführlichen inhaltlich-bewertungstheoretischen ersetzt. — Man beachte, daß mit den *TK1* auch die in A enthaltenen *AF1* über k abgeschätzt sind.

Grad 1 ist, dies gilt sicher, wenn unendlich viele $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ vom Grade 1 sind, so liegt jeweils genaue Isomorphie vor. Weitere Überlegungen in dieser Richtung lassen sich nach dem Schema des nachstehend untersuchten wesentlichsten Spezialfalls durchführen.

Es sei $A = k(x_1, x_2) = k(x_1) \cdot k(x_2) = K_1 \cdot K_2$ ein rationaler (also separabler) *AF2* über k und K_j ein *TK1* von A. Dann gilt für fast alle $\mathfrak{p}_1$ und fast alle $\mathfrak{p}_2$ im Sinne der Isomorphie $K_j \subseteq K_1 \mathfrak{p}_1(x_2)$, $K_j \subseteq K_2 \mathfrak{p}_2(x_1)$; somit gilt auch bei zugehöriger Konstantenerweiterung $K_j \cdot K_1 \mathfrak{p}_1 \subseteq K_1 \mathfrak{p}_1(x_2)$ und $K_j \cdot K_2 \mathfrak{p}_2 \subseteq K_2 \mathfrak{p}_2(x_1)$. Nach dem LÜROTHschen Satz für *AF1* ist somit $K_j \cdot K_1 \mathfrak{p}_1$ für alle $\mathfrak{p}_1$ zu $\mathfrak{P}_{12} \in B_{12}(K_j)$ bzw. $K_j \cdot K_2 \mathfrak{p}_2$ für alle $\mathfrak{p}_2$ zu $\mathfrak{P}_{21} \in B_{21}(K_j)$ ein rationaler *AF1* über $K_1 \mathfrak{p}_1$ bzw. $K_2 \mathfrak{p}_2$. Enthält nun k unendlich viele Elemente, so gibt es unendlich viele $\mathfrak{p}_1$ vom Grade 1 und K_j ist sicher ein rationaler *AF1* über k. Ist dagegen k ein Galoisfeld, so gibt es sicher unendlich viele $\mathfrak{p}_1$ von ungeradem Grade; da nun ein nichtrationaler *AF1* über einem Galoisfeld bei keiner Konstantenerweiterung ungeraden Grades rational wird, muß K_j selbst schon rational sein. — Hieraus folgt der nachstehende erste Schritt zur Übertragung des LÜROTHschen Satzes (daß jeder Teilkörper eines rationalen Körpers wieder rational ist) auf *AF2*.

Korollar 3 zu Satz 3. *Jeder in einem rationalen AF2 A über k enthaltene AF1 über k ist rational; jede Erzeugung eines Körpers A' über k, über dem A endlich-algebraisch ist, ist ein Paar rationaler AF1 über k*[12]).

Während die in A enthaltenen *AF1* alle rational sind, ist für die in A enthaltenen *AF2* über k gezeigt, daß sie zumindest wieder nahe am rationalen Fall liegen. — Die hier behandelte Frage nach den Teilkörpern eines *AF1* ist natürlich vollkommen verschieden von der geometrischen Frage, welche Kurven auf einer Fläche liegen.

4. Restabbildung von Divisoren und Relativgradverlagerung

Es sei (K_1, K_i) eine Erzeugung des *AF2* A über k und B_{1i} das System der zugehörigen $\mathfrak{P}_{1i}$; die $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ sind eine Teilmenge aller Bewertungen des *AF1* A über K_i. Mit $\mathfrak{Q}_1$ bzw. $v_{\mathfrak{Q}_1}$ bezeichnen wir Primdivisoren bzw. Exponentenbewertungen des *AF1* A über K_1; zur Unterscheidung verschiedener $\mathfrak{P}_{1i}$ bzw. $\mathfrak{Q}_1$ versehen wir diese mit oberen Indizes.

Zur Untersuchung der Frage, ob und wie man einem $\mathfrak{Q}_1$ von A über K_1 einen Primdivisor in einer Konstantenreduktion $A\mathfrak{P}_{1i}$ zuordnen kann, machen wir zunächst eine Hilfsbetrachtung.

Lemma 2. *Zu je endlich vielen $\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und endlich vielen $\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gibt es einen TK1 K_j von A über k, so daß K_j durch alle $v_{\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}}$ und alle $v_{\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}}$ identisch bewertet wird, d. h. daß alle diese $v_{\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}}$ und $v_{\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}}$ Bewertungen des AF1 A über K_j sind.*

Beweis. Da k durch alle diese $v_{\mathfrak{Q}_{1i}^{(\mu)}}$ und $v_{\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}}$ identisch bewertet wird, genügt der Nachweis eines Elementes $\xi \in A$, für das $\xi\,\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$ und $\xi\,\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}$ trans-

[12]) Mit den gleichen Überlegungen lassen sich ähnlich scharfe Ergebnisse für halbrationale Körper, d. h. Doppelkörper, deren eine Komponente rational ist, erzielen.

zendent über $k\,\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$ bzw. $k\,\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n)$; der $k(\xi)$ enthaltende *TK1* K_j hat dann die gewünschte Eigenschaft. — Es seien $v_{\mathfrak{Q}_1^{(1)}}, \ldots, v_{\mathfrak{Q}_1^{(m')}}$ diejenigen der $v_{\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}}$, die K_i identisch bewerten, $v_{\mathfrak{Q}_1^{(m'+1)}}, \ldots, v_{\mathfrak{Q}_1^{(m)}}$ die übrigen; falls $m' = m$, hat jedes transzendente Element aus K_i die gewünschte Eigenschaft und wir sind fertig. Im anderen Falle gibt es ein transzendentes Element $\xi_i \in K_i$, so daß $\xi_i^\lambda\,\mathfrak{Q}_1^{(m'+1)} = \cdots = \xi_i^\lambda\,\mathfrak{Q}_1^{(m)} = 0$ $(\lambda = 1, \ldots, m'+1)$. Sei weiter $\xi_1 \in K_1$ ein über k transzendentes Element mit $\xi_1\mathfrak{P}_{1i}^{(1)} = \cdots = \xi_1\mathfrak{P}_{1i}^{(n)} = 0$; definieren wir nun

$$\eta_\lambda = \xi_1 + \xi_i^\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m'+1), \tag{4.1}$$

so ist $\eta_\lambda\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ transzendent über $k\,\mathfrak{P}_{1i}^{(\nu)}$ und $\eta_\lambda\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$ $(\mu = m'+1, \ldots, m)$ transzendent über $k\,\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$, da jeweils genau eine Komponente von (4.1) bei Restabbildung transzendent und die andere Null ist; außerdem ist für mindestens ein λ gleichzeitig $\eta_\lambda\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$ $(\mu = 1 \ldots m')$ transzendent über $k\,\mathfrak{Q}_1^{(\mu)}$, womit das gesuchte Element konstruiert ist.

Nach Lemma 2 enthält bei gegebenem $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{P}_{1i}$ der Durchschnitt $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_1} \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ der zugehörigen Bewertungsringe $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_1}$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ einen *TK1* K_j von A über k und die Bilder der Elemente von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_1}$ mod $\mathfrak{P}_{1i}$ liefern (soweit $\neq \infty$) den ganzen Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$; hieraus folgt: Durch Restabbildung mod $\mathfrak{P}_{1i}$ eines Bewertungsringes $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_1}$ wird kein Primdivisor von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ festgelegt. — Um also $\mathfrak{Q}_1$ einen Primdivisor von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ zuordnen zu können, muß man einen wesentlich kleineren Bereich als $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_1}$ abbilden und dabei evtl. die Abhängigkeit von einem Parameter in Kauf nehmen[13]).

Das x-Bild von $\mathfrak{Q}_1$ mod $\mathfrak{P}_{1i}$. Zu vorgegebenem $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{P}_{1i}$ gibt es nach Lemma 2 (Annäherungsunabhängigkeitssatz für A über K_j) Elemente $x \in A$, $x \notin K_1$, so daß gleichzeitig $x\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ und $v_{\mathfrak{Q}_1}(x) = 0$ bzw. $v_{\mathfrak{Q}_1}(x) > 0$. Es bezeichne $\mathfrak{R}_x$ den ganzen Abschluß von $K_1[x]$ in A, d. h. den Ring der x-ganzen Elemente des *AF1* A über K_1, und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ den Bewertungsring zu $\mathfrak{P}_{1i}$; mit $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ bezeichnen wir den Restklassenbereich von $\mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ modulo $\mathfrak{P}_{1i}$. Da $\frac{1}{x}\mathfrak{P}_{1i} \notin \mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$, ist $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \neq A\mathfrak{P}_{1i}$ und ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $A\,\mathfrak{P}_{1i}$. Dem Primideal $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x$ von $\mathfrak{R}_x$ entspricht bei dieser Restabbildung das Ideal $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ modulo $\mathfrak{P}_{1i} = \mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \neq (0)$ von $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$, da in $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x$ Elemente ξ mit $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) = 0$ liegen. Falls $v_{\mathfrak{Q}_1}(x) > 0$ gewählt war, ist $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x \cap K_1[x] = x \cdot K_1[x]$ und folglich ist $1\,\mathfrak{P}_{1i} \notin \mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \cap k\,\mathfrak{P}_{1i}[x\mathfrak{P}_{1i}]$, d. h. $1\,\mathfrak{P}_{1i} \notin \mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$, und somit gilt sicher $\mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \neq \mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$; während $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ Primideal in $\mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ ist, braucht $\mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ kein Primideal in $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ zu sein. — Mit $\mathfrak{r}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ bezeichnen wir die algebraisch-abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ (es kann $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \neq \mathfrak{r}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ sein; zur Idealtheorie vgl. Krull [6], § 4).

[13]) Eine solche Konstruktion mit Hilfe von Vielfachenmoduln ist bei Deuring [2a] gegeben; da dort jedoch vorausgesetzt wurde, daß das Geschlecht bei Konstantenreduktion invariant bleibt, soll hier im Hinblick auf 5. eine andere ringtheoretische Methode verwendet werden. — Die Parameterabhängigkeit muß jeweils nachträglich eliminiert werden.

Definition 3. *Ist $\mathfrak{Q}_1$ ein Primdivisor des AF1 A über K_1, $x \in A$ ein Element mit $v_{\mathfrak{Q}_1}(x) > 0$, für das $x\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent ist und ist das Erweiterungsideal $\mathfrak{q}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}} = \mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} \cdot \mathfrak{r}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ in der ganz-abgeschlossenen Erweiterung von $\mathfrak{r}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} = (\mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}) \bmod \mathfrak{P}_{1i}$ des Ideals $\mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}} = (\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{R}_x \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i}}) \bmod \mathfrak{P}_{1i}$ ein Primideal, so heißt der durch $\mathfrak{q}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ eindeutig bestimmte Primdivisor $\mathfrak{q}_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$, d. h. der zur durch $\mathfrak{q}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ bestimmten Bewertung gehörige Primdivisor von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$, das x-Bild von $\mathfrak{Q}_1 \bmod \mathfrak{P}_{1i}$.*

Wegen der zweiten Voraussetzung (Primidealeigenschaft von $\mathfrak{q}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$) ist die Existenz eines x-Bildes von $\mathfrak{Q}_1 \bmod \mathfrak{P}_{1i}$ natürlich nicht allgemein gesichert. Existiert jedoch ein x-Bild von $\mathfrak{Q}_1 \bmod \mathfrak{P}_{1i}$ und hat $z \in A$ die Eigenschaften, $z\mathfrak{P}_{1i}$ ist transzendent über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$, $v_{\mathfrak{Q}_1}(z) > 0$ und x ist z-ganz, so existiert auch ein z-Bild und dieses ist identisch mit dem x-Bild, denn $\mathfrak{r}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ ist ein Unterring von $\mathfrak{r}^*_{z,\mathfrak{P}_{1i}}$ und $\mathfrak{q}^*_{x,\mathfrak{P}_{1i}}$ bleibt in $\mathfrak{r}^*_{z,\mathfrak{P}_{1i}}$ ein Primideal, nämlich $\mathfrak{q}^*_{z,\mathfrak{P}_{1i}}$. — Existiert nun ein x-Bild und ein y-Bild von $\mathfrak{Q}_1 \bmod \mathfrak{P}_{1i}$, so gibt es nach dem Annäherungsunabhängigkeitssatz ein $z \in A$, für das $v_{\mathfrak{Q}_1}(z) > 0$, $z\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ und von dem x und y ganzabhängig sind; da somit nach der obigen Bemerkung sowohl das x-Bild als auch das y-Bild mit dem z-Bild übereinstimmen, ist die Unabhängigkeit des Bildprimdivisors von $\mathfrak{Q}_1$ von dem Parameterelement x nachgewiesen.

Lemma 3. *Existiert zu einem Primdivisor $\mathfrak{Q}_1$ von A über K_1 in $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ ein x-Bild, so ist dieses unabhängig von der Auszeichnung des Elementes x und eindeutig bestimmt und werde mit $\mathfrak{q}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ bezeichnet.*

Wir leiten nun mit analogen Überlegungen einen Hilfssatz her, dessen Beweis uns u. a. die Existenz einer Primdivisorrestabbildung in einer weiten Klasse von Fällen garantiert.

Lemma 4. *Ist K_1 ein separierender TK1 für A über k, so gibt es eine separierende Variable x_i für A über K_1 derart, daß der Zählergrad n des Hauptdivisors x_i von A über K_1 für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ gleich dem Zählergrad des Hauptdivisors $x_i\,\mathfrak{P}_{1i}$ von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ ist, d. h. daß*

$$(4.2)\qquad n = [A : K_1(x_i)] = [A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_i)\,\mathfrak{P}_{1i}]$$

und zugleich $K_1\,\mathfrak{P}_{1i}$ der genaue Konstantenkörper von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ ist[14]).

Beweis. Wir nehmen zunächst an, in A existiere ein Element x_i, dessen Zähler aus $n = [A : K_1(x_i)]$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{Q}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{Q}_1^{(n)}$ vom Grade 1 besteht (der Nenner $\mathfrak{R}$ von x_i ist zum Zähler teilerfremd). Da $x_i\,\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ und da $v_{\mathfrak{Q}_1^{(\nu)}}(x_i) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, gilt für die wie oben konstruierten Ideale $\mathfrak{q}^{(\nu)}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}} \neq \mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$. — Da die Ideale $\mathfrak{Q}_1^{(\nu)} \cdot \mathfrak{R}_{x_i}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ von $\mathfrak{R}_{x_i}$ paarweise teilerfremd sind, gibt es Elemente $\xi_{\nu,\mu} \in \mathfrak{Q}_1^{(\nu)} \cdot \mathfrak{R}_{x_i}$, so daß

$$(4.3)\qquad 1 = \xi_{\nu\mu} + \xi_{\mu\nu} \qquad \text{für alle } 1 \leqq \nu < \mu \leqq n\,.$$

[14]) Die Aussage dieses Lemmas ist ein Spezialfall von (D_1) und (D_2) und somit nicht neu. Der Vollständigkeit halber und aus methodischen Gründen wird dennoch der von [3a] abweichende einfache Beweis, der sich in einigen Punkten an Ansätze von Eichler [4] anlehnt, hier erbracht.

Da die endlich vielen Elemente $\xi_{\nu\mu}$ nur endlich viele Pole (Nullstellen) unter den $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ haben können, gelten für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ bei Restabbildung gleichzeitig die Beziehungen

(4.4) $$1\,\mathfrak{P}_{1i} = \xi_{\nu\mu}\mathfrak{P}_{1i} + \xi_{\mu\nu}\mathfrak{P}_{1i} \qquad (1 \leqq \nu < \mu \leqq n).$$

Da stets $\xi_{\nu\mu}\mathfrak{P}_{1i} \in \mathfrak{q}^{(\nu)}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}} + \mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$, sind also je zwei der $\mathfrak{q}^{(\nu)}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ teilerfremde Ideale in $\mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$, d. h. für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ sind die $\mathfrak{q}^{(\nu)}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ verschiedene Ideale von $\mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$. Da also $x_i\mathfrak{P}_{1i}$ in den n verschiedenen teilerfremden Idealen $\mathfrak{q}^{(\nu)}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ von $\mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ liegt, hat $x_i\mathfrak{P}_{1i}$ (gleich gültig ob $\mathfrak{r}_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}} = \mathfrak{r}^*_{x_i,\mathfrak{P}_{1i}}$ oder nicht) für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ bei mindestens n verschiedenen Primdivisoren von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\,\mathfrak{P}_{1i}$ eine Nullstelle, d. h. es gilt

(4.5) $$\text{Zählergrad von } x_i\mathfrak{P}_{1i} = \frac{[A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_i)\mathfrak{P}_{1i}]}{n'} \geqq$$
$$\geqq n = [A : K_1(x_i)] = \text{Zählergrad von } x_i,$$

wobei $n' \geqq 1$ der Grad des Konstantenkörpers von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ ist. Da aber für den Relativgrad $[A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_i)\mathfrak{P}_{1i}]$ von $\mathfrak{P}_{1i}$ über $\mathfrak{P}'_{1i}$ $[A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_i)\mathfrak{P}_{1i}] \leqq$ $\leqq [A : K_1(x_i)]$ gilt und $n' \geqq 1$ ist, folgt aus (4.5) sofort die Gültigkeit von (4.2) und der restlichen Aussagen von Lemma 4 für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ in unserem Spezialfall[15]).

Falls es in A kein Element mit den zu Beginn postulierten Eigenschaften gibt, sei x_j eine beliebige separierende Variable für A über K_1. Da K_1 unendlich viele Elemente enthält, gibt es ein $x_i = x_j + \alpha$ $(\alpha \in K_1)$ in $K_1(x_j) = K_1(x_i)$, so daß sämtliche Zählerprimteiler von x_i beim Übergang zu A unverzweigt und die zugehörigen Restklassenkörper über K_1 separabel sind (nach der Differententheorie tritt nur in endlich vielen Fällen Verzweigung bzw. inseparable Restklassenkörpererweiterung auf). Es existiert dann eine endlich-algebraische separable Konstantenerweiterung des *AF1* A über K_1, etwa $\tilde{A} = A \cdot \tilde{K}_1$ über $\tilde{K}_1$, so daß der Zähler von x_i in $\tilde{A}$ aus $n = [A : K_1(x_i)]$ $= [\tilde{A} : \tilde{K}_1(x_i)]$ Primdivisoren ersten Grades besteht. Nach obigem ist somit für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i} \in \tilde{B}_{1i} = B(\tilde{K}_1, x_i)$ von A der Zählergrad von $x_i\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ in $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ über $\tilde{K}_1\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ gleich n.

Da für jedes $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ die Einschränkung auf A ein $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ liefert, ergibt sich aus einfacher Rechnung mit der Gradschachtelungsformel für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$

(4.6) $$\text{Zählergrad von } x_1\mathfrak{P}_{1i} \text{ in } A\,\mathfrak{P}_{1i} = n \cdot \frac{\tilde{n}'}{[\tilde{A}\,\tilde{\mathfrak{P}}_{1i} : A\,\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}]},$$

wobei $\tilde{n}'$ der Grad des Konstantenkörpers von $\tilde{A}\,\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ über dem von $A\,\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ ist. Jedes $\tilde{\xi} \in \tilde{A}$ ist als endliche Linearkombination $\tilde{\xi} = \sum_{\nu=0} \xi_\nu \alpha^\nu$ darstellbar, wobei $\xi_\nu \in A$ und α separabel und algebraisch über K_1 ist; da die Basis $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ eine $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$-Ganzheitsbasis für $\tilde{A}$ über A ist, ist (vgl. [2], S. 57,

[15]) Diese Aussagen sind äquivalent mit der absoluten Irreduzibilität der erzeugenden Gleichung $f(x_i, y)$ für A über K_1, wenn ihre Koeffizienten mod $\mathfrak{p}_1$ reduziert werden (für fast alle $\mathfrak{p}_1$).

Lemma 5) $\tilde{\xi}\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ als Linearkombination von $1\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}, \alpha\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}, \alpha^2\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}, \ldots$ mit Koeffizienten aus $A\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ darstellbar, wobei $\alpha\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ algebraisch über $K_1\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ ist. Somit ist $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ eine reine Konstantenerweiterung von $A\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ und deshalb sicher $\tilde{n}' \geq [\tilde{A}\tilde{\mathfrak{P}}_{1i} : A\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}]$; da aber für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ über $A\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ separabel ist, gilt hierbei für fast alle $\tilde{\mathfrak{P}}_{1i}$ die Gleichheit, und dies in (4.6) eingesetzt ergibt die Richtigkeit von Lemma 4.

Aus Korollar 1 zu Satz 3 und diesem Lemma folgt: *Bei jeder separierenden Erzeugung* (K_1, K_i) *eines AF2 A über k ist* (D_2) *erfüllt.* — Außerdem ergibt sich aus dem Beweis dieses Lemmas die Existenz des Bildes mod $\mathfrak{P}_{1i}$ für die Zählerprimteiler des genannten Elementes x_i.—

Es bezeichne nun (K_1, K_i) eine Erzeugung des *AF2 A* über k, x_j ein über K_1 transzendentes Element aus A, $K_{j(s)}$ den separablen Abschluß[16]) von $k(x_j)$ in K_j und $K_{1j(s)} = K_1 \cdot K_{j(s)}$ den zugehörigen Doppelkörper (vgl. 2.); es kann $K_j = K_{j(s)}$ sein (dies ist stets erfüllt, wenn A über k separabel ist). Es gelten die Gradschachtelungsformeln

$$[A : K_1(x_j)] = [A : K_{1j(s)}]\,[K_{1j(s)} : K_1(x_j)],$$

$$(4.7)\qquad [A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_j)\mathfrak{P}_{1i}] = [A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]\,[K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_j)\mathfrak{P}_{1i}]$$
$$\text{für } \mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j).$$

Da $K_{j(s)}$ über k separabel ist, folgt (vgl. [2], S. 90)

$$(4.8)\qquad [K_{1j(s)} : K_1(x_j)] = [K_{j(s)} : k(x_j)].$$

Bezeichnen wir die Einschränkungen der $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$ im Doppelkörper $K_{1j(s)}$ mit $\mathfrak{P}^*_{1j(s)}$, so ist $K_1(x_j)\mathfrak{P}_{1i} = K_1(x_j)\mathfrak{P}^*_{1j(s)} = K_1\mathfrak{p}_1 \cdot k(x_j)$ und wegen der Separabilität von $K_{j(s)}$ über k ist $K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i} = K_{1j(s)}\mathfrak{P}^*_{1j(s)} = K_1\mathfrak{p}_1 \cdot K_{j(s)}$ und es gilt

$$(4.9)\qquad [K_{1j(s)}\mathfrak{P}^*_{1j(s)} : K_1(x_j)\mathfrak{P}^*_{1j(s)}] = [K_1\mathfrak{p}_1 \cdot K_{j(s)} : K_1\mathfrak{p}_1 \cdot k(x_j)] = [K_{j(s)} : k(x_j)].$$

Wegen (4.7), (4.8) und (4.9) gilt bei beliebigem $x_j \in A$ mit $x_j \notin K_1$, $x_j \in K_{j(s)}$ die Gradverlagerungsformel

$$(4.10)\qquad [A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_j)\mathfrak{P}_{1i}] = [A : K_1(x_j)]\,\frac{[A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]}{[A : K_{1j(s)}]}$$

für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$[17]).

Der Proportionalitätsfaktor $[A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]/[A : K_{1j(s)}]$ auf der rechten Seite von (4.10) hängt nur von $K_{j(s)}$ und $\mathfrak{P}_{1i}$ ab und ist stets ≤ 1, da der Restklassenrelativgrad kleiner oder gleich dem Körperrelativgrad ist, d. h. bei Konstantenreduktion kann sich der Relativgrad über einem rationalen Teilkörper nur verkleinern, und zwar um den gleichen Faktor für alle $x_j \in K_{j(s)}$, $x_j \notin k$. Da jedes $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$ gleich einem $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1j}(K_i)$ ist, hängt die Gleichheit in (4.10) nur davon ab, ob das zugehörige $\mathfrak{P}^*_{1j(s)}$ bei Fortsetzung auf A träge ist oder nicht.

---

[16]) Das heißt den größten $k(x_j)$ umfassenden und in K_j enthaltenen über k separablen *AF1*.

[17]) (4.10) und das anschließende Lemma 5 gelten wörtlich bei Ersetzung von $K_{j(s)}$ durch K_j, wenn zusätzlich gefordert wird, daß gleichzeitig K_1 und $K_1\mathfrak{P}_{1i} = K_1\mathfrak{p}_1$ über k separabel sind.

Lemma 5. *Ist* (K_1, K_i) *eine Erzeugung des AF2 A über k,* $K_{j(s)}$ *ein im TK1* K_j *separabel abgeschlossener AF1 über k, so gilt für alle* $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j)$ *bei beliebigem* $x_j \in K_{j(s)}$, $x_j \notin K_1$ *die Gradverlagerungsformel* (4.10) *mit dem nur von* $\mathfrak{P}_{1i}$ *und* $K_{j(s)}$ *abhängigen Proportionalitätsfaktor*

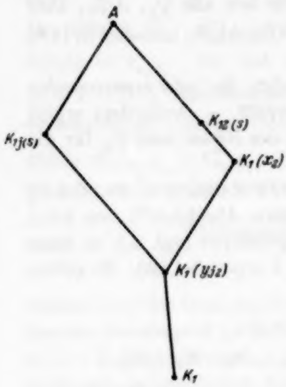

Fig. 2

$$[A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]/[A : K_{1j(s)}]\,,$$

der stets $\leqq 1$ *ist und* $= 1$ *d.u.n.d. ist, wenn* $\mathfrak{P}_{1i}$ *über* $K_{1j(s)}$ *träge ist.*

Wir nehmen von jetzt an zusätzlich an, daß K_1 ein separierender *TK1* für A über k sei. Dann folgt aus Lemma 4, Lemma 5 und Korollar 1 zu Satz 3: *Ist* K_1 *separierend, so gibt es einen im zugehörigen TK1* K_2 *separabel abgeschlossenen AF1* $K_{2(s)}$ *über k, in dem eine separierende Variable für A über* K_1 *liegt, so daß*

$$(4.11) \quad [A : K_1(x_2)] = [A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_2)\,\mathfrak{P}_{1i}]$$

für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ *und alle* $x_2 \in K_{2(s)}$ *mit* $x_2 \notin k$.

Bei der angegebenen Bedeutung von x_2 und $K_{2(s)}$ wollen wir nun den Wert $[A\,\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]$ für alle $K_{j(s)}$ (beachte, daß hiermit auch alle $x_j \in A$, $x_j \notin K_1$ erfaßt sind) und fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ bestimmen. Da $K_{1j(s)}$ und $K_1(x_2)$ in A enthaltene *AF1* über K_1 sind, gibt es ein Element $y_{j2} \in K_{1j(s)}$ mit $y_{j2} \in K_1(x_2)$ und $y_{j2} \notin K_1$, so daß $[K_{1j(s)} : K_1(y_{j2})]$ und $[K_1(x_2) : K_1(y_{j2})]$ endlich sind. Dann gelten (vgl. Fig. 2) die Gradschachtelungsformeln

$$(4.12) \quad \begin{aligned} &[A : K_1(y_{j2})] \\ &\quad = [A : K_1(x_2)]\,[K_1(x_2) : K_1(y_{j2})] = [A : K_{1j(s)}]\,[K_{1j(s)} : K_1(y_{j2})]\,, \\ &[A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}] = [A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_2)\mathfrak{P}_{1i}]\,[K_1(x_2)\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}] \\ &\quad = [A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]\,[K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}]\,, \end{aligned}$$

wobei die letztere für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ gilt (z. B. für $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(k(y_{j2})) \cap B_{1i}(K_{1j}) \cap B_{1i}(K_2)$).

Da $y_{j2} \in K_1(x_2)$, ist $y_{j2} = P(x_2)/Q(x_2)$ Quotient zweier teilerfremder Polynome $P(x_2)$ und $Q(x_2)$ der Grade p bzw. q aus $K_1[x_2]$ und es gilt

$$[K_1(x_2) : K_1(y_{j2})] = \max(p, q)\,.$$

Da nun $P(x_2)\mathfrak{P}'_{12}$ und $Q(x_2)\mathfrak{P}'_{12}$ für fast alle $\mathfrak{P}'_{12}$ Polynome aus $K_1\mathfrak{p}_1[x_2\mathfrak{P}'_{12}]$ der gleichen Grade p bzw. q sind und da sie für fast alle $\mathfrak{P}'_{12}$ wieder teilerfremd sind[18]), gilt für fast alle $\mathfrak{P}'_{12}$

$$(4.13) \quad [K_1(x_2)\mathfrak{P}'_{12} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}'_{12}] = \max(p, q) = [K_1(x_2) : K_1(y_{j2})]\,.$$

Da die Einschränkungen der $\mathfrak{P}_{1i}$ auf $K_1(x_2)$ fast alle $\mathfrak{P}'_{12}$ liefern, erhalten wir wegen (4.11) und (4.13) durch Gradschachtelung auf dem Wege über $K_1(x_2)$

[18]) Eine Beziehung $1 = P(x_2)\,P'(x_2) + Q(x_2)\,Q'(x_2)$ geht modulo fast allen $\mathfrak{P}'_{12}$, wenn man nämlich die Pole der Koeffizienten der einzelnen Polynome ausschließt, in eine entsprechende in $K_1\mathfrak{p}_1[x_2\mathfrak{P}'_{12}]$ über.

bzw. $K_1(x_2)\mathfrak{P}_{1i}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$

$$(4.14)\quad \begin{aligned}[][A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}] &= [A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_2)\mathfrak{P}_{1i}][K_1(x_2)\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}]\\ &= [A : K_1(x_2)][K_1(x_2) : K_1(y_{j2})] = [A : K_1(y_{j2})];\end{aligned}$$

also gilt wegen (4.12) auch auf dem Weg über $K_{1j(s)}$ bzw. $K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$

$$(4.15)\quad \begin{aligned}&[A : K_{1j(s)}][K_{1j(s)} : K_1(y_{j2})]\\ &= [A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}][K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}].\end{aligned}$$

Da stets der Körperrelativgrad größer oder gleich dem Restklassenrelativgrad ist, gilt $[A : K_{1j(s)}] \geqq [A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}]$ und $[K_{1j(s)} : K_1(y_{j2})] \geqq$ $\geqq [K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i} : K_1(y_{j2})\mathfrak{P}_{1i}]$ und aus (4.15) folgt

$$(4.16)\quad [A : K_{1j(s)}] = [A\mathfrak{P}_{1i} : K_{1j(s)}\mathfrak{P}_{1i}] \qquad \text{für fast alle } \mathfrak{P}_{1i},$$

d. h. *fast alle* $\mathfrak{P}_{1i}$ *sind über* $K_{1j(s)}$ *träge*. Aus diesem Ergebnis, dem Lemma 5 und unseren obigen Feststellungen über (D_2) folgt der nachstehende Gradverlagerungssatz.

Satz 4. *Ist* (K_1, K_i) *eine separierende Erzeugung des AF2 A über k, so gilt für jedes* $x_j \in A$ *mit* $x_j \notin K_1$ *und fast alle* $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ *die Gradverlagerungsformel*

$$(4.17)\quad [A : K_1(x_j)] = [A\mathfrak{P}_{1i} : K_1(x_j)\mathfrak{P}_{1i}];$$

die Gesamtheit dieser fast allen $\mathfrak{P}_{1i}$ *hängt nur von* (K_1, K_i) *und dem separablen Abschluß* $K_{j(s)}$ *von* $k(x_j)$ *in* K_j *nicht aber von der speziellen Auswahl von* $x_j \in K_{j(s)}$ *ab*[19]; *außerdem ist für fast alle* $\mathfrak{P}_{1i}$ *der Grad des Zähler-(Nenner-) divisors von* $x_j\mathfrak{P}_{1i}$ *in* $A\mathfrak{P}_{1i}$ *über* $k\mathfrak{P}_{1i}$ *gleich dem Grad des Zähler-(Nenner-) divisors von* x_j *in A über* K_1.

Daß dieser Satz eine wesentliche Verallgemeinerung von (D_1) und (D_2) ist, geht aus der nachfolgenden Spezialisierung $K_i = K_j$ hervor [beachte, daß (4.17) gleichwertig mit der Trägheit von $\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1(x_i)$ ist].

Korollar 1 zu Satz 4. *Ist* K_1 *ein separierender TK1 des AF2 A über k und* x_i *ein über* K_1 *transzendentes Element aus A, so sind fast alle der bezüglich* x_i *gebildeten* $\mathfrak{P}_{1i}$ *über* $\mathfrak{P}'_{1i}$, *d. h. über* $K_1(x_i)$, *träge und für fast alle diese* $\mathfrak{P}_{1i}$ *ist* (D_2) *erfüllt.*

(D_1) und (D_2) hängen also nicht wie in [3a] von der Auszeichnung einer separierenden Variablen ab, sondern nur von der Separabilität von A über K_1 (Separabilitätseigenschaften von K_1 über k gehen also nicht ein). Diesem Sachverhalt bei Konstantenreduktionen entspricht ein Analogon bei Konstantenerweiterungen (vgl. [2], S. 90, Korollar 2 und S. 91, Theorem), wo auch die Separabilität des ursprünglichen *AF1* ausreicht, um die Gradverlagerung [entsprechend (D_1)] und die Tatsache, daß der Konstantenerweiterungskörper wieder der genaue Konstantenkörper ist [entsprechend (D_2)], zu garantieren; allerdings muß man bei den Konstantenreduktionen die Terminologie des „fast alle" zulassen.

Korollar 2 zu Satz 4. *Ist* (K_1, K_i) *eine separierende Erzeugung des AF2 A über k, B ein in A enthaltener AF1 über* K_1, *so gilt für fast alle* $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$

$$(4.18)\quad [A : B] = [A\mathfrak{P}_{1i} : B\mathfrak{P}_{1i}].$$

[19]) Falls A über k separabel ist, kann stets $K_{j(s)} = K_j$ gesetzt werden.

Beweis. Es sei x_j ein über K_1 transzendentes Element aus B; dann ist $[B:K_1(x_j)]$ und $[A:K_1(x_j)]$ endlich. (4.18) folgt aus (4.17) einmal für A über $K_1(x_j)$ und einmal für B über $K_1(x_j)$ angewandt.

Auf die möglichen Folgerungen aus Satz 4 für die Existenz eines Bildes mod $\mathfrak{P}_{1i}$ eines Primdivisors $\mathfrak{Q}_1$ von A über K_1 soll in dieser Note nicht weiter eingegangen werden.

5. Zum Verhalten des Geschlechts bei Konstantenreduktionen

Es sei (K_1, K_i) eine separierende Erzeugung des *AF2* A über k. Wir suchen eine für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ gültige Beziehung zwischen dem Geschlecht $g(A/K_1)$ des *AF1* A über K_1 und den Geschlechtern $g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i})$ seiner Konstantenreduktionen $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$. Nach Satz 3 und seinem Korollar 1 wird diese Gesetzmäßigkeit bei festem separierendem K_1 nicht von der speziellen Auswahl einer Erzeugung (K_1, K_i) und auch nicht von Separabilitätsvoraussetzungen für ein spezielles Element x_i abhängen.

Zunächst folgt aus Satz 4 und einer Überlegung von DEURING (vgl. [3a], S. 645—648): *Für fast alle* $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ (z. B. für alle $\mathfrak{P}_{1i}$, die über $K_1(x_i)$, $x_i \in K_i$, $x_i \notin k$ träge sind und für die gleichzeitig $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ der genaue Konstantenkörper von $A\mathfrak{P}_{1i}$ ist) *gilt*

$$g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) \leq g(A/K_1). \tag{5.1}$$

Die Aussage (D_3) (vgl. [3a], S. 654) würde nun besagen, daß bei separierendem K_1 (d. h. bei Existenz einer separierenden Variablen für A über K_1) für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ in (5.1) die Gleichheit gilt. Neuerdings gab DEURING [3c] unter der zusätzlichen Annahme, daß A über K_1 *konservativ*[20]) ist, einen Beweis für (D_3) an. Wir wollen hier Kriterien für den Fall, daß A über K_1 *nicht konservativ* ist (dieser Fall kann im Rahmen unserer Überlegungen eintreten), angeben und zeigen, daß (D_3) bei separierendem K_1 nicht allgemein gilt.

Es sei also A als *AF1* über K_1 separabel aber nicht konservativ. Dann gibt es eine Konstantenerweiterung von A über K_1 mit einem über K_1 endlich-algebraischen rein inseparablen Körper L_1, so daß: $A \cdot L_1$ über L_1 konservativ ist und $g(A \cdot L_1/L_1) < g(A/K_1)$. $g(A \cdot L_1/L_1) = G(A/K_1)$ ist der kleinste Wert, auf den sich das Geschlecht von A über K_1 bei irgendeiner Konstantenerweiterung verringern kann, und werde das *konservative Geschlecht von A über K_1* genannt; nach Konstruktion ist $G(A/K_1)$ eine Invariante von A über K_1.

Da $A \cdot L_1$ über A endlich-algebraisch und rein inseparabel ist, hat jedes $\mathfrak{P}_{1i} \in B(K_1, x_i)$ von A genau eine Fortsetzung $\overline{\mathfrak{P}}_{1i} \in B(L_1, x_i)$ in $A \cdot L_1$ (vgl. [2], S. 94, Lemma 1), d. h. die Zuordnung

$$\mathfrak{P}_{1i} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{P}}_{1i} \tag{5.2}$$

ist eineindeutig. Wegen der Separabilität von $A \cdot L_1$ über L_1 gilt für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ gleichzeitig: $g(A \cdot L_1/L_1) \geq g((A \cdot L_1)\overline{\mathfrak{P}}_{1i}/L_1\overline{\mathfrak{P}}_{1i})$ [vgl. (5.1)], $(A \cdot L_1)\overline{\mathfrak{P}}_{1i}$ ist *AF1* über $L_1\overline{\mathfrak{P}}_{1i}$ und $A\overline{\mathfrak{P}}_{1i}$ ist *AF1* über $K_1\overline{\mathfrak{P}}_{1i}$. Da einerseits $(A \cdot L_1)\overline{\mathfrak{P}}_{1i}$

[20]) Nach ARTIN [1] und TATE [8] heißt ein *AF1* A über K_1 *konservativ*, wenn für *jede* Konstantenerweiterung gilt $g(A \cdot L_1/L_1) = g(A/K_1)$ (bei Konstantenerweiterungen kann das Geschlecht nur abnehmen, vgl. [2]); anderenfalls heiße A über K_1 *nicht konservativ* und die größte Geschlechtsabnahme wird dann schon bei einer endlich-algebraischen rein inseparablen Konstantenerweiterung erreicht.

rein inseparabel über $A\mathfrak{P}_{1i}$ ist und da andererseits $(A \cdot L_1)\mathfrak{P}_{1i}$ über $L_1\mathfrak{P}_{1i}$ eine reine Konstantenerweiterung von $A\,\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ ist, wobei evtl. $[A \cdot L_1 : A] > [(A \cdot L_1)\mathfrak{P}_{1i} : A\mathfrak{P}_{1i}]$ gilt (Verzweigung von $\mathfrak{P}_{1i}$), erhalten wir für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ unter Beachtung von (5.2) die Geschlechtsabschätzungen

$$(5.3) \qquad g(A\,\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) \geq g((A \cdot L_1)\mathfrak{P}_{1i}/L_1\mathfrak{P}_{1i}),$$

$$(5.4) \qquad g(A/K_1) > G(A/K_1) = g(A \cdot L_1/L_1) \geq g((A \cdot L_1)\mathfrak{P}_{1i}/L_1\mathfrak{P}_{1i}).$$

Aus diesen Überlegungen und (5.4) folgt für das konservative Geschlecht von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ die Abschätzung

$$(5.5) \qquad G(A\,\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) \leq g((A \cdot L_1)\mathfrak{P}_{1i}/L_1\mathfrak{P}_{1i}) \leq G(A/K_1) < g(A/K_1).$$

Es verbleiben somit die folgenden Möglichkeiten: Ist $g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) = g(A/K_1)$, so ist $A\mathfrak{P}_{1i}$ notwendig nicht konservativ. Ist $g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) < < g(A/K_1)$, so kann $A\mathfrak{P}_{1i}$ konservativ sein oder nicht. Falls aber $A\mathfrak{P}_{1i}$ konservativ ist (dies gilt bei vollkommenem[21]) k für alle $\mathfrak{P}_{1i}$), so nimmt das Geschlecht bei Konstantenreduktion notwendig ab. Zusammen erhalten wir das

Lemma 6. *Ist A über K_1 ein separabler aber nicht konservativer AF1, so gilt für das konservative Geschlecht fast aller $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ die Abschätzung* (5.5), *d. h. entweder ist $A\mathfrak{P}_{1i}$ nicht konservativ oder es ist $g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) < < g(A/K_1)$ oder beides; falls $g(A/K_1) \geq g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) > G(A/K_1)$, ist $A\mathfrak{P}_{1i}$ sicher nicht konservativ und falls speziell k vollkommen ist, ist für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ $A\mathfrak{P}_{1i}$ konservativ mit*

$$(5.6) \qquad g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) = G(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) \leq G(A/K_1) < g(A/K_1).$$

Bei vollkommenem k garantiert Lemma 6, daß bei fast allen Konstantenreduktionen eines nicht konservativen *AF1* das Geschlecht wirklich abnimmt; dies ist im Hinblick auf die Zetafunktionen eines *AF2* über einem Galoisfeld (ein solches ist vollkommen) von Interesse, da dann die Existenz eines separierenden Teilkörpers K_1, über dem A konservativ ist, noch keineswegs garantiert ist (nach einem Beispiel von Tate [8] gibt es separierende *TK1* eines solchen *AF2*, über dem A nicht konservativ ist). — Über das mögliche Verhalten bei unvollkommenem k informiert das folgende

Beispiel: Es sei k ein rationaler *AF1* über einem Galoisfeld (also unvollkommen) und K_i ein separabler nicht konservativer *AF1* über k. Sei weiter $x_1 \notin K_i$ transzendent über k; dann ist der Doppelkörper $A = K_1 \cdot K_i = k(x_1) \cdot K_i$ (über k) über $K_1 = k(x_1)$ ein separabler nicht konservativer *AF1*. Für alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ ist

$$(5.7) \qquad A\mathfrak{P}_{1i} \cong K_i \cdot K_1\mathfrak{p}_1$$

isomorph zur endlich-algebraischen Konstantenerweiterung von K_i über k mit $K_1\mathfrak{p}_1$. Da für unendlich viele $\mathfrak{p}_1$ $K_1\mathfrak{p}_1$ separabel über $k\mathfrak{p}_1 \cong k$ ist (sogar separabel vom Grade 1, da k unendlich viele verschiedene Elemente enthält), gibt es unendlich viele zugehörige $\mathfrak{P}_{1i}$, für die

$$(5.8) \qquad g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) = g(K_i \cdot K_1\mathfrak{p}_1/K_1\mathfrak{p}_1) = g(K_i/k) = g(A/K_1).$$

[21]) Dann ist auch $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ vollkommen und $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ konservativ, da es keine inseparablen algebraischen Konstantenerweiterungen gibt.

Andererseits ist für mindestens eine inseparable endlich-algebraische Erweiterung $\bar{k}$ von k $g(K_i\cdot\bar{k}/\bar{k}) < g(K_i/k)$; da es aber unendlich viele verschiedene $\mathfrak{p}_1$ von K_1 gibt, für die $K_1\mathfrak{p}_1$ einen zu $\bar{k}$ isomorphen Teilkörper enthält, gibt es unendlich viele zugehörige $\mathfrak{P}_{1i}$, so daß

$$(5.9)\qquad g(A\mathfrak{P}_{1i}/K_1\mathfrak{P}_{1i}) = g(K_i\cdot K_1\mathfrak{p}_1/K_1\mathfrak{p}_1) < g(K_i/k) = g(A/K_1).$$

Somit kann gleichzeitig für unendlich viele $\mathfrak{P}_{1i}$ das Geschlecht invariant bleiben und für unendlich viele andere $\mathfrak{P}_{1i}$ abnehmen, d. h. bei unvollkommenem k braucht bei Konstantenreduktion nicht für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ das gleiche Verhalten vorzuliegen (nach diesem Muster lassen sich weitere Beispiele bilden).

Auf die zur Abschließung dieser Berichtigung von (D_3)[22]) notwendige Untersuchung der Konstantenreduktionen von konservativen *AF1* A über K_1 (vgl. hierzu auch [3c]) kommen wir im Zusammenhang mit wesentlichen Folgerungen und Anwendungen im geplanten Teil II zurück. — Wir weisen noch darauf hin, daß die hier benutzte Konservativitätsvoraussetzung auf eine weitere enge Parallele zwischen Konstantenerweiterungen und Konstantenreduktionen hindeutet.

6. Folgerungen für die arithmetischen Zetafunktionen

In diesem Abschnitt sei stets k ein Galoisfeld und A ein (notwendig separabler) *AF2* über k; alle *TK1* für A über k sind ebenfalls separabel und es existieren separierende *TK1*. Wir wollen Folgerungen aus den Ergebnissen in 2. und 3. für die gemäß (1.1) erklärten arithmetischen Zetafunktionen $Z_A(s; K_1, x_i)$ ziehen.

Da nach Satz 1 das System $B_{1i} = B(K_1, x_i)$ der $\mathfrak{P}_{1i}$ nur von der Erzeugung (K_1, K_i) und nicht von der speziellen Auswahl von $x_i \in K_i$ mit $x_i \notin k$ abhängt und da in die Definition von $Z_A(s; K_1, x_i)$ nur die Gesamtheit der $\mathfrak{P}_{1i} \in B(K_1, x_i)$ oder genauer die Gesamtheit der zugehörigen Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$ eingeht, ist $Z_A(s; K_1, x_i)$ eine Invariante der gemäß (2.2) zugehörigen algebraischen Erzeugung (K_1, K_i); da somit die Zetafunktion sich nicht ändert, wenn x_i durch ein anderes Element $x_i' \in K_i$ mit $x_i' \notin k$ ersetzt wird, schreiben wir fortan

$$(6.1)\qquad Z_A(s; K_1, K_i) = Z_A(s; K_1, x_i) \qquad \text{für alle } x_i \in K_i \text{ mit } x_i \notin k.$$

Gemäß Satz 3 stimmen bei einem Wechsel der zweiten Erzeugungskomponente die aus fast allen $\mathfrak{P}_{1i}$ bzw. $\mathfrak{P}_{1j}$ bestehenden Teilsysteme $B_{1i}(K_j)$ und $B_{1j}(K_i)$ überein und folglich gilt für die zugehörigen Teilprodukte von (1.1)

$$(6.2)\qquad \prod_{\mathfrak{P}_{1i}\in B_{1i}(K_j)} Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s) = \prod_{\mathfrak{P}_{1j}\in B_{1j}(K_i)} Z_{A\mathfrak{P}_{1j}}(s)\,.$$

Zusammen mit (1.1), (3.4) und (6.1) ergibt dies

[22]) Die Lücke im Beweis für (D_3) in [3a] besteht ersichtlich darin, daß zu separablen *AF1* die angenommene Erzeugung (Kurve mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten) nicht zu existieren braucht und daß bei einer algebraischen (inseparablen) Erweiterung eines *AF1* das Geschlecht abnehmen kann.

Satz 5. *Die gemäß* (1.1), (6.1) *erklärte arithmetische Zetafunktion* $Z_A(s; K_1, K_i)$ *eines AF2 A über einem Galoisfeld k ist eine Invariante der Erzeugung* (K_1, K_i), *d. h. unabhängig von der Auswahl von* $x_i \in K_i$ *mit* $x_i \notin k$; *beim Übergang von* (K_1, K_i) *zu einer anderen Erzeugung* (K_1, K_j) *mit der gleichen ersten Komponente* K_1 *gilt die Transformationsregel*

$$Z_A(s; K_1, K_j) = Z_A(s; K_1, K_i) \frac{\prod\limits_{\mathfrak{P}_{1j} \in S_{1j}(K_i)} Z_{A\mathfrak{P}_{1j}}(s)}{\prod\limits_{\mathfrak{P}_{1i} \in S_{1i}(K_j)} Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)}, \tag{6.3}$$

d. h. die Zetafunktionen unterscheiden sich um höchstens endlich viele Ausnahmefaktoren, nämlich endlich viele Zetafunktionen zu AF1 über einem Galoisfeld.

Dieses Ergebnis ist unabhängig von jeglichen Separierbarkeitsvoraussetzungen über die Erzeugungen. Es ist jedoch insofern grob, als sich einige oder alle der auf der rechten Seite von (6.3) formal auftretenden Störfaktoren gegenseitig fortheben können (es gibt aber Beispiele, bei denen dies nicht zutrifft [7b]).

Da die Störfaktoren auf der rechten Seite von (6.3) jeweils Zetafunktionen eines *AF1* über einem *k* enthaltenden Galoisfeld sind, haben sie zusammen höchstens endlich viele inäquivalente[23]) Nullstellen und Pole, die alle auf den Geraden $\Re(s) = 0$, $^1/_2$ und 1 liegen. Somit hängen zunächst alle nicht auf diesen Geraden liegenden Pole und Nullstellen von $Z_A(s; K_1, K_i)$ nur von A und K_1, nicht aber von K_i ab. — Jeder Störfaktor $Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$ bzw. $Z_{A\mathfrak{P}_{1j}}(s)$ hat je genau einen Pol erster Ordnung bei $s = 0$ und bei $s = 1$ (und dazu äquivalente bei $s = 0 + \nu \frac{2\pi i}{\log q^r}$ bzw. $s = 1 + \nu \frac{2\pi i}{\log q^r}$, wo ν ganzzahlig, q^r die Elementanzahl des Konstantenkörpers von $A\mathfrak{P}_{1i}$ bzw. $A\mathfrak{P}_{1j}$ ist und q die Elementanzahl von k bedeutet) und hiervon abgesehen auf den Geraden $\Re(s) = 0$ bzw. 1 keine Pole und Nullstellen. Bezeichnen wir, wie üblich, einen einfachen Pol als Nullstelle der Ordnung -1, so bestimmen die Störfaktoren zusammen bei $s = 0$ eine Nullstelle gleicher Ordnung wie bei $s = 1$; somit ist die Differenz der Ordnung der Nullstelle bei $s = 0$ von der bei $s = 1$ von $Z_A(s; K_1, K_i)$ ebenfalls nur von K_1 und A, nicht aber von K_i abhängig. Zusammen erhalten wir das

Korollar zu Satz 5. *Ist A ein AF2 über einem Galoisfeld k von q Elementen und* K_1 *ein TK1 von A über k, so hängen alle nicht auf der Geraden* $\Re(s) = {}^1/_2$ *und in* $s = 2\pi i\, \nu/\log q$ *oder in* $s = 1 + 2\pi i\, \nu/\log q$ (ν *ganzrational) liegenden Nullstellen und Pole von* $Z_A(s; K_1, K_i)$ *nur von A und* K_1, *nicht aber von* K_i *ab; das gleiche gilt, soweit diese endlich sind, für die Anzahlen der inäquivalenten dieser Nullstellen bzw. Pole; ferner ist auch die Differenz der Ordnungen der Nullstellen bei* $s = 0$ *und* $s = 1$ *eine Invariante für A über* K_1.

Dieses Ergebnis bedeutet die Möglichkeit der Abspaltung eines „halbinvarianten", d. h. für A über K_1 invarianten, Teiles $Z_A(s; K_1)$ von

[23]) Mit einem Wert s_0 ist auch jedes $s_0 + 2\pi i\, \nu/\log q$ (ν ganzrational, q = Elementanzahl des Konstantenkörpers) Nullstelle bzw. Pol und diese werden äquivalent genannt; es gibt bei *AF1* nur endlich viele inäquivalente Nullstellen und Pole (eine Zusammenstellung dieser Ergebnisse siehe etwa in [7a], 1.1).

$Z_A(s; K_1, K_i)$ durch „Abtrennung" der Pole bzw. Nullstellen auf $\Re(s) = 1/2$ und $s = 2\pi i\, \nu/\log q$ bzw. $s = 1 + 2\pi i\, \nu/\log q$ (eine analytische Begründung dieses Vorganges soll hier nicht gegeben werden; in den gelösten Fällen [7a, b] ist sie trivial, da nur endlich viele inäquivalente Nullstellen und Pole auftreten), d. h. die Elimination der Abhängigkeit von einer Transzendenten bzw. einem *TK1*. Die Tatsache, daß der halbinvariante Bestandteil der Zetafunktion eines *AF2* über einem Galoisfeld nur noch von einer Transzendenten, d. h. einem *TK1* K_1, abhängt, entspricht der vollen Invarianz der Zetafunktion eines *AF1* über einem Galoisfeld.

Gelingt es überdies, einen *TK1* K_1 in invarianter Weise auszuzeichnen (bzw. eine Klasse von *TK1*, für die die Bestandteile $Z_A(s; K_1)$ übereinstimmen), so wäre in $Z_A(s; K_1)$ eine invariante „Zetafunktion" für A über k, d. h. eine erzeugungsunabhängige Größe gefunden (auf diesen Ansatz werden wir in Teil II zurückkommen). Diese Überlegung interessiert im Hinblick auf den Parallelfall eines *AF1* über einem endlich algebraischen Zahlkörper K_1, da dort ja ein Teilkörper, nämlich K_1 von vornherein invariant ausgezeichnet ist; allerdings bleibt dort noch das Analogon zu (6.3) zu verifizieren.

Die Aussage des obigen Korollars steht übrigens in guter Übereinstimmung mit einem neueren Ergebnis von A. Weil und S. Lang [9b] für die Zetafunktion einer Kongruenzmannigfaltigkeit (vgl. hierzu auch [7a], § 2); auf unseren Fall der Stufe 2 übertragen, besagt dies, daß alle Pole und Nullstellen für $\Re(s) > 1$ birationale Invarianten sind.

Hierdurch und durch die nachstehende weitere Parallele zu den *AF1* wird die Aufgabe nahegelegt, wie bei *AF1* über einem Galoisfeld in einem Teil der Nullstellen und Pole von $Z_A(s; K_1, K_i)$ und (soweit endlich) in der Anzahl der Inäquivalenten Invarianten des Körpers zu suchen.

Es sei $Z_A(s; K_1, K_i)$ die zur Erzeugung (K_1, K_i) des *AF2* A über dem Galoisfeld k gehörige Zetafunktion; weiter sei $\bar{A}$ eine endliche rein inseparable Erweiterung von A. Da k ein Galoisfeld ist, ist $\bar{A}$ wieder ein *AF2* über k; die K_1 bzw. K_i enthaltenden *TK1* von $\bar{A}$ über k seien mit $\bar{K}_1$ bzw. $\bar{K}_i$ bezeichnet (es ist $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_i$) und $\bar{B}_{1i}$ sei das zur Erzeugung $(\bar{K}_1, \bar{K}_i)$ gehörige System der $\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$. Wir wollen $Z_A(s; K_1, K_i)$ mit der Zetafunktion

$$(6.4) \qquad Z_{\bar{A}}(s; \bar{K}_1, \bar{K}_i) = \prod_{\bar{\mathfrak{P}}_{1i} \in \bar{B}_{1i}} Z_{\bar{A}\bar{\mathfrak{P}}_{1i}}(s)$$

vergleichen.

Da $\bar{A}$ rein inseparabel über A ist, hat jedes $\mathfrak{P}_{1i}$ genau eine Fortsetzung in $\bar{A}$ und diese ist vom Typus $\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$ (vgl. [2], S. 94); umgekehrt ist die Einschränkung jedes $\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$ in A ein $\mathfrak{P}_{1i}$ und wir erhalten zusammen

$$(6.5) \qquad \bar{\mathfrak{P}}_{1i} \leftrightarrow \mathfrak{P}_{1i}, \text{ wobei } \bar{A}\bar{\mathfrak{P}}_{1i} \text{ rein inseparabel über } A\mathfrak{P}_{1i} \text{ ist;}$$

dabei kann jedoch $[\bar{A}\bar{\mathfrak{P}}_{1i} : A\mathfrak{P}_{1i}] = [\bar{A}\bar{\mathfrak{P}}_{1i} : A\mathfrak{P}_{1i}] = 1$ sein.

Die Zetafunktion einer rein inseparablen endlichen Erweiterung $\bar{K}$ eines *AF1* K über einem Galoisfeld stimmt aber gemäß ihrer Produktdefinition

mit der von K überein[24]), denn über jedem Primdivisor $\mathfrak{q}$ von K liegt genau ein $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{K}$, das über $\mathfrak{q}$ rein verzweigt ist, da eine inseparable Restklassenkörpererweiterung nicht möglich ist. Somit gilt

(6.6) $$Z_{\bar{A}\bar{\mathfrak{P}}_{1i}}(s) = Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s) \text{ für alle } \bar{\mathfrak{P}}_{1i} \in \bar{B}_{1i}, \text{ falls } \bar{\mathfrak{P}}_{1i} \leftrightarrow \mathfrak{P}_{1i} \text{ ist};$$

zusammen mit (6.4) ergibt dies

(6.7) $$Z_{\bar{A}}(s; \bar{K}_1, \bar{K}_i) = Z_A(s; K_1, K_i).$$

Satz 6. *Ist (K_1, K_i) eine Erzeugung des AF2 A über dem Galoisfeld k, $\bar{A}$ eine endliche rein inseparable Erweiterung von A und $(\bar{K}_1, \bar{K}_i)$ die über (K_1, K_i) liegende Erzeugung von $\bar{A}$, so sind die beiden zugehörigen Zetafunktionen $Z_A(s; K_1, K_i)$ und $Z_{\bar{A}}(s; \bar{K}_1, \bar{K}_i)$ identisch.*

Somit ändern sich die aus der Zetafunktion $Z_A(s; K_1, K_i)$ abgeleiteten Invarianten nicht bei endlicher rein inseparabler Erweiterung, genau so wie dies für Nullstellen und Geschlecht bei *AF1* der Fall ist. Aus Satz 6 und 2 folgt sofort das

Korollar zu Satz 6. *Ist A_{1i} die separable Abschließung der Erzeugung (K_1, K_i) des AF2 A über dem Galoisfeld k, so gilt*

(6.8) $$Z_A(s; K_1, K_i) = Z_{A_{1i}}(s; K_1, K_i).$$

Da (K_1, K_i) stets eine stark separierende Erzeugung von A_{1i} ist, wird durch (6.8) die Berechnung von Zetafunktionen weitgehend von beliebigen auf stark separierende Erzeugungen zurückgeführt.

Literatur

[1] Artin, E.: Algebraic Numbers and Algebraic Functions I. Vorlesung Princeton University 1951. — [2] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Survey VI. New York 1951. — [3a] Deuring, M.: Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z. **47**, 643—654 (1942). — [3b, c] Deuring, M.: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins I, II. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1953**, 85—94; **1955**, 13—42. — [4] Eichler, M.: Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Ann. **116**, 742—748 (1939). — [5a] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951. — [5b] Hasse, H.: Zetafunktionen und L-Funktionen zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1954**, Heft 4. — [6] Krull, W.: Idealtheorie. Erg. Math. Grenzgeb. **4**, Berlin 1935. — [7a] Lamprecht, E.: Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher. Math. Z. **64**, 47—71 (1956). — [7b] Lamprecht, E.: Arithmetische Zetafunktionen zu zyklischen p-Körpern von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld. Arch. Math. **6**, 266—274 (1955). — [8] Tate, J.: Genus Change in Inseparable Extensions of Function Fields. Proc. Amer. Math. Soc. **1952**, 400—406. — [9a] Weil, A.: Jacobi sums as „Größencharaktere". Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 487—495 (1952). — [9b] Weil, A., and S. Lang: Number of Points of Varieties in Finite Fields. Amer. J. Math. **76**, 819—827 (1954).

(Eingegangen am 31. Oktober 1955)

[24]) Dies bestätigt gleichzeitig, daß sich das Geschlecht eines *AF1* über einem Galoisfeld bei endlicher rein inseparabler Erweiterung nicht ändert.

Ackermann, W.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 336—345 (1956)

Zur Axiomatik der Mengenlehre

Von

Wilhelm Ackermann in Lüdenscheid

Die Axiomatik der Mengenlehre hat durch die Arbeiten von E. Zermelo und die sich anschließenden Arbeiten von A. Fraenkel, J. v. Neumann, K. Gödel, P. Bernays u. a. einen hohen Stand der Durchbildung erhalten. An die Stelle der ursprünglichen, infolge ihrer Unbestimmtheit nicht haltbaren Cantorschen Definition der Menge treten hier in der Hauptsache eine Anzahl von Existenzsätzen über besondere, aus anderen zu bildende Mengen. Im folgenden wird ein anderer Weg eingeschlagen. Das nachstehend gegebene besonders einfache Axiomensystem hat keine derart speziellen Erzeugungsprinzipien. Es schließt sich enger an die Cantorsche Konzeption und somit an die naive Mengenlehre an und entsteht aus jener dadurch, daß man an ihr gewisse, anscheinend naturgemäße Verschärfungen vornimmt. § 1 enthält die Grundgedanken in mehr heuristischer Form; § 2 gibt eine präzisere Fassung mit Hilfe der mathematischen Logik. Die in § 1 und § 2 entwickelte reine Mengenlehre reicht, wie durch Vergleich mit anderen Axiomensystemen festgestellt wird, für alle mathematischen Bedürfnisse aus. § 3 enthält in kurzer Andeutung eine allgemeinere Fassung für den Fall, daß auch Mengen von Objekten gebildet werden sollen, die selbst keine Mengen sind.

§ 1

Die Cantorsche Definition der Menge lautet[1]): „Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen."

Sehen wir von den „Objekten der Anschauung" zunächst ab und beschränken wir die „Objekte des Denkens", wie es in der reinen Mengenlehre gebräuchlich ist, auf Mengen, so können wir im Anschluß an diese Definition die folgenden Grundsätze aufstellen:

1. Es sei $\mathfrak{A}(x)$ eine Eigenschaft der Art, daß jedes Ding x mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}(x)$ Menge ist. Es soll dann zunächst eine Zusammenfassung oder eine Gesamtheit der Dinge x mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}(x)$ existieren, so daß „x ist Element dieser Gesamtheit" und $\mathfrak{A}(x)$ als gleichwertige Aussagen angesehen werden.

2. Gesamtheiten mit den gleichen Elementen sollen identisch sein.

3. Nicht jede Gesamtheit von Mengen ist eine Menge. Cantor verlangt dafür, daß sie nur „bestimmte, wohlunterschiedene" Objekte enthält. Da

[1]) Zitiert nach A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., S. 4. Berlin 1928.

wir nun nur mit Gesamtheiten von Mengen zu tun haben und wir von den schon definierten Mengen verlangen müssen, daß sie bestimmt und wohlunterschieden sind, so kann es sich bei der obigen Bedingung für eine Gesamtheit nur darum handeln, daß genügend scharf abgegrenzt sein muß, was zu der Gesamtheit gehört und was nicht zu ihr gehört. Nun ist aber der Mengenbegriff durchaus offen. Die CANTORsche Definition ist doch so gemeint, daß von Fall zu Fall eine Gesamtheit daraufhin untersucht werden soll, ob sie eine Menge darstellt oder nicht, und nicht so, daß damit mit einem Schlage für alle Gesamtheiten festgelegt wird, ob sie Mengen sind oder nicht. Man wird also die Gesamtheit nicht dann als genügend scharf abgegrenzt ansehen können, wenn sie erst durch Beziehung auf den allgemeinen Mengenbegriff definiert werden kann, wie es etwa bei der Gesamtheit aller Mengen der Fall ist. Das führt uns zu der folgenden Bedingung, unter der eine Gesamtheit von Mengen selbst eine Menge darstellt: Die zu der Gesamtheit gehörende Eigenschaft $\mathfrak{A}(x)$ muß so sein, daß sie sich bei ihrer Definition nicht auf die Eigenschaft „ist Menge" bezieht. Wohl aber kann sie auf schon gebildete Mengen Bezug nehmen. Kommen in der Definition von $\mathfrak{A}(x)$ andere Objekte als Parameter vor, so wird die zugehörige Gesamtheit nur dann eine Menge darstellen, wenn diese Objekte Mengen sind, die wir als schon definiert ansehen können.

4. Um auszudrücken, daß überhaupt nur Gesamtheiten von Mengen gegebenenfalls Mengen sein können, wird man bei allgemeinen Sätzen über Mengen die Voraussetzung benutzen: Die Elemente von Mengen sind wieder Mengen. Bei speziellen Mengen ist diese Voraussetzung entbehrlich, da sie sich unmittelbar aus der Definition der Menge ergibt. — Ist ferner eine Gesamtheit in einer Menge m enthalten, d. h. sind alle Elemente der Gesamtheit auch Elemente der Menge m, so dürfen wir den Mengencharakter der Gesamtheit voraussetzen. Denn eine solche Gesamtheit kann ohne Beziehung auf den allgemeinen Mengenbegriff definiert werden, da das Enthaltensein in der Menge m sowieso einschließt, daß alle Elemente der Gesamtheit, Elemente der Elemente der Gesamtheit usw. Mengen sind. Der allgemeine Mengenbegriff ist also für die Abgrenzung dieser Gesamtheit überflüssig, da die Beziehung auf die Menge m genügt. Gemäß 3. dürfen wir also bei allgemeinen Sätzen über Mengen voraussetzen, daß jede Gesamtheit, die in einer Menge enthalten ist, selbst Menge ist. Bei speziellen Mengen wird sich dieser Satz wieder meistens beweisen lassen.

Die Bedingungen 1.—4. sind allein die Grundlage unseres Aufbaues. 3. ist die einzige Forderung, durch die wir die Mengenbildung einschränken. Wir wollen sie näher erläutern. Wir setzen einen gewissen Bereich von Dingen voraus, der an und für sich unbestimmt gelassen werden kann; er soll aber so weit sein, daß die zu bildenden Gesamtheiten und Mengen ihm angehören. Eine Eigenschaft $\mathfrak{A}(x)$ baut sich innerhalb dieses Bereiches aus den Grundbeziehungen „x ist mit y identisch" und „x ist Element von y" mit Hilfe der üblichen logischen Verknüpfungen und evtl. schon definierter Mengen auf. „x ist Element von y" darf dabei nicht einschließen, daß x oder y Menge ist,

da wir sonst indirekt den Begriff „ist Menge“ verwerten würden. Eine besondere Vorsicht ist erforderlich, falls die Eigenschaft $\mathfrak{A}(x)$ neben der Hilfsvariablen x andere Variable als Parameter enthält. Wie wir oben schon andeuteten, muß die Mengenbildung dann an die Bedingung geknüpft werden, daß diese Parameter mit Mengen besetzt sind.

Durch die Forderung 3. wird nun die Mengenbildung so eingeschränkt, daß gerade die „paradoxen Mengen“ nicht gebildet werden können. Zum Beispiel gilt das für die „Menge aller Mengen“. Denn zu „x ist Menge“ gibt es zwar eine Gesamtheit aller Mengen gemäß 1., aber diese Gesamtheit ist keine Menge, da sie nicht der Bedingung 3. genügt. Betrachten wir ferner die zu der Russellschen Paradoxie Anlaß gebende „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“! Die zu „x ist Menge und x ist nicht Element von x“ gehörende Gesamtheit genügt nicht der Bedingung 3. Würden wir als definierende Eigenschaft nur nehmen „x ist nicht Element von x“, so dürfen wir nicht einmal von der entsprechenden Gesamtheit sprechen, weil „x ist nicht Element von x“ nicht einschließt, daß x Menge ist.

Andererseits lassen sich aber überhaupt Mengen bilden. Nehmen wir als definierende Eigenschaft „x ist von x verschieden“, so wird der Bedingung 1. genügt, da jedes x mit dieser Eigenschaft Menge ist (weil es nämlich keine derartigen x gibt). Ferner ist die entsprechende Gesamtheit nach 3. Menge. Neben der Existenz dieser leeren Menge haben wir z. B. die Existenz der Paarmenge. Sind nämlich y und z Mengen, so enthält die aus y und z bestehende Gesamtheit nur Mengen. Da ferner die definierende Eigenschaft für diese Gesamtheit, „$x = y$ oder $x = z$“, der Bedingung 3. genügt, so ist die Gesamtheit eine Menge. Daß wir mit Hilfe von 1.—4. imstande sind, alle notwendigen Mengen zu bilden, wenn wir von den durch Auswahl gebildeten absehen, wird im nächsten Paragraphen ausführlich gezeigt.

Die Mengen, die vermittels des Auswahlaxioms gebildet werden, gehören nicht in diese Reihe. Es handelt sich bei ihnen nicht wie sonst um eine bestimmt definierte Gesamtheit, bei der nur in Frage steht, ob sie als Menge zu betrachten ist oder nicht, sondern es geht darum, ob überhaupt eine die Menge charakterisierende Eigenschaft angegeben werden kann. Ist dieses der Fall, so ergibt sich auch sofort die Existenz der betreffenden Menge gemäß unseren Grundsätzen. Das Auswahlaxiom ist also, wie es auch vielfach geschieht, eher als logisches Axiom denn als mengentheoretisches anzusehen. Es besagt nichts anderes, als daß, wenn in einem Bereiche durch eine Relation jedem Elemente des Bereiches ein oder mehrere Elemente zugeordnet werden, dann auch eine Funktion existiert, die jedem Element des Bereiches genau ein anderes Element zuordnet, und zwar ein solches, das ihm auch durch die Relation zugeordnet war. Die Annahme oder Verwerfung eines derartigen Axioms hat mit den Grundgedanken unseres Aufbaues nichts zu tun.

§ 2

Wir geben jetzt den präziseren formalen Aufbau gemäß den in § 1 entwickelten Grundgedanken mit Hilfe der mathematischen Logik. $x, y, z, \ldots$ mögen Individuenvariable sein. Aus den Primformeln „$x = y$“, „$x \in y$“ (x ist

Element von y) und „Mx" (x ist Menge), wobei statt x und y auch beliebige andere Individuenvariable gebraucht werden können, bauen sich die weiteren Ausdrücke oder Formeln in der üblichen Weise unter Benutzung der logischen Verknüpfungen $\overline{}$ (nicht), & (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (folgt), $\leftrightarrow$ (gleichwertig), (x), (y), ... (für alle x, für alle y, ...) und (Ex), (Ey), ... (es gibt ein x, es gibt ein y, ...) auf. Statt $\overline{x = y}$ schreiben wir wie üblich $x \neq y$, $x \subset y$ benutzen wir als Abkürzung für $(z)\,(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Auf diese Ausdrücke (die also keine Prädikatvariable enthalten), wenden wir den Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Einschluß des Gleichheitskalküls an. $\mathfrak{A}(x)$ bedeute einen beliebigen Ausdruck, der die freie Variable x enthält, $\mathfrak{A}_0(y)$ einen beliebigen Ausdruck, der die freie Variable y enthält und in dem das Zeichen M nicht vorkommt. Zu den Grundformeln des Prädikatenkalküls fügen wir nun die folgenden hinzu, wobei α) und γ) so aufzufassen sind, daß die betreffende Grundformel für jedes $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}_0$ aufgestellt werden kann.

α) $(x)\,(\mathfrak{A}(x) \rightarrow Mx) \rightarrow (Ey)\,(z)\,(z \in y \leftrightarrow \mathfrak{A}(z))$,

β) $(x \subset y \;\&\; y \subset x) \rightarrow x = y$,

γ) $(Mx_1 \& \ldots \& Mx_n) \rightarrow \big((y)\,(\mathfrak{A}_0(y) \rightarrow My) \rightarrow (Ez)\,(Mz \;\&\; (u)\,(u \in z \leftrightarrow \mathfrak{A}_0(u))\big)$,

δ) $(Mx \;\&\; (y \in x \vee y \subset x)) \rightarrow My$,

γ) ist dabei so aufzufassen, daß $x_1, \ldots, x_n$ die in $\mathfrak{A}_0(y)$ neben y vorkommenden freien Variablen sind. Kommen solche nicht vor, so fällt $(Mx_1 \& \ldots \& Mx_n) \rightarrow$ fort.

α)–δ) entsprechen 1.–4. von § 1.

Um zu zeigen, daß wir alle Mengen bilden können, die in der Mathematik gebraucht werden, beweisen wir aus unserem Axiomensystem eine Reihe von Sätzen, die in anderen Systemen als Axiome auftreten.

I. $(Ey)\,(My \;\&\; (z)\,(\overline{z \in y}))$ (Existenz der leeren Menge).

Beweis: Nach γ) hat man

$$(x)\,(x \neq x \rightarrow Mx) \rightarrow (Ey)\,(My \;\&\; (z)\,(z \in y \leftrightarrow z \neq z)).$$

Da das Vorderglied der Implikation richtig ist, erhält man in dem Hinterglied eine der Behauptung äquivalente Formel.

II. $(Mx \;\&\; My) \rightarrow (Ez)\big(Mz \;\&\; (u)\,(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))\big)$.

(Existenz der Paarmenge)

Beweis: $(Mx \;\&\; My) \rightarrow ((u)\,(u = x \vee u = y) \rightarrow Mu)$

$$\rightarrow (Ez)\big(Mz \;\&\; (u)\,(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))\big)$$

ist eine Anwendung von γ). $(u)\,(u = x \vee u = y) \rightarrow Mu)$ kann fortgelassen werden, da es aus $Mx \;\&\; My$ folgt.

III. $Mx \rightarrow (Ey)\big(My \;\&\; (z)\,(z \in y \leftrightarrow (Eu)\,(z \in u \;\&\; u \in x))\big)$

(Existenz der Vereinigungsmenge).

Beweis: Nach δ) gilt $(Mx \;\&\; u \in x) \rightarrow Mu$ und $(Mu \;\&\; z \in u) \rightarrow Mz$, also auch $(Mx \;\&\; u \in x \;\&\; z \in u) \rightarrow Mz$, oder, was gleichwertig ist, $Mx \rightarrow (z)\,((Eu)\,(u \in x \;\&\; z \in u) \rightarrow Mz)$. Mit Hilfe von γ) erhält man dann die Behauptung.

IV. $My \rightarrow (Ez)\,(Mz \;\&\; (x)\,(x \in z \leftrightarrow x \subset y))$. (Existenz der Potenzmenge).

Beweis: Nach δ) gilt $My \to (x)(x \subset y \to Mx)$, woraus sich nach γ) die Behauptung ergibt.

V. $(Ey)\big(My \mathbin{\&} (Ex)((z)(\overline{z \in x}) \mathbin{\&} x \in y) \mathbin{\&} (z)(x)((x \in y \mathbin{\&} (u)(u \in z \leftrightarrow u = x)) \to z \in y)\big)$.

(Existenz einer unendlichen Menge).

Beweis: Wir bezeichnen den Ausdruck

$$(y)\big(((Ez)((u)(\overline{u \in z}) \mathbin{\&} z \in y) \mathbin{\&} (z)(u)((u \in y \mathbin{\&} (v)(v \in z \leftrightarrow v = u)) \to$$
$$\to z \in y) \to x \in y\big)$$

zur Abkürzung mit $\mathfrak{B}_0(x)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{B}_0(x) \mathbin{\&} (z)(z \in y \leftrightarrow Mz)) \to ((Ez)((u)(\overline{u \in z}) \mathbin{\&} Mz)$$
$$\mathbin{\&} (z)(u)(Mu \mathbin{\&} (v)(v \in z \leftrightarrow v = u)) \to Mz)) \to Mx).$$

Nun ist $(Ez)((u)(\overline{u \in z}) \mathbin{\&} Mz)$ beweisbar (vgl. I). Das gleiche gilt für $(z)(u)(Mu \mathbin{\&} (v)(v \in z \leftrightarrow v = u)) \to Mz)$. Denn nach β) ist ein z mit $(v)(v \in z \leftrightarrow v = u)$ eindeutig bestimmt und es gilt auch $Mu \to (Ez)(Mz \mathbin{\&} (v)(v \in z \leftrightarrow v = u))$ (Spezialfall von II). Daher hat man $(\mathfrak{B}_0(x) \mathbin{\&} (z)(z \in y \leftrightarrow Mz)) \to Mx$. Mit Hilfe von α) läßt sich $(Ey)(z)(z \in y \leftrightarrow Mz)$ beweisen. Man erhält also weiter $\mathfrak{B}_0(x) \to Mx$. Unter Benutzung von γ) bekommt man $*$ $(Ew)(Mw \mathbin{\&} (s)(s \in w \leftrightarrow \mathfrak{B}_0(s))$, und mit Hilfe von β) $(z)(\overline{z \in x}) \to ((Ez)((u)(\overline{u \in z}) \mathbin{\&} z \in y)) \to x \in y)$, also auch $**$ $(z)(\overline{z \in x}) \to \mathfrak{B}_0(x)$. Infolge der Struktur von $\mathfrak{B}_0(x)$ ergibt sich $***$ $((u)(u \in w \leftrightarrow u = x) \mathbin{\&} \mathfrak{B}_0(x)) \to \mathfrak{B}_0(w)$. Aus $*$, $**$ und $***$ erhält man dann die Behauptung.

VI. $My \to (Ez)(Mz \mathbin{\&} (x)\big(x \in z \leftrightarrow (\mathfrak{A}(x) \mathbin{\&} x \in y)\big)$.

(Existenz einer durch Aussonderung gebildeten Menge.)

$\mathfrak{A}(x)$ ist ein beliebiger Ausdruck, der nur die freie Variable x enthält. Die Formel läßt sich auch entsprechend beweisen, falls $\mathfrak{A}(x)$ noch weitere freie Variable $z_1, \ldots, z_n$ enthält. In VI ist dann My durch $My \mathbin{\&} Mz_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} Mz_n$ zu ersetzen.

Beweis: $My \to (x)\big((\mathfrak{A}(x) \mathbin{\&} x \in y) \to Mx\big)$ ergibt sich unter Benutzung von δ). Mit Hilfe von α) erhält man $My \to (Ez)(x)\big(x \in z \leftrightarrow (\mathfrak{A}(x) \mathbin{\&} x \in y)\big)$, weiter $(x)\big(x \in z \leftrightarrow (\mathfrak{A}(x) \mathbin{\&} x \in y)\big) \to z \subset y$, also wegen δ) auch $My \to \big((x)(x \in z \leftrightarrow (\mathfrak{A}(x) \mathbin{\&} x \in y)) \to Mz\big)$. Aus der letzten und vorvorletzten Formel ergibt sich mit Hilfe von β) die Behauptung.

Die Existenz der durch das Ersetzungsaxiom der Mengenlehre gelieferten Mengen läßt sich in der folgenden Form beweisen: Es sei $\mathfrak{A}_0(x, y)$ ein Ausdruck, der nicht M und nur die freien Variablen x und y enthält. Ferner sei $(\mathfrak{A}_0(x, y) \mathbin{\&} Mx) \to My$ beweisbar. Dann gilt

VII. $Mz \to (Eu)\big(Mu \mathbin{\&} (x)(x \in u \leftrightarrow ((Ey)\mathfrak{A}_0(y, x) \mathbin{\&} y \in z))\big)$.

Die sonst bei der Formulierung des Ersetzungsaxioms übliche Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}_0(x, y)$ eine Funktion darstellt, d. h. daß $(\mathfrak{A}_0(x, y) \mathbin{\&} \mathfrak{A}_0(x, z)) \to y = z$ beweisbar ist, ist hier nicht einmal erforderlich.

Beweis von VII: Da $(Mz \mathbin{\&} y \in z) \to My$ und $(My \mathbin{\&} \mathfrak{A}_0(y, x)) \to Mx$ beweisbar ist, so gilt auch $Mz \to \big((Ey)(\mathfrak{A}_0(y, x) \mathbin{\&} y \in z) \to Mx\big)$. Mit Hilfe von γ) erhält man dann die Behauptung.

Damit sind, wenn wir von dem Auswahlaxiom absehen, alle Axiome des Systems von A. FRAENKEL[2]), mit dem sich unser System am einfachsten vergleichen läßt, bewiesen, ohne daß dadurch die Reichweite des Axiomensystems abgegrenzt ist. Es könnte übrigens scheinen, daß Satz VII nicht so viel aussagt wie das FRAENKELsche Ersetzungsaxiom, weil wir in der Formulierung uns auf die Ausdrücke $\mathfrak{A}_0$ beschränkten. Das ist aber nicht der Fall. In der FRAENKELschen Fassung lautet das Axiom: Ist m eine Menge und φx eine Funktion, so existiert auch die Menge, die aus m hervorgeht, falls man jedes Element x von m durch die Menge φx ersetzt. Der Begriff der Funktion wird bei FRAENKEL rekursiv definiert. Als Funktion von x gilt: a) jede feste Menge, b) die Menge x selbst, c) die Vereinigungsmenge von x, d) die Potenzmenge von x, e) falls φx und ψx Funktionen von x sind, das Paar $\{\varphi x, \psi x\}$, f) $\varphi \psi x$, falls φx und ψx Funktionen sind. — Falls man ferner eine der konstanten Mengen, die bei der Bildung einer Funktion φx herangezogen werden, unbestimmt bzw. veränderlich läßt und mit y bezeichnet, so kann man φx als Funktion $\psi x y$ zweier Argumente ansehen. Entsprechend gelangt man zu Funktionen von noch mehr Variablen. Ferner haben wir: g) es seien $\alpha\, y$, $\varphi\, x\, y$ und $\psi\, x\, y$ Funktionen, dann heißt die Menge derjenigen x, für die $x \in \alpha\, y$ und $\varphi\, xy \in \psi\, xy$ ist, eine Funktion von y. h) Falls α, φ, ψ die gleiche Bedeutung haben wie bei g), so ist die Menge derjenigen x, für die $x \in \alpha y$ und für die $\varphi\, xy \in \psi\, xy$ falsch ist, eine Funktion von y. i) Sind $\varphi\, xy$ und $\psi\, xy$ Funktionen und existiert für jede Menge y die Menge $\Phi(y)$ derjenigen x, für die $\varphi\, xy \in \psi\, xy$, so ist $\Phi(y)$ eine Funktion von y.

Wir definieren nun in unserem Formalismus einen Funktionsbegriff in der folgenden Weise: Der Ausdruck $\mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y)$ $(n \geqq 1)$, wobei $x_1, \ldots, x_n, y$ sämtliche freien Variable von $\mathfrak{A}_0$ sind, definiere y als mengentheoretische Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, wenn folgendes beweisbar ist:

1. $(M x_1 \& \ldots \& M x_n) \rightarrow (Ey)\,(\mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y) \,\&\, M y)$;
2. $(\mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y) \,\&\, \mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; z) \,\&\, M x_1 \& \ldots \& M x_n) \rightarrow y = z$.

Ist 1. und 2. beweisbar, so sagen wir, daß $\mathfrak{Fu}(\mathfrak{A}_0)$ beweisbar ist.

Offenbar ist nun gezeigt, daß die FRAENKELsche Fassung des Ersetzungsaxioms in VII enthalten ist, wenn unser Funktionsbegriff den Bedingungen a)—i) genügt. Dies ist der Fall, denn jedesmal haben wir entsprechende beweisbare Formeln. Es genügt, wenn wir den Beweis von 1. kurz andeuten, da sich 2. in allen Fällen sofort mit Hilfe von β) beweist.

a) $\mathfrak{A}_0(x; y)$ ist hier $y = m$, wo m Menge ist.

$M m \rightarrow (M x \rightarrow (E y)\,(y = m \,\&\, M y))$ ist beweisbar.

b) $\mathfrak{A}_0(x; y)$ ist hier $y = x$

$M x \rightarrow (E y)\,(y = x \,\&\, M y)$ ist beweisbar.

c) $(u)\,(u \in y \rightarrow (Ev)\,(u \in v \,\&\, v \in x))$ werde zur Abkürzung mit $\mathfrak{V}_0(x; y)$ bezeichnet. Ist x eine Menge, so bedeutet $\mathfrak{V}_0(x; y)$, daß y die Vereinigungsmenge von x ist. Es ist beweisbar:

$$M x \rightarrow (E y)\,(\mathfrak{V}_0(x; y) \,\&\, M y) \quad \text{(vgl. III)}.$$

[2]) A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928; Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. Leipzig 1927.

d) $(z)(z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ werde mit $\mathfrak{P}_0(x; y)$ bezeichnet. Ist x Menge, so bedeutet $\mathfrak{P}_0(x; y)$, daß y die Potenzmenge von x ist. Es ist beweisbar

$$M x \to (E y)(\mathfrak{P}_0(x; y) \,\&\, M y) \quad \text{(vgl. IV)}.$$

e) $\mathfrak{A}_0(x; y)$ und $\mathfrak{B}_0(x; y)$ mögen Funktionen darstellen. Definieren wir nun $\mathfrak{C}_0(x; y)$ als $(u)\big(u \in y \leftrightarrow (\mathfrak{A}_0(x; u) \vee \mathfrak{B}_0(x; u))\big)$, so bedeutet $\mathfrak{C}_0(x; y)$, daß y die Paarmenge der beiden durch $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ definierten Funktionen ist. Es ist beweisbar

$$M x \to (E y)(\mathfrak{C}_0(x; y) \,\&\, M y) \quad \text{(unter Benutzung von II)}.$$

Alle diese Formeln können auch in der folgenden Weise verallgemeinert werden, entsprechend dem bei der Fraenkelschen Definition des Funktionsbegriffs erwähnten Übergang zu Funktionen mehrerer Variablen: $\mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y)$ habe die Funktionseigenschaft; es sei also bewiesen

1. $(M x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, M x_n) \to (E y)(\mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y) \,\&\, M y)$

und

2. $(M x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, M x_n \,\&\, \mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y) \,\&\, \mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; z)) \to y = z$.

Es mögen weiter die $x_1, \ldots, x_n$ ihrerseits mengentheoretische Funktionen gewisser Variablen $z_1, \ldots, z_m$ sein, d. h. $\mathfrak{B}_0^1(z_1, \ldots, z_m; x_1), \ldots, \mathfrak{B}_0^n(z_1, \ldots, z_m; x_n)$ mögen ebenfalls Funktionen darstellen. Dann läßt sich leicht beweisen $(M z_1 \,\&\, \ldots \,\&\, M z_m) \to (E y)\,((E x_1) \ldots (E x_n)\,(\mathfrak{B}_0^1(z_1, \ldots, z_m; x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_0^n(z_1, \ldots, z_m; x_n) \,\&\, \mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y)) \,\&\, M y)$ und ebenfalls die zweite Bedingung für das Funktionsein. $(E x_1) \ldots (E x_n)\,(\mathfrak{B}_0^1(z_1, \ldots, z_m; x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_0^n(z_1, \ldots, z_m; x_n) \,\&\, \mathfrak{A}_0(x_1, \ldots, x_n; y))$ definiert dann wieder y als Funktion von $z_1, \ldots, z_m$.

f) Es mögen $\mathfrak{A}_0(x; y)$ und $\mathfrak{B}_0(x; y)$ Funktionen darstellen. Definieren wir nun $\mathfrak{C}_0(x; y)$ als $(E z)(\mathfrak{B}_0(x; z) \,\&\, \mathfrak{A}_0(z; y))$, so stellt $\mathfrak{C}_0$ die durch Ineinanderschachtelung der beiden Funktionen entstehende Funktion dar. Offenbar ist $\mathfrak{Fu}(\mathfrak{C}_0)$ beweisbar.

g) Es mögen $\mathfrak{A}_0(x; y)$, $\mathfrak{B}_0(x_1, x_2; y)$ und $\mathfrak{C}_0(x_1, x_2; y)$ Funktionen darstellen. Wir definieren nun $\mathfrak{D}_0(x; y)$ als $(u)\,(u \in y \leftrightarrow (E v)\,(\mathfrak{A}_0(x; v) \,\&\, u \in v) \,\&$ $\&\, (E v)\,(E w)\,(\mathfrak{B}_0(u, x; v) \,\&\, \mathfrak{C}_0(u, x; w) \,\&\, v \in w))$. Dann gilt $\mathfrak{Fu}(\mathfrak{D}_0)$.

Beweis: $M x \to \big((E v)\,(\mathfrak{A}_0(x; v) \,\&\, u \in v) \to M u\big)$ ist wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von $\mathfrak{A}_0$ mit Hilfe von δ) beweisbar. Die Behauptung ergibt sich dann mit Hilfe von γ).

h) Ändern wir die Definition von $\mathfrak{D}_0(x; y)$ bei g) so ab, daß $v \in w$ durch $\overline{v \in w}$ ersetzt wird, so geht der Beweis unverändert.

i) Es mögen $\mathfrak{A}_0(x_1, x_2, y)$ und $\mathfrak{B}_0(x_1, x_2; y)$ Funktionen darstellen. Ferner möge

$$M x \to (E v)\,(M y \,\&\, (u)\,(u \in y \leftrightarrow (E v)\,(E w)\,(\mathfrak{A}_0(u, x; v) \,\&\, \mathfrak{B}_0(u, x; w) \,\&\, v \in w))$$

beweisbar sein. Bezeichnen wir nun

$$(u)\,(u \in y \leftrightarrow (E v)\,(E w)\,(\mathfrak{A}_0(u, x; v) \,\&\, \mathfrak{B}_0(u, x; w) \,\&\, v \in w))$$

mit $\mathfrak{C}_0(x; y)$, so gilt offenbar $\mathfrak{Fu}(\mathfrak{C}_0)$.

Die Formulierung verschiedener vorher bewiesener Sätze läßt sich übrigens einfacher gestalten, wenn wir annehmen, daß in dem zugrunde liegenden

Prädikatenkalkül ein „derjenige, welcher", ein $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, eingeführt wird. Die $\mathfrak{A}(x)$ entsprechende Menge kann dann durch $\lambda_x \mathfrak{A}(x)$ ausgedrückt werden, wobei $\lambda_x \mathfrak{A}(x)$ als Abkürzung für $\iota_x(y)\,(y \in x \leftrightarrow \mathfrak{A}(y))$ aufgefaßt werden kann.

Das Auswahlaxiom, über das wir uns am Schlusse von § 1 ausließen, kann leicht bewiesen werden, wenn das zugrunde liegende System des Prädikatenkalküls eine ε-Funktion im Sinne Hilberts enthält, d. h. wenn zu jeder Formel $\mathfrak{A}(x)$ des Kalküls ein Term $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ vorhanden ist, für den $(E x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\mathfrak{A}\,\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$ beweisbar ist. Denn ist m eine Menge, deren Elemente sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementenfremd sind, dann läßt sich eine Gesamtheit definieren, die mit jedem Element von m gerade ein Element gemeinsam hat, aber keine anderen Elemente besitzt. Offenbar wäre

$$\lambda_x (E y)\,(y \in m \;\&\; x = \varepsilon_z (z \in y))$$

eine derartige Gesamtheit; diese ist ferner eine Menge nach δ), da sie in der nach III existierenden Vereinigungsmenge von m enthalten ist. Soll eine derartige Hilbertsche ε-Funktion nicht in den Prädikatenkalkül eingeführt werden und will man nicht auf das Auswahlaxiom verzichten, so kann dies in der üblichen Form formuliert und als Axiom hinzugefügt werden.

Eine Bemerkung sei noch gemacht über die Folgerungen, die sich in unserem Formalismus beim Auftreten der Gesamtheiten ergeben, die in der naiven Mengenlehre zu den Paradoxien Anlaß geben. Es genügt, wenn wir die Russellsche Paradoxie betrachten, da für andere ähnliche Verhältnisse vorliegen. Daß wir nicht die Existenz der paradoxen „Menge" beweisen können, war schon in § 1 gesagt worden. Setzen wir nun im Axiom α) für $\mathfrak{A}(x)$ $\overline{x \in x} \;\&\; M x$ ein, so erhalten wir, da das Vorderglied der Implikation beweisbar wird, $(E y)\,(z)\,(z \in y \leftrightarrow \overline{z \in z} \;\&\; M z)$. Hieraus ergibt sich als Folgerung $(E y)\,(y \in y \leftrightarrow \overline{y \in y} \;\&\; M y)$ oder $(E y)\,(\overline{y \in y} \;\&\; \overline{M y})$. Das heißt die Gesamtheit der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, ist keine Menge, und sie enthält sich nicht selbst als Element. — Ein Widerspruch ist darin nicht enthalten. Ferner erhalten wir als Spezialfall von γ)

$$(x)\,(\overline{x \in x} \rightarrow M x) \rightarrow (E z)\,(M z \;\&\; (u)\,(u \in z \leftrightarrow \overline{u \in u})).$$

Hier enthält das Hinterglied der Implikation einen Widerspruch, da $(E z)\,(z \in z \leftrightarrow \overline{z \in z})$ eine Folgerung davon ist. Demnach können wir die Negation des Vordergliedes beweisen, also $(E x)\,(\overline{x \in x} \;\&\; \overline{M x})$, was mit dem vorigen Ergebnis übereinstimmt.

§ 3

Das in § 2 angegebene Axiomensystem reicht für die reine Mengenlehre aus. Sollen auch Mengen vorkommen, deren Elemente nicht immer wieder Mengen sind und die den „Objekten der Anschauung" Cantors entsprechen, so müssen wir den Formalismus etwas abändern. Wir wollen uns mit einigen Andeutungen begnügen. Nichtmengen treten dann auf, wenn unser mengentheoretischer Formalismus in Verbindung mit den spezifischen Axiomen für ein anderes Sachgebiet gebraucht wird, z. B. in Verbindung mit dem Hilbertschen Axiomensystem für die Geometrie. Die Nichtmengen sind im letzten

Fall die Punkte, Geraden und Ebenen. Beschränken wir uns auf die Axiome der Anordnung, so erweitern wir die in § 2 beschriebenen Ausdrücke dadurch, daß wir zusätzlich die Primformeln „Px" (x ist Punkt), „Gx" (x ist Gerade), „Ex" (x ist Ebene) und „Lxy" (x liegt auf y) einführen. Das Axiom α) wird nun in der Weise verändert, daß „Mx" durch „$Mx \vee Px \vee Gx \vee Ex$" ersetzt wird. Die Axiome β) und δ) behalten ihre Gestalt. In Axiom γ) wird jedes Mx_i durch $Mx_i \vee Px_i \vee Gx_i \vee Ex_i$ ersetzt und My durch $My \vee Py \vee Gy \vee \vee Ey$, während Mz unverändert stehen bleibt. — Die Axiome der Anordnung werden dann in der üblichen Weise formuliert, also etwa I 1 als

$$(x)\,(y)\,((Px \,\&\, Py) \to (Ez)\,(Gz \,\&\, Lxz \,\&\, Lyz)), \text{ usw.}$$

Dieser Aufbau würde dann nicht nur die im Prädikatenkalkül der ersten Stufe möglichen Folgerungen und die mengentheoretischen Folgerungen aus dem Axiomensystem zu ziehen gestatten, sondern auch die darauf angewandte Prädikatenlogik der höheren Stufen ersetzen.

Will man die Mengentheorie so aufbauen, daß zwar Mengen berücksichtigt werden, deren Elemente nicht Mengen sind, ohne daß diese Elemente näher gekennzeichnet werden, so führt man statt der obigen Primformeln „Px", „Gx", „Ex" nur die Primformel „Ix" ein (zu lesen: „x ist Grundobjekt"). Die Axiome nehmen dann die folgende Gestalt an, wobei Ox eine Abkürzung für $Mx \vee Ix$ sein möge:

α') $(x)\,(\mathfrak{A}(x) \to Ox) \to (Ey)\,(z)\,(z \in y \leftrightarrow \mathfrak{A}(z))$,

β') $(x \subset y \,\&\, y \subset x) \to x = y$,

γ') $(Ox_1 \,\&\, \ldots \,\&\, Ox_n) \to ((y)\,(\mathfrak{A}_0(y) \to Oy) \to$
$\to (Ez)\big(Mz \,\&\, (u)\,(u \in z \leftrightarrow \mathfrak{A}_0(u))\big)$

δ') $(Mx \,\&\, (y \in x \vee y \subset x)) \to Oy$.

Man kann übrigens den zuletzt genannten Aufbau auch in jedem Falle zugrunde legen. Im obigen Fall der Hinzunahme der geometrischen Axiome müßte man denn $(Px \vee Gx \vee Ex) \to Ix$ als weitere Grundformel hinzufügen.

Es seien nun noch einige abschließende Bemerkungen zu dem in dieser Arbeit gegebenen Aufbau der Mengenlehre gegeben. Die in Bedingung 3. von § 1 geforderte Einschränkung bei der Bildung von Mengen erinnert in gewisser Weise an eine verzweigte Typentheorie, da eben von den Mengen im allgemeinen verlangt wird, daß sie sich ohne den Begriff „ist Menge" definieren lassen. Doch ist diese Einschränkung viel weniger weitgehend als die verzweigte Typentheorie. Denn es wird zugelassen, daß Mengen mit Hilfe von Quantoren über einem Bereich definiert werden, unter dessen Elementen auch die Mengen vorkommen, falls nur nicht in der Definition speziell auf den Mengenbegriff Bezug genommen wird. (Für den Beweis von V ist das z. B. wesentlich.) Zusatzaxiome, daß dieser Bereich nur aus den Mengen besteht, sind sinngemäß ausgeschlossen und würden auch sofort eine Paradoxie ergeben. Wir zeigten ja am Schluß von § 2, daß die Existenz von Nichtmengen beweisbar ist.

Man könnte nun auch durch Erweiterung unseres Axiomensystems eine Typentheorie der Mengen aufbauen in der folgenden Weise: Eine Menge, die ohne Beziehung auf den Mengenbegriff definiert werden kann, ist eine Menge

1. Art. Eine Menge, deren Definition sich auf die Mengen 1. Art bezieht, ist eine Menge 2. Art, was nicht ausschließen würde, daß sie evtl. mit einer Menge 1. Art identisch ist, usw. Formal würde, wenn wir uns auf Mengen endlicher Stufen beschränken, das Axiomensystem von § 2 in der folgenden Weise zu erweitern sein: Wir führen neben den früheren die Primformeln $M_1 x$ (x ist Menge 1. Art), $M_2 x$ (x ist Menge 2. Art) und überhaupt $M_\mathfrak{n} x$ für jede konkrete natürliche Zahl $\mathfrak{n}$ ein. $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}(y)$ ($\mathfrak{n} \geq 0$) bedeute einen Ausdruck, der die freien Variablen $y, x_1, \ldots, x_n$ enthält und in dem kein Zeichen $M_\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$) vorkommt. Die Axiome sehen dann so aus:

$$\alpha'')\ (M_{\mathfrak{n}+1}x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, M_{\mathfrak{n}+1}x_n) \to ((y)\,(\mathfrak{A}_\mathfrak{n}(y) \to M_{\mathfrak{n}+1}y) \to$$
$$\to (Ez)\,\big(M_{\mathfrak{n}+1}z \,\&\, (u)\,(u \in z \leftrightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{n}(u))\big),$$

$\beta'')$ $(x \subset y \,\&\, y \subset x) \to x = y$,

$\gamma'')$ $(M_\mathfrak{n} x \,\&\, (y \in x \vee y \subset x)) \to M_\mathfrak{n} y$,

$\delta'')$ $M_\mathfrak{n} x \to M_{\mathfrak{n}+1} x$,

$\varepsilon'')$ $M_\mathfrak{n} x \to M x$.

Aus diesem System würde sich z. B. beweisen lassen (vgl. den Schluß von § 2): Es gibt eine Menge zweiter Art, deren Elemente gerade die Mengen erster Art sind, die nicht Elemente von sich selbst sind. Diese Menge, die nicht von der ersten Art ist, enthält sich selbst nicht als Element.

Doch hat eine derartige Erweiterung des Axiomensystems kein großes Interesse, da alle wichtigen Mengen schon unter den Mengen erster Art enthalten sind und daher der in § 2 gegebene Aufbau durchaus genügt. Bei diesem sind nur die Mengen erster Art als Mengen bezeichnet, während die Mengen zweiter Art Gesamtheiten genannt wurden. Mengen weiterer Art treten nicht auf.

(Eingegangen am 18. November 1955)

THULLEN, P.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 346—353 (1956)

Über das Konvergenzproblem der relativen Häufigkeiten in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Von

PETER THULLEN in Genf

Einleitung

Eine der Hauptrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie vor allem von R. v. MISES entwickelt wurde, beruht auf der Forderung der Konvergenz der relativen Häufigkeiten eines Ereignisses E in einer als unbegrenzt fortsetzbar gedachten Versuchsfolge der einfachen Alternative $E, \bar{E}$. Die vorliegende Arbeit geht von der Annahme der Existenz solcher unbegrenzten Versuchsfolgen aus — die wir uns als unendliche, nur aus Nullen und Einsern bestehende Zahlenfolgen vorstellen können — und bezweckt eine rein arithmetische Untersuchung der Frage der Konvergenz oder Divergenz der relativen Häufigkeiten von E in einer derartigen Folge.

Zunächst wird gezeigt, daß die Konvergenz der relativen Häufigkeiten als notwendige Folge aus der schwächeren Annahme der „Quasikonvergenz" abgeleitet werden kann. Die Aufteilung einer unendlichen Versuchsfolge in Abschnitte gleicher Länge führt dann zur Definition einer ausgezeichneten Klasse, die der bernoullischen Folgen, wobei bewiesen wird, daß in einer solchen Folge die relativen Häufigkeiten des Grundereignisses E notwendig konvergent sind. Schließlich werden die relativen Häufigkeiten von E in beliebigen Gruppen aufeinanderfolgender Abschnitte gleicher Länge der gegebenen Versuchsfolge untersucht, wodurch man zu einer Einteilung der bernoullischen Folgen in eigentliche und uneigentliche gelangt.

Es ist wichtig festzustellen, daß *sämtliche hier aufgestellten Sätze über relative Häufigkeiten als Sonderfälle allgemeinerer Aussagen über das Verhalten arithmetischer Mittel, die beschränkten unendlichen Zahlenfolgen zugeordnet sind, erscheinen*[1]).

§ 1. Quasikonvergenz und relative Häufigkeiten

Gegeben sei eine Versuchsfolge F der einfachen Alternative des Eintreffens (E) oder Nichteintreffens ($\bar{E}$) des Ereignisses E, die wir uns unbegrenzt fortsetzbar vorstellen. Die relative Häufigkeit des Ereignisses E vom ersten bis zum n-ten Gliede der Folge F sei mit h_n bezeichnet.

---

[1]) Ich möchte nicht versäumen, Herrn HENRI CARTAN, der die Freundlichkeit hatte, das Manuskript dieser Arbeit durchzulesen, für mehrere wertvolle Hinweise zu danken, so für den Hinweis auf die Gültigkeit der aufgestellten Sätze auch für die arithmetischen Mittel, die beschränkten unendlichen Folgen reeller Zahlen zugeordnet sind, und auf den Begriff der „Konvergenz nach einem Filter", als deren Sonderfall der hier eingeführte Begriff der Quasikonvergenz erscheint, und insbesondere für den durch die Aufstellung des Hilfssatzes wesentlichen vereinfachten Beweis des Satzes 3.

Ordnet man nun E die Zahl „1" und $\bar{E}$ die Zahl „0" zu, so erscheint die gegebene Folge F als *Sonderfall einer unendlichen beschränkten Folge reeller Zahlen* $\{a_n\}$ *und* h_n *als das arithmetische Mittel der ersten* n *Elemente dieser Folge.*

Anstatt die strenge Konvergenz der relativen Häufigkeiten h_n vorauszusetzen, gehen wir von jener intuitiven Auffassung der Wahrscheinlichkeit $p = P(E)$ aus, nach welcher es in einer noch so ausgedehnten Versuchsfolge vorkommen kann, daß die relative Häufigkeit h_n von der Wahrscheinlichkeit p um eine vorgegebene kleine Größe abweiche. Es sei dabei vorausgesetzt, daß ihrerseits die relative Häufigkeit dieser Abweichungen mit wachsendem n gegen Null gehe. Eine solche Folge relativer Häufigkeiten h_n wollen wir quasikonvergent nennen.

Ganz allgemein sei die Quasikonvergenz einer unendlichen Zahlenfolge wie folgt definiert:

Definition[2]. *Eine unendliche Zahlenfolge* $\{b_n\}$ *heiße quasikonvergent gegen die Zahl* b_0:

$$b_0 = Q \lim_{n\to\infty} b_n,$$

falls für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$

$$|b_n - b_0| < \varepsilon \qquad \textit{für „fast alle" } n;$$

hierbei soll der Ausdruck „fast alle" so gedeutet werden, daß im Abschnitt $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *die relative Häufigkeit der Zahlen* b_i, *für die* $|b_i - b_0| \geqq \varepsilon$, *mit* $n \to \infty$ *gegen Null konvergiert.*

Ein Beispiel einer divergenten, aber noch quasikonvergenten Folge ist dieses:

$$b_n = \frac{1}{n} \text{ für } n \neq 10^m; \qquad b_n = 1 \text{ für } n = 10^m.$$

Offenbar ist $Q \lim b_n = 0$; ein zweiter Häufungspunkt ist 1.

Es lassen sich leicht Beispiele mit unendlich vielen Häufungspunkten angeben. Trotzdem ist die Konvergenz stets auf einen bestimmten Wert hin konzentriert — zu dem „praktisch" alle b_n hinstreben — und die „Wahrscheinlichkeit" der Ausnahmewerte gleich Null. So scheint also die Quasikonvergenz sich der intuitiven Auffassung der „praktischen Gewißheit" oder „praktischen Konvergenz", welcher man so häufig in der Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie begegnet, anzupassen.

Untersucht man nun quasikonvergente Folgen relativer Häufigkeiten, findet man das zunächst überraschende Ergebnis, daß sie stets auch im strengen Sinne konvergent sind. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satz:

---

[2]) Die Quasikonvergenz kann als Sonderfall der „Konvergenz nach einem Filter $\mathfrak{F}$" aufgefaßt werden (s. N. Bourbaki: Topologie Générale. Paris 1940). Im obigen Falle ist $\mathfrak{F}$ ein Filter über der Menge N aller ganzen, positiven Zahlen, welcher sämtliche Teilmengen $A \subset N$ enthält, für die der Quotient der Anzahl der Elemente des von A und den n ersten Zahlen von N gebildeten Durchschnittes dividiert durch n mit $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert.

Mit quasikonvergenten Folgen kann genau wie mit konvergenten Folgen gerechnet werden. Dies folgt aus der „Konvergenz nach einem Filter", kann aber auch unabhängig davon leicht nachgewiesen werden. Ebenso gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz 1. *Gegeben sei eine unendliche beschränkte Folge F reeller Zahlen $\{a_n\}$; h_n sei das arithmetische Mittel der n ersten Elemente: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ist dann die Folge der h_n quasikonvergent, so ist sie notwendig auch konvergent.*

Beweis. Es sei

$$p = Q \lim_{n\to\infty} h_n \tag{1}$$

und $m \leqq a_n \leqq M$ für alle n.

Wir nehmen an, p sei nicht der einzige Häufungspunkt der h_n. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine unendliche Folge von Indizes n_i, so daß

$$|h_{n_i} - p| \geqq 2\,\varepsilon_0 \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Nach (1) gibt es andererseits zu ε_0 eine unendliche Folge von Indizes r_i, so daß

$$|h_{r_i} - p| < \varepsilon_0, \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Wir greifen unter den n_i, die (2) genügen, ein $n_0 = n_{i_0}$ heraus; r_0 sei dann unter den r_i der höchste Index unterhalb n_0, der noch (3) genügt. Es soll die Mindestanzahl μ der zwischen den Indizes r_0 und n_0 liegenden Elemente der Folge F bestimmt werden. μ ist sicher dann ein Minimum, falls entweder: a) $p \leqq h_{r_0} < p + \varepsilon_0$ und alle Elemente zwischen r_0 und n_0 gleich der oberen Schranke M sind, bis schließlich $h_{r_0+\mu} \geqq p + 2\,\varepsilon_0$; oder b) falls $p - \varepsilon_0 < h_{r_0} \leqq p$ und alle Elemente zwischen r_0 und n_0 gleich der unteren Schranke m sind, bis $h_{r_0+\mu} \leqq p - 2\,\varepsilon_0$.

Der Beweis verläuft in beiden Fällen analog, und es genügt, ihn für die Alternative a) durchzuführen, wobei wir $p < M$ und auch noch $p + 2\,\varepsilon_0 < M$ annehmen dürfen. Unter Voraussetzung dieser Alternative und Benutzung von (2) und (3) erhält man für μ die folgende Ungleichung:

$$(p + \varepsilon_0)\, r_0 + \mu\, M > (p + 2\,\varepsilon_0)\,(r_0 + \mu)$$

oder

$$\mu > \frac{r_0\,\varepsilon_0}{M - p - 2\,\varepsilon_0}.$$

Gemäß der über r_0 gemachten Voraussetzung müssen alle h_n, $r_0 < n \leqq n_0$, Ausnahmewerte der Ungleichung (3) sein. Die relative Häufigkeit dieser Ausnahmewerte bezüglich der Gesamtzahl aller h_n, $n \leqq n_0$ — ohne frühere Ausnahmewerte zu berücksichtigen — ist daher mindestens $\frac{\mu}{r_0 + \mu}$, d. h. größer als $\frac{\varepsilon_0}{M - p - \varepsilon_0}$.

Dieser Wert ist vom Index i_0 unabhängig, muß daher für die (linke) Umgebung jedes der unendlich vielen n_i, die (2) genügen, gelten. Hieraus folgt, daß die relative Häufigkeit der Ausnahmewerte h_n, für die $|h_n - p| \geqq 2\,\varepsilon_0$, einen von Null verschiedenen oberen Limes besitzt. Es könnte also — im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes — p nicht der Quasilimes der h_n sein. Unsere Annahme, p sei nicht der einzige Häufungspunkt der h_n, ist demnach falsch und somit der Satz bewiesen.

Sind nun andererseits die einer gegebenen Folge F zugehörigen h_n divergent und bezeichnet man $p_0 = \underline{\lim}\, h_n$, $p_1 = \overline{\lim}\, h_n$, so muß — da die Differenz zweier

aufeinanderfolgender h_n beliebig klein wird — jedes p, $p_0 \leqq p \leqq p_1$, Häufungspunkt der h_n sein. Aus Satz 1 folgt unmittelbar, daß *sich jedem dieser p ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ zuordnen lassen, so daß für $n \to \infty$ der obere Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintreffens der Ungleichung $|h_n - p| \geqq \varepsilon$ größer $\delta > 0$ ist.* Da die p ein geschlossenes Intervall ausfüllen, gibt es sogar ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $\delta_0 > 0$, die für alle p, $p_0 \leqq p \leqq p_1$, gültig sind.

Dieses Ergebnis zeigt, daß man unter Annahme unbegrenzter Versuchsfolgen der Alternative E, $\bar{E}$ im Falle der *Divergenz* der zugehörigen relativen Häufigkeiten h_n schwerlich einen ihrer Häufungspunkte als die „Wahrscheinlichkeit" des Grundereignisses E wird ansprechen können.

§ 2. *Bernoullische Folgen*

Während die relativen Häufigkeiten h_n (bzw. arithmetische Mittel) sich auf die *ersten* n Elemente der gegebenen Versuchsfolge F beziehen, soll nunmehr die Untersuchung auf die relativen Häufigkeiten in Abschnitten der Länge n, d. h. von je n aufeinanderfolgenden Elementen der Folge F ausgedehnt werden.

Gegeben sei eine unbegrenzt fortsetzbare Versuchsfolge F der Alternative $E(=1)$, $\bar{E}(=0)$, die wir uns in Abschnitte gleicher Länge aufgeteilt denken. Ist A ein solcher Abschnitt, so bezeichnen wir mit $N(A)$ seine Länge und mit h_A die relative Häufigkeit von E in A.

Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_t$ die t *ersten* Abschnitte der Länge $n = N(A_i)$. Sind dann eine feste Zahl p und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so fragen wir nach der relativen Häufigkeit des Eintreffens der Ungleichung

$$|h_{A_i} - p| < \varepsilon, \qquad 1 \leqq i \leqq t. \tag{4}$$

Diese hängt bei festem p nur von ε und n und dem laufenden Index t ab und sei mit $H_t(\varepsilon, n)$ bezeichnet.

Wir wollen uns insbesondere mit Versuchsfolgen befassen, in welchen für einen bestimmten Wert p die Aussage des bernoullischen Satzes rein formal in dem Sinne gilt, daß für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und genügend großes n und t die relativen Häufigkeiten $H_t(\varepsilon, n)$ beliebig nahe bei 1 liegen, d. h. genauer, daß es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ und $\eta < 1$ ein n_0 gibt, so daß

$$\varliminf_{t \to \infty} H_t(\varepsilon, n) > \eta \qquad \text{für jedes } n \geqq n_0.$$

Eine Folge, welche dieser Bedingung genügt, sei eine *bernoullische Folge* genannt[3]).

Es läßt sich nun zeigen, daß in einer bernoullischen Folge die relativen Häufigkeiten h_r des Grundereignisses E notwendig gegen p konvergieren. Dies folgt aus einem allgemeineren Satze, in welchem die Konvergenz aus einer schwächeren Voraussetzung als die der Grundeigenschaft einer bernoullischen Folge hergeleitet wird. In der Tat gilt:

[3]) Zum Begriff der bernoullischen Folge vgl. auch R. v. Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Dritte, neubearbeitete Auflage, S. 133—134. Wien 1951.
Man beachte, daß in obiger Definition nicht die Existenz des $\lim H_t$ vorausgesetzt wird.

Satz 2[4]**).** *Gibt es zu einer reellen Zahl p eine unendliche Folge von je vier positiven Zahlen* $(\varepsilon_i, \eta_i, n_i, t_i)$ $(\varepsilon_i \to 0,\ \eta_i < 1$ *aber* $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 1,\ n_i$ *und* t_i *ganz), so daß*

$$H_t(\varepsilon_i, n_i) \geqq \eta_i, \qquad t \geqq t_i,$$

so ist $p = \lim\limits_{r\to\infty} h_r$.

Beweis. Es sei ein festes, sonst beliebig kleines $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein i_0, so daß $\varepsilon_0 = \varepsilon_{i_0} < \varepsilon$ und gleichzeitig $1 - \varepsilon < \eta_{i_0}$, d.h.

$$(5) \qquad 1 - \varepsilon < H_t(\varepsilon_0, n_0) \leqq 1, \qquad \text{für } t \geqq t_0 = t_{i_0},\ n_0 = n_{i_0}.$$

Um eine Abschätzung von h_r für $r \to \infty$ zu gewinnen, wählen wir:

$$r = n_0 k t_0 + \varrho, \qquad 0 \leqq \varrho < n_0 t_0,$$

wobei ϱ und k ganz sind und k beliebig groß gemacht werden kann.

Im folgenden schreiben wir der Einfachheit halber $H_t = H_t(\varepsilon_0, n_0)$. Ferner sei m eine untere und M eine obere Schranke der Folge F, wobei wir voraussetzen, daß $p - \varepsilon_0 > m$ und $p + \varepsilon_0 < M$. Indem wir bezüglich der $t = kt_0$ Teilabschnitte der Länge n_0 insbesondere an die Bedeutung von H_t und die Ungleichung (5) erinnern und für den Restabschnitt der Länge ϱ die Schranke m bzw. M einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{[H_t(p-\varepsilon_0) + (1-H_t)m]\, n_0 k t_0 + \varrho m}{r} < h_r < \frac{[H_t(p+\varepsilon_0) + (1-H_t)M]\, n_0 k t_0 + \varrho M}{r}.$$

Da die linke bzw. rechte Seite der Ungleichung eine monoton steigende bzw. fallende Funktion von H_t ist und $1 - \varepsilon < H_t$, ergibt sich:

$$\frac{[(1-\varepsilon)(p-\varepsilon_0) + \varepsilon m]\, n_0 k t_0 + \varrho m}{r} < h_r < \frac{[(1-\varepsilon)(p+\varepsilon_0) + \varepsilon M]\, n_0 k t_0 + \varrho M}{r}.$$

Da k und damit r beliebig groß gewählt werden dürfen und $\frac{n_0 k t_0}{r} \to 1$ für $k \to \infty$, gilt:

$$(1-\varepsilon)(p-\varepsilon_0) + \varepsilon m \leqq \underline{\lim}\, h_r \leqq \overline{\lim}\, h_r \leqq (1-\varepsilon)(p+\varepsilon_0) + \varepsilon M.$$

Da außerdem ε und ε_0 beliebig klein gemacht werden können, folgt die Behauptung.

Folgerung: *In einer bernoullischen Folge konvergieren die relativen Häufigkeiten h_r und es gilt*: $\lim h_r = p$.

Für das in dieser Arbeit gestellte Ziel ist die Umkehrung des Satzes 2 von Bedeutung: Angenommen, die h_r konvergieren nicht gegen eine gegebene Zahl p. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein positives $\eta_0 < 1$, so daß zu jedem n und jedem noch so großen t_0 ein $t \geqq t_0$ existiert, derart, daß $H_t(\varepsilon_0, n) < \eta_0 < 1$. Hierbei bezeichne $H_t(\varepsilon_0, n)$ wiederum die relative Häufigkeit des Eintreffens von $|h_{A_i} - p| < \varepsilon_0$ in den t ersten Abschnitten A_i, $1 \leqq i \leqq t$, der Länge n der gegebenen Folge. Wendet man nun noch Satz 1 bei festem n auf die rela-

[4]) Für die Aussage des Satzes und den Beweis ist es gleichgültig, ob man von einer Versuchsfolge der Alternative E, $\bar{E}$ ausgeht, oder von irgendeiner unendlichen beschränkten Folge reeller Zahlen $\{a_n\}$. Im letzten Falle bedeuten h_r das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ und h_A das arithmetische Mittel in einem Abschnitt A der Zahlenfolge.

tiven Häufigkeiten $H_t(\varepsilon_0, n)$ an, so erkennt man, daß bei geeignetem η_0 *die relative Anzahl der Indizes t, für die $H_t(\varepsilon_0, n) < \eta_0 < 1$, eine von Null verschiedene „Dichte", d. h. für $t \to \infty$ einen von Null verschiedenen oberen Grenzwert hat.* Dies gilt für jedes n.

§ 3. *Relative Häufigkeiten in beliebigen Folgen von Abschnitten gleicher Länge*

Die Untersuchungen des § 2 bezogen sich auf die t *ersten* Abschnitte der Länge n der gegebenen Grundfolge F. Hier werden wir die Häufigkeit des Auftretens der Ungleichung $|h_{A_{(\lambda)}} - p| < \varepsilon$ in einer beliebigen Folge von t aufeinanderfolgenden Abschnitten $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(t)}$ gleicher Länge der Folge F untersuchen. Unser Ziel ist der Beweis der folgenden Aussage:

Satz 3[5]**).** *Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen möge zu einer reellen Zahl p und einem $\beta > 0$ eine unendliche Folge von je drei positiven Zahlen $(\varepsilon_i, n_i, t_i)$ ($\varepsilon_i \to 0$, n_i ganz und $n_i \to \infty$, t_i ganz) mit folgender Eigenschaft existieren: Für jedes i sei die relative Häufigkeit des Eintreffens der Ungleichung $|h_{A_{(\lambda)}} - p| < \varepsilon_i$ in jeder Folge von t_i aufeinanderfolgenden Abschnitten $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(t_i)}$ der Länge n_i mindestens gleich β. Dann ist $p = \lim h_A$ für $N(A) \to \infty$.* Insbesondere ist auch $p = \lim\limits_{r \to \infty} h_r$.

Der Beweis stützt sich auf folgenden

Hilfssatz. *Es sei $\bar{p}$ der obere Grenzwert aller h_A für $n(A) \to \infty$; $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben und n eine zugehörige ganze Zahl, so daß $h_A \leqq \bar{p} + \varepsilon$ für alle Abschnitte A mit $N(A) \geqq n$ (ein solches n existiert stets). Gibt es dann zwei positive Zahlen α und β und eine ganze positive Zahl t, so daß in jeder Folge von t aufeinanderfolgenden Abschnitten $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(t)}$ der Länge n die relative Häufigkeit der $A_{(\lambda)}$, $(1 \leqq \lambda \leqq t)$, für die $h_{A_{(\lambda)}} \leqq \bar{p} - \alpha$, mindestens gleich β ist, so ist $\beta \leqq \frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon}$.*

Der Beweis verläuft teilweise ähnlich dem des Satzes 2. Zu jedem $\eta > 0$ gibt es einen Abschnitt A der Grundfolge F von beliebig großer Länge:

$$r = N(A) = knt + \varrho, \qquad 0 \leqq \varrho < tn,$$

mit k und ϱ ganz und k beliebig groß, so daß $h_A \geqq \bar{p} - \eta$. Wendet man auf den ersten Teil von A, der aus k Folgen von je t Teilabschnitten der Länge n besteht, die Voraussetzungen des Hilfssatzes an und berücksichtigt für den Restabschnitt der Länge ϱ die Existenz einer oberen Schranke M der Folge F, erhält man die folgende Abschätzung:

$$\bar{p} - \eta \leqq h_A \leqq \frac{[\beta(\bar{p} - \alpha) + (1 - \beta)(\bar{p} + \varepsilon)]\, ktn + M\varrho}{r},$$

oder, da r und k beliebig groß gemacht werden dürfen:

$$\bar{p} - \eta \leqq \beta(\bar{p} - \alpha) + (1 - \beta)(\bar{p} + \varepsilon) = \bar{p} + \varepsilon - \beta(\alpha + \varepsilon),$$

d. h.

$$\beta(\alpha + \varepsilon) \leqq \eta + \varepsilon.$$

[5]) Vgl. Fußnote 4).

Da außerdem η beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. In gleicher Weise läßt sich eine dem Hilfssatze analoge Aussage für den *unteren* Grenzwert der h_A beweisen.

Beweis von Satz 3. Wir zeigen, daß p gleich dem oberen und unteren Grenzwert der h_A für $N(A) \to \infty$ ist. Es genügt, den Beweis für den oberen Grenzwert $\bar{p}$ durchzuführen. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben; der Index i läßt sich dann so bestimmen, daß $\varepsilon_i < \varepsilon$ und zugleich $h_A \leqq \bar{p} + \varepsilon$ für jeden Abschnitt A mit $N(A) \geqq n_i$. Nach der Voraussetzung des Satzes ist sicher $p \leqq \bar{p}$. Wäre $p < \bar{p}$, so ließe sich $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auch noch $\alpha = \bar{p} - - p - \varepsilon > 0$. Die Anwendung des Hilfssatzes auf dieses α und auf die relative Mindesthäufigkeit β des Eintreffens von $h_A < p + \varepsilon = \bar{p} - \alpha$ ergibt dann $\bar{p} - p \leqq \frac{\varepsilon}{\beta}$. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $p = \bar{p}$ und damit die Behauptung.

Aus Satz 3 folgt unmittelbar die folgende Tatsache: Genügt eine Versuchsfolge F der einfachen Alternative E, $\bar{E}$ den Voraussetzungen des Satzes 3, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß mit *Gewißheit*

$$|h_A - p| < \varepsilon \quad \text{für } \textit{jeden} \text{ Abschnitt } A \text{ mit } N(A) \geqq n_0.$$

Insbesondere ist die relativ eHäufigkeit $H_t(\varepsilon, n)$ des Eintreffens von $|h_{A_\lambda} - p| < < \varepsilon$ in den *ersten* t Abschnitten $A_\lambda (1 \leqq \lambda \leqq t)$ der Länge $n \geqq n_0$ notwendig gleich 1.

Eine solche Folge ist sicherlich bernoullisch im Sinne der Definition des § 2. Doch ist es zweckmäßig, Folgen dieser Art nur als *uneigentliche* bernoullische Folgen zu betrachten. Von einer *eigentlichen bernoullischen Folge* soll die zusätzliche Bedingung verlangt werden, wie sie z. B. in einer bernoullischen Verteilung zum Ausdruck kommt, daß es zu jedem vorgegebenen ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, und noch so großem n stets auch Abschnitte A mit $N(A) \geqq n$ gibt, so daß $|h_A - p| \geqq \varepsilon$.

Für eine eigentliche bernoullische Folge gilt zwar $p = \lim\limits_{n \to \infty} h_n$, aber h_A selbst hat keinen festen Grenzwert für $N(A) \to \infty$. Aus der Umkehrung des Satzes 3 ergibt sich für *eigentliche bernoullische Folgen* (wie auch für alle nicht bernoullischen Folgen) *die folgende notwendige Bedingung: Zu jedem noch so kleinen positiven* β *gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *und ein* n_0 *derart, daß zu jedem* $n \geqq n_0$ *und jedem ganzen positiven* t *eine Folge von* t *aufeinanderfolgenden Abschnitten* $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(t)}$ *der Länge* n *existiert, in welcher die relative Häufigkeit des Eintreffens von* $|h_{A_{(\lambda)}} - p| < \varepsilon$ *kleiner* β *ist.*

Zum Schluß seien ein paar Beispiele angegeben, an welchen sich die gewonnenen Aussagen leicht veranschaulichen lassen (es sei $E = 1$, $\bar{E} = 0$):

a) Beispiel einer uneigentlichen bernoullischen Folge[6]):

$$1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots.$$

Es ist $p = \lim h_n = \lim h_A = \frac{1}{2}$ ($n \to \infty$, bzw. $N(A) \to \infty$).

[6]) Vgl. v. MISES, loc. cit. S. 133.

b) Beispiel einer eigentlichen bernoullischen Folge:

$$a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } 10^{2m} < n \leqq 10^{2m} + 10^m \\ = 1 & \text{für alle übrigen } n \end{cases}$$

$p = \lim h_n = 1$.

c) Beispiel einer nicht bernoullischen Folge mit konvergenten relativen Häufigkeiten:

$$1,0,\ 1,1,0,0,\ 1,1,1,0,0,0\ldots$$

(Doppelabschnitte der Länge $2m$ von je m Erfolgen und je m Mißerfolgen). $p = \lim h_n = \frac{1}{2}$ Offenbar ist die Ungleichung $|h_A - p| < \varepsilon$ für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nur in Ausnahmefällen erfüllt und $\lim\limits_{t \to \infty} H_t(\varepsilon, n) = 0$ für jedes n.

(Eingegangen am 18. Oktober 1955)

Ewald, G.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 354—371 (1956)

Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie [1])

Von

Günther Ewald in Meisenheim (Glan)

Einleitung

Aus einer Arbeit von B. Hesselbach [6][2]) ist der folgende topologische Satz zu entnehmen:

Ein System von Jordankurven auf einer einfach zusammenhängenden geschlossenen Fläche mit der Eigenschaft, daß durch drei Punkte der Fläche immer genau eine Systemkurve hindurchgeht, kann genau dann auf das System der ebenen Schnitte einer konvexen Fläche topologisch abgebildet werden, wenn es folgende Konfigurationseigenschaft der Kreise, den sog. Büschelsatz [3]) erfüllt:

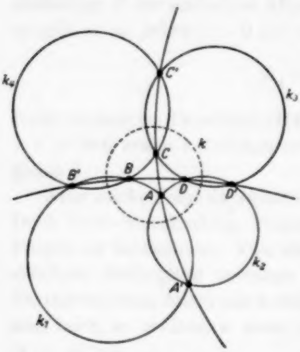

Fig. 1

Liegen von vier Paaren lauter verschiedener Punkte in fünf Fällen je zwei Paare auf einem Kreis und sind diese Kreise alle verschieden [4]), dann liegen auch im sechsten Fall die Paare auf einem Kreis (vgl. Fig. 1).

Der Beweis dieses topologischen Satzes geht auf einen Ansatz von K. Reidemeister [5]) (1925) zurück, dessen Grundgedanken darin besteht, gewissen Bündeln von Systemkurven Punkte, gewissen Büscheln Geraden und den Kurven selbst Ebenen eines konvexen Stückes des projektiven Raumes zuzuordnen.

W. Blaschke [3] und B. Hesselbach [6] bewiesen ferner, daß das betrachtete Kurvensystem sogar dem System der Kreise der Kugel äquivalent ist, wenn anstelle des Büschelsatzes der bekannte Miquelsche Satz — wie der Büschelsatz eine $(8_3, 6_4)$-Konfiguration von Kreisen — gefordert wird.

---

[1]) D 77.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern bedeuten die Nummern im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

[3]) Bezeichnung und Formulierung nach B. L. van der Waerden und L. J. Smid: [12], S. 754. Es sei bemerkt, daß der Büschelsatz in innerer Beziehung zur „Vierkanthypothese" der projektiven Geometrie (A. Winternitz [13], S. 372) steht.

[4]) Dieser Zusatz ist notwendig, man findet anders leicht Gegenbeispiele.

[5]) [11], S. 12—14. Reidemeister sah noch nicht, daß für die Äquivalenz der beiden genannten Kurvensysteme der Büschelsatz erfüllt sein muß, er versuchte ohne diesen auszukommen (vgl. auch W. Blaschke [4], S. 228).

Mit diesen Arbeiten wurde nun ein Weg in die Grundlagen der Kreisgeometrie, genauer: der Möbiusschen Geometrie, geebnet. HESSELBACH[6]) bemerkt, daß die Kreisgeometrie in ähnlicher Weise von dem Büschelsatz und dem Miquelschen Satz beherrscht wird wie die ebene projektive Geometrie von den Sätzen von DESARGUES und PAPPUS. Auch BLASCHKE[7]) weist auf die Bedeutung seiner Überlegungen für eine axiomatische Begründung der Möbiusschen Geometrie hin.

Indessen hat man diesen Weg bisher nicht weiter beschritten[8]). Es bleibt etwa zu fragen:

A) Welche Axiome für ein System von Punkten und Kreisen erlauben es, die Punkte und mit diesen die Kreise so in einen projektiven Raum mit einem geeigneten Koordinatenschiefkörper einzubetten, daß den Kreisen tetrazyklische Koordinaten[9]) in verallgemeinerter Form beigelegt werden können?

Damit ist zugleich nach einer Begründung des Zusammenhangs zwischen Kreisgeometrie und räumlicher hyperbolischer Geometrie gefragt, wie er in der Möbiusgeometrie auftritt, oder, wenn man will, nach einer Begründung der räumlichen hyperbolischen Geometrie mit Hilfe der axiomatischen Kreisgeometrie[10]).

Ferner interessiert die Frage nach den algebraischen Folgerungen, die sich aus der Gültigkeit des Büschelsatzes und des Miquelschen Satzes in der Kreisgeometrie ergeben.

Auf diese letzte Frage geben für den Miquelschen Satz (der in der vorliegenden Arbeit außer Betracht bleibt) B. L. VAN DER WAERDEN und L. J. SMID [12] bereits auf anderem Wege eine Antwort[11]): Gründet man die axiomatische Kreisgeometrie auf einige elementare Inzidenzaxiome und den Satz von MIQUEL (in etwas abgeänderter Form), dann kann man mit Hilfe der axiomatischen Punkte und eines Teilsystems der axiomatischen Kreise (als Geraden) eine projektive Geometrie über einem *(kommutativen) Körper K* aufbauen und die Kreise, die nicht als Geraden dienen, mit Hilfe einer festen *quadratischen Form*, die aus Elementen von K gebildet ist, kennzeichnen.

---

[6]) [6], S. 265.

[7]) [2], S. 210, insbesondere Fußnote.

[8]) Bemerkungen hinsichtlich der Notwendigkeit weiterer Untersuchungen über die axiomatische Kreisgeometrie finden sich auch bei B. PETKANTSCHIN [8], S. 124, [9], S. 219 und bei A. I. HOFFMANN [7], S. 218. — In diesen Arbeiten [7, 8, 9] werden auf anderen Wegen als hier ebenfalls Beiträge zur Grundlegung der Kreisgeometrie geleistet.

[9]) Bekanntlich nennt man vier nicht gleichzeitig verschwindende reelle Zahlen u_0, u_1, u_2, u_3 dann die tetrazyklischen Koordinaten eines Kreises der Kugel $\mathfrak{R}$: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (bzw. seines Bildes in der Ebene bei einer stereographischen Projektion), wenn die Ebene $-u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ diesen Kreis aus $\mathfrak{R}$ ausschneidet. Siehe etwa [5], S. 33. Die Gruppe der kreisverwandten Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf sich wird in der Möbiusgeometrie mit der Gruppe der hyperbolischen Abbildungen des $\mathfrak{R}$ umgebenden Raumes identifiziert, die $\mathfrak{R}$ als Maßkugel besitzt ([5], S. 35).

[10]) Hierüber verdankt der Verfasser F. BACHMANN sowie W. KLINGENBERG wertvolle Hinweise.

[11]) Die von VAN DER WAERDEN und SMID angegebene Axiomatik der Kreisgeometrie ist bisher die einzige, die allein mit den Grundbegriffen „Punkt", „Kreis", „liegt auf" auskommt.

Diese quadratische Form nimmt, falls für K der Körper der reellen Zahlen gewählt wird, nach einer geeigneten Transformation die Gestalt $x_1^2 + x_2^2$ an.

Es läßt sich zeigen, daß man nicht zu einem entsprechenden algebraischen Ergebnis gelangt, wenn man den Miquelschen Satz durch den Büschelsatz ersetzt; es ist zu fragen:

B) Welche Zusatzaxiome ermöglichen es, algebraische Folgerungen aus der Gültigkeit des Büschelsatzes zu ziehen?

In der vorliegenden Arbeit soll nun die Möbiusgeometrie gemäß unserer Frage A) begründet und dabei zugleich eine Antwort auf die Frage B) gegeben werden. Als Grundbegriffe wählen wir zunächst „Punkt“, „Kreis“, „liegt auf“, „ist orthogonal“. Jedoch soll in einer späteren Arbeit die Orthogonalität auf Inzidenzeigenschaften zurückgeführt werden, so daß wir wie VAN DER WAERDEN und SMID [12] mit nur drei Grundbegriffen auskommen.

Für unsere Axiome ergeben sich drei Gruppen:

1. Elementare Inzidenzaxiome,
2. Axiome der Orthogonalität von Kreisen,
3. Büschelsatz in spezieller Form.

Es genügt, den Büschelsatz in einem von zwei Fällen anzunehmen, man kann den zweiten Fall beweisen, und zwar bemerkenswerterweise unabhängig vom ersten Fall, allein aus den Axiomen 1 und 2.

Wir geben zunächst einen axiomatischen Aufbau der Geometrie orthogonaler Kreisbüschel an (§ 2), fahren dann fort mit Betrachtungen über Kreisbündel (§ 3)[12], um schließlich mit Hilfe von Kreisbüscheln und Kreisbündeln eine dreidimensionale projektive Geometrie über einem *Schiefkörper* K' aufzubauen (§ 4)[13]. Bei diesem Aufbau werden insbesondere den Bündeln Paare von Punkt und Ebene zugeordnet. Dies führt sofort, gestützt auf die Eigenschaften der Orthogonalität von Kreisen, zur Definition einer Polarität, deren Fundamentalbereich $\mathfrak{B}$ durch eine sog. *semiquadratische Form*, gebildet aus Elementen von K', dargestellt wird. Die Punkte der axiomatischen Kreisgeometrie lassen sich schließlich so mit den Punkten von $\mathfrak{B}$ identifizieren, daß Punkte eines Kreises immer auf einer Ebene liegen. Die Koeffizienten der zugehörigen Ebenengleichung liefern dabei die verallgemeinerten tetrazyklischen Koordinaten des betreffenden Kreises. Sie sind im Falle, daß K' der Körper der reellen Zahlen ist, mit den gewöhnlichen tetrazyklischen Koordinaten äquivalent, da alsdann $\mathfrak{B}$ durch eine Projektivität in die Kugel übergeführt werden kann.

Es bleibt noch offen, ob es ein nichtkommutatives Beispiel für unsere Geometrie gibt. In diesem Fall wäre die Analogie Büschelsatz-Miquelscher Satz einerseits und Desarguescher Satz-Pappusscher Satz andererseits weiter vertieft.

Für die Anregung zur axiomatischen Begründung der Geometrie orthogonaler Kreisbüschel sowie für Beiträge zur Aufklärung der Zuordnungs-

---

[12]) Über eine Veranschaulichung der Bündel s. die Bem. auf S. 362.

[13]) Hieran läßt sich eine neue Begründung der hyperbolischen Geometrie anschließen, die in dieser Arbeit noch nicht näher ausgeführt wird (vgl. die erste Bem. auf S. 367).

beziehungen auf S. 367 und viele weitere Ratschläge ist der Verfasser R. Furch zu Dank verpflichtet, ferner B. L. van der Waerden für verschiedene Hinweise, insbesondere zu § 4.

§ 1. Axiome

Es seien uns zwei Mengen von Dingen gegeben; die Elemente der einen nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit P, Q, ...; die Elemente der anderen nennen wir Kreise und bezeichnen sie mit k, l, ...

Zwischen Punkten und Kreisen seien zwei Beziehungen definiert, eine Inzidenzbeziehung: „P liegt auf k" (auch: „k geht durch P", „P ist ein Punkt von k" usw.) und eine Orthogonalitätsbeziehung: „k ist orthogonal zu k'".

Axiom 1 (Inzidenz)[14])

a) Es gibt einen Punkt und einen Kreis, so daß der Punkt nicht auf dem Kreis liegt.

b) Auf jedem Kreis liegen mindestens drei Punkte.

c) Zu drei verschiedenen Punkten gibt es genau einen Kreis, auf dem die Punkte liegen.

d) Durch einen Punkt auf einem Kreis und einen nicht auf dem Kreis liegenden Punkt gibt es einen eindeutig bestimmten zweiten Kreis, der mit dem ersten nur einen Punkt gemeinsam hat.

Definition 1. Wir sagen: Zwei Kreise schneiden sich, wenn sie mindestens einen, sie berühren sich, wenn sie genau einen, und sie meiden sich, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben. Einen gemeinsamen Punkt zweier Kreise nennen wir Schnittpunkt, im Falle der Berührung auch Berührpunkt.

Axiom 2 (Orthogonalität)

a) Ist k' zu k orthogonal, dann ist auch k zu k' orthogonal.

b) Ist k' zu k orthogonal, dann schneiden sich k und k'.

c) Ist ein Kreis zu zwei sich berührenden Kreisen orthogonal, dann geht er durch deren Berührpunkt.

d) Sind zwei verschiedene Kreise gleichzeitig zu zwei sich meidenden Kreisen orthogonal, dann schneiden sie sich.

e) Liegt P auf k und ist Q ein beliebiger von P verschiedener Punkt, dann gibt es durch P, Q genau einen zu k orthogonalen Kreis.

f) Sind P, Q, R drei beliebige verschiedene Punkte, dann gibt es durch R genau einen Kreis, der zu allen Kreisen durch P, Q orthogonal ist.

Axiom 2a) gestattet die Bezeichnung: k und k' sind zueinander orthogonal. Ist P ein Schnittpunkt von k und k' [Axiom 2b)], dann sagen wir manchmal zur näheren Bestimmung: k' ist zu k *in* P orthogonal.

Man ersieht aus Axiom 2f): Ein Kreis ist niemals zu sich selbst orthogonal. Ferner ergibt Axiom 2e) sofort:

(*) Zwei Kreise, die zu einem vorgegebenen Kreis in demselben Punkt orthogonal sind, berühren sich.

---

[14]) Axiom 1a)—d) ist mit den Axiomen I—V von van der Waerden-Smid [12] äquivalent.

Axiom 3 (**Spezieller Büschelsatz**)[15])

Liegen von vier Paaren lauter verschiedener Punkte in fünf Fällen je zwei Paare auf einem Kreis, sind diese Kreise alle verschieden und gibt es keinen Kreis, der zu drei nicht durch dasselbe Paar gehenden Konfigurationskreisen gleichzeitig orthogonal ist, dann liegen auch im sechsten Fall die zwei Punktepaare auf einem Kreis.

Die Spezialisierung liegt in der angegebenen Forderung hinsichtlich der Existenz eines Orthogonalkreises. Der allgemeine Büschelsatz wird am Ende von § 2 bewiesen.

§ 2. Büschel

Es ist zu beachten, daß in diesem Paragraphen nur die Axiome 1 und 2 benutzt werden. Dies gilt insbesondere auch für den Beweis eines Spezialfalles des Büschelsatzes, der mit Axiom 3 nur zwecks Formulierung des allgemeinen Büschelsatzes zusammengefaßt wird.

Definition 2. Die Gesamtheit aller Kreise durch zwei verschiedene Punkte nennen wir A-Büschel. — Unter einem B-Büschel verstehen wir die Gesamtheit der Kreise, die einen vorgegebenen Kreis in einem festen Punkt berühren oder mit ihm zusammenfallen. — Ein O-Büschel endlich sei die Gesamtheit der zu einem A-Büschel orthogonalen Kreise. A-, B- und O-Büschel fassen wir unter dem gemeinsamen Namen Büschel zusammen. Bezeichnung: $\sigma, \sigma', \sigma^*$ usw.

Ein Schnittpunkt zweier Büschelkreise heiße Grundpunkt dieses Büschels.

Satz (1). *Ein Büschel besitzt mindestens zwei verschiedene Kreise.*

Beweis. Für A- und B-Büschel folgt der Satz sofort aus Axiom 1. Wir haben also noch zu zeigen: Die Kreise eines beliebigen A-Büschels σ besitzen zwei verschiedene gemeinsame Orthogonalkreise. Seien in der Tat k, k' zwei Kreise von σ, die nicht zusammenfallen, P und Q ihre Schnittpunkte, R bzw. R' je ein von P und Q verschiedener Punkt auf k bzw. k' [Axiom 1b)]. r bzw. r' seien die zu allen Kreisen von σ orthogonalen Kreise durch R bzw. R' [Axiom 2f)]. Sind sie verschieden, dann ist unser Satz richtig. Fallen sie zusammen (siehe Fig. 2), dann legen wir durch P den Kreis p, der zu k in R orthogonal ist [Axiom 2e)]. Wegen (*) (§ 1) berührt p den Kreis r. Ferner geht p nicht durch Q, da sonst p gleich k [Axiom 1c)], also zu sich selbst orthogonal wäre. Folglich findet man auf p einen von P und Q verschiedenen Punkt S, der nicht auf r liegt [Axiom 1b)]. Schließlich gibt es durch S, wieder nach Axiom 2f), einen zu allen Kreisen von σ orthogonalen Kreis; und dieser fällt nicht mit r zusammen.

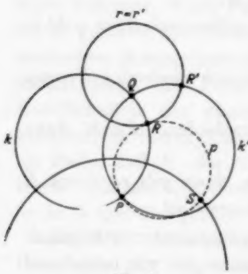

Fig. 2

Wir bemerken noch, daß man im Anschluß an den Beweis von Satz (1) leicht sieht: Auf jedem Kreis liegen mindestens sechs verschiedene Punkte.

[15]) Zur Veranschaulichung ersetze man Fig. 1 durch eine entsprechende, bei der sich auch k_1 und k_3 sowie k_2 und k_4 schneiden.

Die Axiome 1c), 1d) und 2f) liefern den

Satz (2). *Zwei Kreise eines Büschels schneiden, berühren oder meiden sich, je nachdem, ob es sich um ein A-, B- oder O-Büschel handelt.*

Aus Axiom 1c) und 1d) ersieht man ferner, daß zwei sich schneidende Kreise k, k' in genau einem A- oder B-Büschel liegen. Wir geben diesem das Symbol (k, k').

Satz (3). *I. Die Kreise, die zu einem vorgegebenen Kreis in einem bestimmten Punkt orthogonal sind, bilden gerade ein B-Büschel. II. Die Gesamtheit aller Kreise, die zu sämtlichen Kreisen eines B-Büschels orthogonal sind, ist wieder ein B-Büschel, das denselben Grundpunkt wie das Ausgangsbüschel hat.*

Beweis. I. Nach (*) berühren sich je zwei dieser Orthogonalkreise. Sie gehören also einem B-Büschel an, das sie wegen Axiom 1d) und Axiom 2e) auch ganz ausfüllen.

II. Sei σ irgendein B-Büschel, P sein Grundpunkt und k ein Kreis aus σ. Aus I. ergibt sich unter Beachtung von Axiom 2a), daß ein Kreis m, der zu k in P orthogonal ist, die übrigen Kreise von σ ebenfalls orthogonal schneidet. Alle derartigen Kreise bilden aber, wieder nach I., zusammen ein B-Büschel, wir nennen es σ^*. Wegen Axiom 2c) gibt es außerhalb von σ^* keinen zu sämtlichen Kreisen von σ orthogonalen Kreis mehr. II. ist damit bewiesen.

Definition 3. Zwei beliebige Büschel heißen zueinander orthogonal, wenn ein beliebiger Kreis des einen zu jedem Kreis des anderen Büschels orthogonal ist. Auch nennen wir dann einen Kreis des einen Büschels zu dem andern Büschel orthogonal (und umgekehrt).

Wir werden sehen, daß es sich bei zueinander orthogonalen Büscheln entweder um zwei B-Büschel oder um ein A- und ein O-Büschel handelt.

Satz (4). *Ist ein Kreis zu zwei verschiedenen sich schneidenden Kreisen orthogonal, dann auch zu dem (A- oder B-) Büschel, das dieselben aufspannen.*

Beweis. Spannen die beiden Kreise ein B-Büschel auf, dann folgt die Behauptung aus Satz (3).

Seien daher P und P' die verschiedenen Schnittpunkte zweier nicht zusammenfallender Kreise k, k', und sei m der angenommene Orthogonalkreis von k und k'. m geht gewiß nicht durch P oder P' hindurch, denn sonst müßten sich k und k', da sie zu m orthogonal sind [Axiom 2a)], wegen (*) berühren.

Schneide nun m etwa k in dem Punkt $Q \neq P, P'$ [Axiom 2b)]. Ist m nicht zu allen Kreisen durch P, P' orthogonal, so gibt es einen von m verschiedenen Kreis dieser Art durch Q [Axiom 2f)]. Nach (*) berühren sich dann m und m' in Q, und infolgedessen geht der Kreis k', da er sowohl zu m wie zu m' orthogonal ist [Axiom 2a)], durch Q hindurch [Axiom 2c)]. Das bedeutet aber, daß k' mit k zusammenfällt [Axiom 1c)] entgegen der Annahme $k \neq k'$. m hat also doch die behauptete Eigenschaft.

Satz (5). *Sind ein Punkt und ein nicht durch diesen Punkt gehender Kreis gegeben, dann bilden alle zu dem vorgegebenen Kreis orthogonalen Kreise durch den gegebenen Punkt ein A-Büschel, dessen Grundpunkte nicht auf dem vorgegebenen Kreis liegen.*

Beweis. Seien Q der angenommene Punkt und k der gegebene Kreis. Auf k wählen wir drei verschiedene Punkte P, P', P'' [Axiom 1b)]. Von den Kreisen p, p', p'' durch Q, die k in P bzw. P' bzw. P'' orthogonal schneiden [Axiom 2e)], sind gewiß zwei, etwa p und p', verschieden. Sie würden andernfalls alle durch P, P', P'' hindurchgehen, also mit k zusammenfallen [Axiom 1c)].

p und p' haben einen von Q verschiedenen Schnittpunkt $\overline{Q}$, denn andernfalls wäre Q ihr Berührpunkt, k müßte also durch Q gehen [Axiom 2c)], entgegen der Annahme des Satzes. $\overline{Q}$ liegt nicht auf k, da sich sonst p und p' wegen (*) berührten. Das A-Büschel (p, p') ist nun nach Satz (4) zu k orthogonal.

Ist schließlich q ein beliebiger Orthogonalkreis von k durch Q, dann gehört er zu (p, p'). Andernfalls schneidet nämlich q den Kreis p in einem von Q und $\overline{Q}$ verschiedenen Punkt $\overline{\overline{Q}}$. Das A-Büschel (q, p) ist nach Satz (4) wieder zu k orthogonal, insbesondere auch sein Kreis durch P'. Dann gibt es aber durch Q zwei verschiedene zu k in P' orthogonale Kreise, entgegen Axiom 2e).

(p, p') umfaßt also alle Orthogonalkreise von k durch Q, und Satz (5) ist bewiesen.

Satz (6). *Zwei sich meidende Kreise spannen genau ein O-Büschel auf, d. h. alle Kreise, die zu beiden zugleich orthogonal sind, bilden ein A-Büschel.*

Beweis. k und k' seien die vorgegebenen sich meidenden Kreise, Q, Q', Q'' drei verschiedene Punkte von k' [Axiom 1b)]. In jedem der drei A-Büschel, die Q bzw. Q' bzw. Q'' als einen Grundpunkt haben und zu k orthogonal sind [Satz (5)], findet man einen Kreis q bzw. q' bzw. q'', der außerdem zu k' orthogonal ist [Axiom 2e)]. Wie im Beweis von Satz (5) schließt man, daß zwei dieser Kreise, etwa q und q', verschieden sind. q und q' schneiden sich nach Axiom 2d). Wegen Satz (4) ist dann (q, q') sowohl zu k wie zu k' orthogonal.

Wir behaupten: Jeder Kreis, der zu k und k' zugleich orthogonal ist, gehört (q, q') an.

Sei andernfalls s ein Kreis dieser Art, der nicht in (q, q') liegt. Schneidet er k' in einem Punkt S [Axiom 2b)], dann berührt er dort nach (*) einen Kreis s' aus (q, q'). Folglich müßte k als Orthogonalkreis von s und s' durch S hindurchgehen [Axiom 2c)] entgegen der Annahme, daß k und k' sich meiden. s gehört also doch zu (q, q'). Ebenso sieht man mittels Axiom 2c), daß sich q und q' nicht berühren, (q, q') also ein A-Büschel ist. Damit ist Satz (6) bewiesen.

Wir haben nun den zusammenfassenden

Satz (7). *Zwei beliebige, voneinander verschiedene Kreise spannen genau ein Büschel auf.*

Das bedeutet insbesondere: Ein Büschel ist durch zwei seiner Kreise eindeutig bestimmt. Wir können daher jetzt für alle Büschel festsetzen: Sind k, k' zwei verschiedene Kreise eines Büschels, dann ist diesem Büschel das Symbol (k, k') zugeordnet.

Satz (8). *Zu jedem Büschel gibt es genau ein Orthogonalbüschel.*

Beweis. Für B-Büschel liefert Satz (3) die Behauptung, für A-Büschel ist sie per definitionem erfüllt, für O-Büschel ergibt sie sich aus Satz (6).

Man sieht überdies: Das Orthogonalbüschel eines Büschels ist ein O-, B- oder A-Büschel, je nachdem, ob das gegebene Büschel ein A-, B- oder O-Büschel ist.

Satz (9). *Sind ein A- oder B-Büschel und ein beliebiger Kreis gegeben, der im Falle eines B-Büschels nicht durch dessen Grundpunkt geht, dann existiert in dem Büschel ein zu dem vorgegebenen Kreis orthogonaler Kreis.*

Beweis. Sei σ das gegebene Büschel, k der gegebene Kreis. Ist σ ein A-Büschel und liegen beide Grundpunkte von σ auf k, dann folgt der Satz aus Axiom 2e). Sei also P ein Grundpunkt von σ, der nicht auf k liegt (falls σ ein B-Büschel ist, liegt sein einziger Grundpunkt nach Voraussetzung nicht auf k). Nach Satz (5) gibt es ein A-Büschel von Kreisen durch P, die zu k orthogonal sind, und unter diesen nach Axiom 1c) bzw. 1d) einen Kreis, der in σ enthalten ist. Er ist der gesuchte.

Satz (10). *Besitzen zwei A-Büschel oder zwei B-Büschel oder ein A- und ein B-Büschel einen gemeinsamen Orthogonalkreis, dann haben sie, falls sie nicht identisch sind, genau einen Kreis gemeinsam.*

Beweis. Wir nennen die Büschel allgemein σ und σ', ihren gemeinsamen Orthogonalkreis k.

Im Falle zweier B-Büschel sind die zwei Grundpunkte verschieden [vgl. Satz (3)], und es gehört der Kreis aus σ durch den Grundpunkt von σ' wegen Satz (3), I zu σ' und ist nach Satz (7) der einzige gemeinsame Kreis dieser Büschel.

Sei nun etwa σ ein A-Büschel mit den (verschiedenen) Grundpunkten P und Q. Weder P noch Q liegen auf k, da sonst nach (*) σ doch ein B-Büschel wäre. Dann gehört aber der Kreis von σ' durch P als Orthogonalkreis von k wegen Satz (5) zu σ, ist also der gesuchte, bei $\sigma \neq \sigma'$ wieder eindeutig bestimmte Kreis.

Satz (11). *Meiden oder berühren sich zwei von drei nicht durch einen Punkt gehenden Kreisen, dann existiert ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise orthogonal schneidet.*

Beweis. Meiden sie sich, dann gibt es nach Satz (6) ein A-Büschel, zu dem sie beide orthogonal sind. In diesem befindet sich nach Satz (9) ein Kreis, der auch zu dem dritten der gegebenen Kreise orthogonal ist.

Berühren sich zwei der Kreise, dann gibt es nach Satz (3), II ein B-Büschel, zu dem sie beide orthogonal sind. Der Grundpunkt dieses Büschels liegt nach Voraussetzung nicht auf dem dritten der gegebenen Kreise, so daß man wieder Satz (9) anwenden kann.

Zum Schluß beweisen wir noch den allgemeinen

Büschelsatz. *Liegen von vier Paaren lauter verschiedener Punkte in fünf Fällen je zwei Paare auf einem Kreis und sind diese Kreise alle verschieden, dann liegen auch im sechsten Fall die Paare auf einem Kreis.*

Beweis. Seien A, A'; B, B'; C, C'; D, D' die betrachteten vier Punktepaare. Das Symbol $(PQRS)$ besage: P, Q, R, S liegen auf einem Kreis und bezeichne gleichzeitig diesen Kreis. Wir nehmen $(AA'\,BB')$, $(AA'\,CC')$, $(AA'\,DD')$, $(BB'\,CC')$, $(BB'\,DD')$ an und behaupten: $(CC'\,DD')$. — Haben

keine drei der angenommenen fünf Kreise, sofern sie nicht in einem Büschel liegen, einen gemeinsamen Orthogonalkreis, dann folgt die Behauptung aus Axiom 3.

Es existiere also ein Kreis k, der etwa zu $(AA'\,BB')$, $(BB'\,CC')$ und $(AA'\,CC')$ orthogonal ist (s. Fig. 1). Er ist nach Satz (4) auch zu $(AA'\,DD')$ und $(BB'\,DD')$ orthogonal, denn der erstere dieser Kreise liegt in dem von $(AA'\,BB')$ und $(AA'\,CC')$ aufgespannten A-Büschel, der letztere in dem von $(BB'\,CC')$ und $(AA'\,BB')$ aufgespannten. Entsprechend schließt man, wenn k zu drei anderen nicht in einem Büschel liegenden Konfigurationskreisen orthogonal ist. k ist somit, wieder nach Satz (4), auch zu den von $(AA'\,CC')$ und $(BB'\,CC')$ bzw. $(AA'\,DD')$ und $(BB'\,DD')$ aufgespannten A-Büscheln orthogonal, und diese haben folglich nach Satz (10) einen Kreis gemeinsam, d. h. $(CC'\,DD')$.

§ 3. Bündel

Definition 4[16]). Es seien k, k' zwei Kreise, die einen dritten Kreis k'' in je zwei verschiedenen Punkten schneiden, wobei die beiden Schnittpunktpaare höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ein Kreis heißt in dem durch k, k', k'' aufgespannten Bündel gelegen, wenn er entweder gleich k'' ist oder einen von k'' verschiedenen Kreis durch die Schnittpunkte von k und k'' in zwei verschiedenen Punkten schneidet, die mit den Schnittpunkten von k' und k'' auf einem Kreis liegen.

Insbesondere sprechen wir von einem A-Bündel, wenn es zu k, k', k'' keinen gemeinsamen Orthogonalkreis gibt und die Schnittpunktpaare von k, k'' und k', k'' keinen Punkt zugleich enthalten. Haben diese Schnittpunktpaare aber einen gemeinsamen Punkt, so nennen wir das Bündel B-Bündel. Besitzen k, k', k'' einen gemeinsamen Orthogonalkreis, dann bezeichnen wir das Bündel als O-Bündel. Den Bündeln geben wir allgemein die Zeichen $\delta, \delta', \ldots$.

Ein B-Bündel ist offenbar gleich der Gesamtheit aller Kreise durch einen festen Punkt. Wir nennen diesen Punkt den Grundpunkt des B-Bündels.

Bemerkung. Im Falle der gewöhnlichen Kreise der Kugel bilden alle Kreise, die von Ebenen durch einen festen Punkt innerhalb, auf oder außerhalb der Kugel ausgeschnitten werden (die Nullkreise ausgenommen), ein A-, B- oder O-Bündel.

Satz (12). *Alle zu einem festen Kreis orthogonalen Kreise bilden gerade ein O-Bündel.*

Beweis. Sei k der vorgegebene Kreis, Q ein nicht auf k liegender Punkt. Nach Satz (5) gibt es ein zu k orthogonales A-Büschel mit den Grundpunkten Q, Q', so daß auch Q' nicht auf k liegt. Seien l, m zwei verschiedene Kreise dieses Büschels [Satz (1)] und L bzw. M je ein Schnittpunkt von l bzw. m mit k [Axiom 2b)]. Der zu k orthogonale Kreis n durch L und M [Axiom 2e)] berührt wegen (*) sowohl l wie m, geht also nicht durch Q oder Q'. Ist P ein nicht auf k liegender Punkt von n [Axiom 1b)], dann schneidet der Kreis n'

[16]) Formulierung im Anschluß an einen Vorschlag von P. BERGAU.

aus (l, m) durch den Punkt P den Kreis n nach Satz (5) in einem zweiten, von P verschiedenen Punkt P' (Fig. 3). P, P', Q, Q' sind dann sämtlich voneinander verschieden und die Kreise l, n, n' spannen gemäß Definition 4 ein O-Bündel auf.

Daß alle Kreise des O-Bündels zu k orthogonal sind, folgt durch mehrfache Anwendung von Satz (4).

Nun ist noch zu zeigen: Ist p ein beliebiger zu k orthogonaler Kreis, dann liegt er in dem eben konstruierten O-Bündel. Man findet in der Tat, falls $p \neq n'$ ist, leicht ein zu k orthogonales A-Büschel, dem p angehört und dessen Grundpunkte nicht auf n' liegen [vgl. Satz (5)]. Dieses hat aber nach Satz (10) mit (l, n') und (n, n') je einen von n' verschiedenen Kreis gemeinsam, so daß p gemäß Definition 4 in dem von l, n, n' aufgespannten O-Bündel liegt.

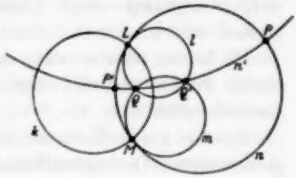

Fig. 3

Satz (13). *Zu einem O-Bündel gibt es genau einen Kreis, der alle Bündelkreise orthogonal schneidet.* Wir nennen ihn kurz den Orthogonalkreis des O-Bündels.

Beweis. Gemäß Definition 4 gibt es einen gemeinsamen Orthogonalkreis t der drei erzeugenden Kreise des O-Bündels. Durch Anwendung von Satz (4) folgt alsdann, daß das ganze O-Bündel zu t orthogonal ist [vgl. den Beweis von Satz (12)]. Einen zweiten Orthogonalkreis des Bündels gibt es nicht, denn dieser müßte, wie man mit Hilfe von Axiom 2f) sieht, k meiden, so daß die Bündelkreise einem Büschel angehörten [Satz (6)].

Satz (14). *Drei nicht in einem Büschel liegende Kreise eines A- oder B-Bündels haben niemals einen gemeinsamen Orthogonalkreis.*

Beweis. Im Falle eines B-Bündels führt die Annahme eines solchen Orthogonalkreises auf einen Widerspruch mit Satz (3) oder Satz (5), je nachdem, ob der Grundpunkt des B-Bündels auf dem Orthogonalkreis angenommen wird oder nicht.

Seien also k, k', k'' drei Kreise, die ein A-Bündel aufspannen, p, q, r die gegebenen Kreise dieses Bündels. Wir nehmen einen gemeinsamen Orthogonalkreis t von p, q, r an und führen einen Widerspruch herbei, indem wir zeigen: t ist auch zu k, k', k'' orthogonal (s. Definition 4). Es seien in der Tat m bzw. n Kreise aus den A-Büscheln (k, k'') bzw. (k', k''), die zu t orthogonal sind [Satz (9)]. Wir haben zwei Unterfälle zu beachten: I. $m \neq n$, beide $\neq k''$, II. m oder $n = k''$.

I. Berühren oder meiden sich in diesem Fall m und n, dann gibt es nach Satz (11) einen gemeinsamen Orthogonalkreis von m, n und k''. Dieser ist nach Satz (4) zu $(m, k'') = (k, k'')$ und $(n, k'') = (k', k'')$, insbesondere also zu k und k' orthogonal.

Wir können daher annehmen, daß m und n ein A-Büschel (m, n) bilden. Daß k'' nicht zu (m, n) gehört, ist sofort zu sehen. Nach Voraussetzung liegen ferner die Kreise p, q, r nicht gleichzeitig in (m, n); es befinde sich etwa p außerhalb dieses A-Büschels. Fällt nun p mit k'' zusammen, dann ist t als

Orthogonalkreis von m, n und p nach Satz (4) auch zu $(m, p) = (k, k'')$ und $(n, p) = (k', k'')$, also insbesondere zu den Kreisen k, k', k'' orthogonal.

Ist aber p von k'' verschieden, dann liegt p gemäß Definition 4 in einem A-Büschel (p', p''), das von zwei Kreisen p', p'' aus (k, k'') bzw. (k', k'') aufgespannt wird. Da p nicht in (m, n) enthalten ist, fällt dann (p', p'') nicht mit (m, n) zusammen, insbesondere gehört einer der Kreise p', p'', etwa p', nicht zu (m, n). Indessen besitzen (p', p'') und (m, n) nach dem Büschelsatz einen gemeinsamen Kreis, wir nennen ihn $\bar{p}$. Es ist $\bar{p} \neq p$ und $\bar{p} \neq p'$. Man sieht jetzt mit Hilfe von Satz (4) nacheinander, daß t zu (m, n), $\bar{p}$, $(\bar{p}, p) = (\bar{p}, p')$, $(p', m) = (k, k'')$, $(n, k'') = (k', k'')$ orthogonal ist, insbesondere also zu k, k' und k''.

II. Ist m oder $n = k''$, dann legen wir den Kreis l aus (k, k'') durch einen Punkt von k', der mit keinem der Grundpunkte von (k', k'') zusammenfällt.

Berührt l den Kreis k', dann besitzen nach Satz (11) l, k' und k'' einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Dieser ist aber wegen $(k, k'') = (k'', l)$ auch zu k orthogonal. Wir können also annehmen, daß (l, k') ein A-Büschel ist, ferner, daß einer der Kreise l, k', etwa l, nicht zu t orthogonal ist, und können den Beweis wie unter I. führen, indem wir k', k'', l anstelle von k, k', k'' als Ausgangskreise eines Bündels betrachten. Es folgt, daß t zu l, k', k'' und daher wegen $(k, k'') = (l, k'')$ zu k, k' und k'' orthogonal ist. Satz (14) ist damit bewiesen.

Aus Satz (11) und Satz (14) folgt der

Satz (15). *Zwei Kreise eines A-Bündels schneiden sich stets in verschiedenen Punkten.*

Satz (16). *Zwei A-Büschel eines A-Bündels haben immer einen Kreis gemeinsam.*

Der Beweis beruht in der Hauptsache auf dem Büschelsatz und wurde schon von HESSELBACH[17]) gefunden.

Satz (17). *Zwei verschiedene A- oder B-Büschel eines Bündels haben genau einen Kreis gemeinsam, mit der einen Ausnahme, daß sie beide B-Büschel eines B-Bündels sind.*

Beweis. Ist das Bündel ein A-Bündel, dann sind alle seine Büschel nach Satz (15) A-Büschel und die Behauptung folgt aus Satz (16). Im Falle eines B-Bündels beachte man Axiom 1c) und 1d). Ist schließlich das Bündel ein O-Bündel, dann gibt es nach Satz (13) einen Kreis, der alle Bündelkreise, also auch die beiden Büschel orthogonal schneidet. Nach Satz (10) haben diese Büschel dann, wie behauptet, einen Kreis gemeinsam.

Satz (18). *Mit zwei verschiedenen Kreisen gehört das ganze Büschel, das sie aufspannen, zu einem Bündel.*

Beweis. Ist das Bündel ein A-Bündel, so schneiden sich die Kreise in verschiedenen Punkten. Das von ihnen aufgespannte A-Büschel hat dann

[17]) [6], S. 268. An die Stelle der „A-Bündel" treten dort die „Konjugien". Die andersartigen Voraussetzungen des Satzes bei HESSELBACH sind für den Beweis unwesentlich.

nach Satz (17) mit (k, k'') und (k', k'') je einen Kreis gemeinsam, wenn k, k', k'' wieder die dem Bündel zugrunde liegenden Kreise sind. Nach Definition 4 liegt daher jeder Büschelkreis im Bündel. Im Falle eines B-Bündels ist aber der Satz trivial. Sei also das Bündel ein O-Bündel, l sein Orthogonalkreis [Satz (13)]. Dann ist l nach Satz (4) bzw. Satz (6) zu dem Büschel orthogonal, das die gegebenen Kreise aufspannen. Dieses Büschel ist wegen Satz (12) in dem betrachteten O-Bündel enthalten, was zu zeigen war.

Satz (19). *Drei Kreise, die nicht in einem Büschel liegen, gehören immer einem und nur einem Bündel an.*

Beweis. Gehen die Kreise durch einen Punkt, dann spannen sie ein B-Bündel auf, das diesen Punkt als Grundpunkt besitzt. Berühren oder meiden sich im andern Fall zwei von ihnen, dann gibt es nach Satz (11) einen Kreis, der zu allen drei Kreisen orthogonal ist; und das O-Bündel, zu dem dieser Kreis Orthogonalkreis ist [Satz (12)], enthält jetzt die gegebenen Kreise. Schneiden diese sich aber zu je zweien in verschiedenen Punkten, dann sind sie gemäß Definition 4 Kreise, die ein Bündel aufspannen. In jedem Fall liegen die Kreise also in einem Bündel. Dessen Eindeutigkeit ist nun in drei Schritten nachzuweisen:

I. Ist das Bündel ein B-Bündel, dann gehören die drei Kreise nicht zugleich einem weiteren (A-, B- oder O-)Bündel an. — Nimmt man an, sie liegen in einem A-Bündel, dann findet man mit Hilfe von Axiom 1d) leicht zwei sich berührende Kreise, die dem Bündel angehören müßten, entgegen Satz (15). Lägen sie aber in einem O-Bündel, dann hätten sie einen gemeinsamen Orthogonalkreis [Satz (13)], was Satz (14) widerspricht. Daß die Kreise nicht in verschiedenen B-Bündeln liegen, ist evident. Damit ist die Eindeutigkeit im Falle eines B-Bündels gezeigt.

II. Liegen die gegebenen Kreise in einem A-Bündel, dann nicht zugleich in einem B- oder O-Bündel oder einem zweiten A-Bündel. — Daß sie nicht zugleich in einem B-Bündel liegen, haben wir soeben gesehen. In einem O-Bündel liegen sie aber wegen Satz (14) nicht. Daß die Kreise in höchstens einem A-Bündel liegen, wird durch Satz (16) gewährleistet.

III. Gehören die drei Kreise schließlich einem O-Bündel an, dann nach dem Gesagten nicht einem A- oder B-Bündel. Lägen sie in zwei verschiedenen O-Bündeln, dann hätten sie zwei verschiedene gemeinsame Orthogonalkreise, denn ein O-Bündel ist durch seinen Orthogonalkreis bestimmt [Satz (12)]. Sie müßten dann aber wegen Satz (8) in einem Büschel liegen, entgegen der Annahme des Satzes.

Satz (20). *In einem A- oder B-Bündel gibt es stets genau ein Büschel, das zu einem vorgegebenen Kreis orthogonal ist.*

Beweis. Im Falle eines B-Bündels folgt die Behauptung aus Satz (3) oder Satz (5), je nachdem, ob der Grundpunkt des B-Bündels auf dem vorgegebenen Kreis liegt oder nicht. Seien daher k, k', k'' die erzeugenden Kreise eines A-Bündels (Definition 4). Nach Satz (15) schneiden sie sich zu je zweien in verschiedenen Punkten, und es gibt nach Satz (9) in den A-Büscheln (k, k'), (k, k''), (k', k'') je einen zu dem vorgegebenen Kreis — wir nennen ihn t —

orthogonalen Kreis. Diese drei Orthogonalkreise von t fallen nicht alle zusammen, da sonst k, k', k'' in einem Büschel lägen. Sind aber zwei von ihnen verschieden, dann schneiden sie sich wieder nach Satz (15) und spannen wegen Satz (4) das gesuchte Orthogonalbüschel von t auf. Wegen Satz (14) ist t zu keinem weiteren Kreis des Bündels orthogonal.

Satz (21). *Gegeben seien ein A- oder B-Bündel und irgendein nicht darin enthaltenes Büschel. Falls das Büschel ein O-Büschel und das Bündel ein B-Bündel ist, sei dieses O-Büschel zu keinem Büschel des B-Bündels orthogonal. Dann haben das Büschel und das Bündel genau einen Kreis gemeinsam.*

Beweis. Seien σ das gegebene Büschel, σ^* sein Orthogonalbüschel, k, k' zwei Kreise von σ^* und δ das angenommene Bündel. Nach Satz (20) gibt es in δ zu k bzw. k' je ein orthogonales Büschel σ' bzw. σ''. Sei zunächst δ ein B-Bündel. σ^* liegt dann nach Vor. nicht in δ.

Wir behaupten: In diesem Fall sind σ' und σ'' nicht beide B-Büschel. — In der Tat gehen andernfalls wegen Satz (3) k und k' beide durch den Grundpunkt des B-Bündels; denn dieser ist zugleich Grundpunkt eines jeden B-Büschels, das im B-Bündel liegt. Berühren sich k und k', dann fallen σ' und σ'' zusammen [Satz (3), II] und sind zu $\sigma^* = (k, k')$ orthogonal, also gleich σ. Dies widerspricht der Annahme, daß σ nicht in δ liegt. Schneiden sich aber k und k' in verschiedenen Punkten, so ist $\sigma^* = (k, k')$ in δ enthalten und σ ist ein O-Büschel, entgegen der Annahme des Satzes, daß σ^* dann nicht in δ liegt.

Also ist entweder σ' oder σ'' kein B-Büschel. Folglich haben nach Satz (17) σ' und σ'' genau einen gemeinsamen Kreis. Dieser ist dann nach Satz (4) zu $(k, k') = \sigma^*$ orthogonal, mithin ein Kreis von σ.

Ist das vorgegebene Bündel ein A-Bündel, dann sind σ' und σ'' nach Satz (15) beide A-Büschel und gewiß voneinander verschieden. Satz (17) liefert somit wieder die Behauptung.

Satz (22). *Zwei Bündel, die nicht identisch sind, haben genau ein Büschel gemeinsam.*

Beweis. Wir nennen die Bündel δ und δ'. Anhand von Definition 4 findet man in δ drei nicht in einem Büschel liegende Kreise, die zu je zweien sich schneiden, so daß sie drei verschiedene A- oder B-Büschel $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aufspannen. Offenbar haben diese Büschel keinen gemeinsamen Kreis. Genau so findet man in δ' drei A- oder B-Büschel $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ ohne gemeinsamen Kreis. Wir legen durch einen Grundpunkt von σ_1' je einen Kreis aus den Büscheln σ_1, σ_2, σ_3. Diese Kreise fallen nicht alle zusammen, also spannen zwei von ihnen ein (A- oder B-)Büschel auf [Satz (7)], das zu δ gehört [Satz (18)]. In diesem A- oder B-Büschel gibt es aber [Axiom 1c) bzw. 1d)] einen Kreis, der auch zu σ_1' gehört. Auf dieselbe Weise findet man gemeinsame Kreise von δ und σ_2' bzw. σ_3'.

Von den drei so gefundenen Kreisen sind wieder zwei verschieden, da σ_1', σ_2', σ_3' keinen Kreis gemeinsam haben. Sie spannen das gesuchte Büschel auf. Gibt es außerhalb dieses Büschels einen weiteren gemeinsamen Kreis von δ und δ', dann sind diese Bündel wegen Satz (19) identisch.

§ 4. Verallgemeinerte tetrazyklische Koordinaten der Kreise

1. Wir bauen jetzt mit Hilfe der Kreisbüschel und Kreisbündel einen selbstdualen dreidimensionalen projektiven Inzidenzraum auf. In diesen lassen sich dann in der gewünschten Weise die axiomatischen Kreise derart einbetten, daß ihnen verallgemeinerte tetrazyklische Koordinaten beigelegt werden können.

Durch eineindeutige Zuordnung erklären wir zu der Menge $\{\delta\}$ aller Bündel zwei neue Mengen $\{P(\delta)\}$ und $\{E(\delta)\}$ sowie zu der Menge $\{\sigma\}$ aller Büschel eine Menge $\{G(\sigma)\}$; die $P(\delta)$ nennen wir Punkte, die $E(\delta)$ Ebenen und die $G(\sigma)$ Geraden:

$$\text{(Z)}\qquad \begin{array}{lcl} \text{Bündel } \delta & \leftrightarrow & \text{Punkt } P = P(\delta) \\ \text{Büschel } \sigma & \leftrightarrow & \text{Gerade } G = G(\sigma) \\ \text{Bündel } \delta & \leftrightarrow & \text{Ebene } E = E(\delta). \end{array}$$

Wir sprechen kurz von „Zuordnung“ oder „Darstellung“. $P(\delta)$, $G(\sigma)$ und $E(\delta)$ sind somit umkehrbar eindeutige Funktionen von δ bzw. σ. Ihre Umkehrfunktionen seien bzw. mit $\delta(P)$, $\sigma(G)$ und $\delta(E)$ bezeichnet.

Die Menge der so definierten Punkte, Geraden und Ebenen erfüllen die Inzidenzaxiome der dreidimensionalen projektiven Geometrie, wenn wir geeignete Lagebeziehungen festsetzen. Ehe wir diese angeben, noch einige Definitionen und Bemerkungen!

Definition 5. Ein Büschel σ heißt zu einem Bündel δ assoziiert (und umgekehrt), wenn das Orthogonalbüschel σ^* von σ in δ liegt. In Zeichen: $\sigma \mapsto \delta$

Definition 6. Jedes B-Bündel nennen wir zu sich selbst assoziiert. Ein A-, B- oder O-Bündel heißt zu einem O-Bündel assoziiert (und umgekehrt), wenn der Orthogonalkreis des letzteren zum ersteren gehört. Sind δ und δ' zueinander assoziiert, dann kürzen wir wieder ab: $\delta \mapsto \delta'$.

Die Symmetrie von $\delta \mapsto \delta'$ setzt im Falle, daß δ und δ' beide O-Bündel sind, folgendes voraus: Gehört der Orthogonalkreis von δ zu δ', dann gehört auch der Orthogonalkreis von δ' zu δ. Dies ist aber nach Satz (12) richtig.

Bemerkung. Die Zuordnungen (Z) und die im folgenden angegebenen Lagebeziehungen (I) unterscheiden zwar nicht zwischen A-, B- und O-Bündeln, jedoch treten in Definition 6 die Besonderheiten der verschiedenen Bündelarten hervor. — Es sei hier nur bemerkt, daß die Gesamtheit der durch A-Bündel dargestellten Punkte zum Aufbau eines hyperbolischen Raumes herangezogen werden können. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß man ohne Benutzung von Anordnungs- und damit Konvexitätseigenschaften ein „Stück“ aus dem Inzidenzraum „herausschneiden“ kann, das im gewöhnlichen Fall dem Innern einer Kugel entspricht.

Bemerkung. Nach (Z) wird jedem Bündel δ ein Paar Punkt-Ebene zugeordnet. Sind nun δ, δ' zwei verschiedene Bündel und ist σ ihr gemeinsames Büschel, dann kann man sowohl σ^* die „Schnittgerade“ G^* von $E(\delta)$, $E(\delta')$ und σ die „Verbindungsgerade“ G von $P(\delta)$, $P(\delta')$ zuordnen wie auch umgekehrt G^* durch σ und G durch σ^* darstellen. Wir entscheiden uns für die erstere Möglichkeit [s. (I)].

Die Inzidenzbeziehungen (wir kürzen sie in bekannter Weise durch das Zeichen „$\circ$“ ab) lauten nun:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{lll} P \circ G & \text{dann und nur dann, wenn} & \delta(P) \supset \sigma(G)^{18)} \\ P \circ E & \text{„ \ „ \ „ \ „ \ „} & \delta(P) \mapsto \delta(E) \\ G \circ E & \text{„ \ „ \ „ \ „ \ „} & \sigma(G) \mapsto \delta(E). \end{array}$$

Der Nachweis, daß diese Inzidenzbeziehungen den projektiven Inzidenzaxiomen genügen, erweist sich mit Hilfe der Sätze (1) bis (22) als sehr einfach:

Geradenaxiom[19]. *„Durch zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es genau eine Gerade“.*

Es ist wegen Satz (22) erfüllt, wonach $\delta(P)$ und $\delta(Q)$ genau ein Büschel gemeinsam haben.

Ebenenaxiom. *„Durch eine Gerade G und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es eine und nur eine Ebene“.*

Da P nicht auf G liegt, ist $\sigma(G)$ nicht in $\delta(P)$ enthalten.

Sei *erstens* $\delta(P)$ ein B-Bündel und $\sigma(G)$ zu einem (A-)Büschel von $\delta(P)$ orthogonal, so daß also die Beziehungen $\delta(P) \mapsto \delta(P)$ und $\sigma(G) \mapsto \delta(P)$ gelten. Ist E die (eindeutig bestimmte) Ebene, die ebenfalls $\delta(P)$ zugeordnet ist, dann hat man auch $\delta(P) \mapsto \delta(E)$ und $\sigma(G) \mapsto \delta(E)$, folglich $P \circ E$ und $G \circ E$, d. h. E ist die gesuchte Verbindungsebene von P und G.

Sei *zweitens* $\delta(P)$ ein A- oder B-Bündel, der erstgenannte Fall aber ausgeschlossen. Dann sind die Voraussetzungen von Satz (21) erfüllt und es gibt daher genau einen gemeinsamen Kreis von $\delta(P)$ und $\sigma(G)$. Ist δ' das (eindeutig bestimmte) O-Bündel, zu dem k Orthogonalkreis ist [Satz (12)], dann hat man $\delta(P) \mapsto \delta'$ und $\sigma(G) \mapsto \delta'$. δ' stellt die gesuchte Ebene dar.

Sei *schließlich* $\delta(P)$ ein O-Bündel; seinen Orthogonalkreis nennen wir k. Es ist k nicht zu $\sigma(G)$ orthogonal; denn sonst hätte man [Satz (12)] $\sigma(G) \subset \subset \delta(P)$. k liegt folglich nicht in $\sigma^*(G)$, so daß k und σ^* nach Satz (19) genau ein Bündel δ' aufspannen. Dann ist $\delta(P) \mapsto \delta'$ und $\sigma(G) \mapsto \delta'$, so daß δ' wieder die gesuchte Ebene darstellt.

Transitivität der Lage. *„Liegt P auf G und G auf E, so liegt P auf E.“*

Sie ergibt sich schrittweise aus den Inzidenzbeziehungen (I). Ist beispielsweise $\sigma(G)$ ein O-Büschel, dann ist $\delta(P)$ wegen $\delta(P) \supset \sigma(G)$ ein O-Bündel [vgl. Satz (15)]. Der Orthogonalkreis von $\delta(P)$ gehört dann zu $\sigma^*(G)$, also wegen $\sigma(G) \mapsto \delta(E)$ auch zu $\delta(E)$, d. h. $\delta(P) \mapsto \delta(E)$, folglich $P \circ E$. — Entsprechend schließt man in den übrigen Fällen.

Die *Existenz* zweier verschiedener Punkte auf einer Geraden G sieht man folgendermaßen: Das Orthogonalbüschel von $\sigma(G)$ besitzt mindestens zwei verschiedene Kreise [Satz (1)]. Diese sind zu je einem O-Bündel Orthogonalkreis und die so gewonnenen Bündel enthalten wieder $\sigma(G)$. Daß in jeder Ebene drei nichtkollineare Punkte liegen, folgt daraus, daß es in jedem Bündel drei nicht in einem Büschel enthaltene Kreise gibt (Definition 4) und jeder Kreis Orthogonalkreis eines O-Bündels ist. In der Folge von Axiom 1 findet

[18] „$\supset$“ bedeutet wie üblich „enthält“.

[19] Wir verwenden das Axiomensystem von H. Prüfer: [10], S. 5.

man schließlich vier B-Bündel, die keinen Kreis gemeinsam haben und mithin zu keinem (O-)Bündel assoziiert sind (vgl. Definition 6). Die Punkte, die sie darstellen, liegen daher nicht in einer Ebene.

Schnittaxiom. „*Gehen zwei verschiedene Ebenen E und E' durch einen Punkt P, so gibt es eine und nur eine Gerade G, die auf E und E' liegt.*"

$\delta(E)$ und $\delta(E')$ haben nach Satz (22) genau ein Büschel gemeinsam; dessen Orthogonalbüschel stellt die gesuchte Gerade dar. Man sieht, daß sich sogar zwei beliebige verschiedene Ebenen in einer Geraden schneiden. Zeichnet man daher eine Ebene als unendlichferne aus, dann gilt auch das *Parallelenaxiom*.

2. In dem so konstruierten Raum, den wir Π nennen wollen, können wir jetzt mit Hilfe einer Streckenrechnung in bekannter Weise homogene Koordinaten $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ einführen, so daß die x_i einem Schiefkörper K angehören. Jede Klasse $\lambda\, x$ von Quadrupeln, die aus einem festen Quadrupel x durch Linksmultiplikation mit einem beliebigen Faktor λ aus K hervorgehen, repräsentiert, sofern die x_i nicht sämtlich verschwinden, genau einen Punkt; Entsprechendes gilt für die Repräsentation von Ebenen durch Quadrupel $u\,\mu = (u_0, u_1, u_2, u_3)\,\mu$ mit dem beliebigen Rechtsfaktor μ aus K.

$$x\,u \equiv x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 \tag{1}$$

gibt die Inzidenzbeziehung von Punkten und Ebenen an, bei festem u und variablem x also die Gleichung einer Ebene.

Zwischen Punkten und Ebenen läßt sich folgende duale Beziehung herstellen:

Ein Punkt und eine Ebene entsprechen sich dual, wenn sie durch dasselbe Bündel im Sinne von (Z) dargestellt werden.

Der Verbindungsgeraden zweier Punkte P, Q entspricht dann sinngemäß die Schnittgerade zweier Ebenen E, F: Das gemeinsame Büschel von $\delta(E) = \delta(P)$ und $\delta(F) = \delta(Q)$ stellt die Verbindungsgerade von P und Q dar, sein Orthogonalbüschel die Schnittgerade von E und F.

Wir haben damit eine Beziehung zwischen den Unterräumen unseres projektiven Raumes, die offenbar den Forderungen einer Dualität, etwa in der von R. Baer[20]) angegebenen Form, genügt. Sie ist eine Selbstdualität von Π und, da sie involutorisch ist, sogar eine Polarität von Π. Da Π überdies den Rang 4 hat, kann sie durch eine Semibilinearform $y\,A\,x'^T$ repräsentiert werden[21]), wobei A eine 4,4-Matrix mit Elementen aus K und T ein Antiautomorphismus von K ist. Das heißt: Durchläuft x alle Punkte eines Unterraumes von Π, dann durchläuft y gemäß

$$y\,A\,x'^T = 0$$

alle Punkte des dazu polaren Unterraumes. Einem Punkt x entspricht also insbesondere die Ebene

$$u = A\,x'^T.$$

---

20) [1], S. 95.
21) [1], S. 102, Prop. 1.

Es gilt[22]) $T^2 = 1$ und aus Symmetriegründen

$$x A y'^T = 0.$$

Dies führt zu $A'^T = A$ oder $A^T = A'$.

3. Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{B}$ derjenigen Punkte, die durch B-Bündel dargestellt werden. Die Punkte von $\mathfrak{B}$ inzidieren mit ihren Polarebenen, da für jedes B-Bündel δ die Beziehung $\delta \mapsto \delta$ gilt. Offenbar sind sie auch die einzigen dieser Art, also genau die Lösungen von

$$x A x'^T = 0. \tag{2}$$

Wir nennen die linke Seite von (2) eine *semiquadratische* Form.

Da ein Bündel durch seinen Grundpunkt eindeutig bestimmt ist, kann man jetzt jedem Punkt P_{ax} der axiomatischen Kreisgeometrie denjenigen Punkt von $\mathfrak{B}$ zuordnen, dessen darstellendes B-Bündel P_{ax} als Grundpunkt besitzt. — Bei dieser Abbildung gehen Punkte eines Kreises k in Punkte, die auf einer Ebene liegen, über. Denn die B-Bündel, deren Grundpunkte sie sind, enthalten sämtlich k und sind daher zu dem O-Bündel, dessen Orthogonalkreis k ist, assoziiert.

Die Punkte eines Kreises genügen somit nach der eben angegebenen Abbildung zwei Gleichungen (1) und (2).

Definition 7. Erfüllen die Bilder eines axiomatischen Kreises k in Π zwei Gleichungen (1) und (2), dann nennen wir die vier Größen $-u_0, u_1, u_2, u_3$[23]) die verallgemeinerten tetrazyklischen Koordinaten von k.

Zusammenfassend haben wir den

Satz. *Ein System axiomatischer Punkte und Kreise, das den Axiomen 1 bis 3 genügt, läßt sich derart in einen projektiven Raum mit einem geeigneten Koordinatenschiefkörper K einbetten, daß den Kreisen verallgemeinerte tetrazyklische Koordinaten entsprechen, d. h. Quadrupel* $(-u_0, u_1, u_2, u_3)$ *von Elementen aus K derart, daß die Punkte* $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ *(*x_i *aus K) eines Kreises neben der allgemeinen Bedingung*

$$x A x'^T = 0$$

einer Gleichung

$$x u' \equiv x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

genügen. A ist dabei eine 4,4-Matrix mit Elementen aus K, und T ist ein Antiautomorphismus von K. Es gilt $T^2 = 1$ *und* $A^T = A'$.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die verallgemeinerten tetrazyklischen Koordinaten im Falle, daß K der Körper der reellen Zahlen ist, bis auf eine projektive Abbildung mit den gewöhnlichen tetrazyklischen Koordinaten übereinstimmen, d. h. (2) die Gestalt der Kugelgleichung annimmt.

T ist aber in diesem Falle die Identität, so daß (2) eine gewöhnliche quadratische Gleichung darstellt. Da nun, wie man sich leicht überzeugt, $\mathfrak{B}$ von

---

[22]) [1], S. 111, Theorem 1.

[23]) Wir wählen das negative Vorzeichen von u_0, um mit der Definition der gewöhnlichen tetrazyklischen Koordinate etwa nach W. BLASCHKE (vgl. S. 2. Fußnote [9])) übereinzustimmen.

jeder Geraden in höchstens zwei Punkten getroffen wird und ferner $\mathfrak{B}$ mehr als einen Punkt besitzt, repräsentiert (2) ein gewöhnliches projektives Ellipsoid, kann also durch eine projektive Abbildung in die Gestalt

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

übergeführt werden.

Literatur

[1] R. Baer: Linear Algebra and Projective Geometry. New York 1952. — [2] W. Blaschke: Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. Math. Z. **21**, 209—210 (1924). — [3] W. Blaschke: Eine topologische Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel Abh. Math. Sem. Hamburg III, 2, 164—166 (1924). — [4] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Aufl. (1945). — [5] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, 1. Aufl. (1929). — [6] B. Hesselbach: Über zwei Vierecksätze in der Kreisgeometrie. Abh. Math. Sem. Hamburg IX, 265—271 (1933). — [7] A. J. Hoffmann: On the foundations of inversion geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **1951**, 218—242. — [8] B. Petkantschin: Über die Orientierung der Kugel in der Möbiusschen Geometrie. Jber. deutsch. Math.-Ver. **51**, 124—147 (1941). — [9] B. Petkantschin: Axiomatischer Aufbau der zweidimensionalen Möbiusschen Geometrie. Annuaire Univ. Sofia II, Fac. Phys.-Math. **1**, 219—325 (1940) (bulgarisch mit deutscher Zusf.).— [10] H. Prüfer: Projektive Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1953. — [11] K. Reidemeister: Eine Kennzeichnung der Kugel nach W. Blaschke. J. reine u. angew. Math. **154**, 8—15 (1925). — [12] B. L. van der Waerden u. L. J. Smid: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. **110**, 753—776 (1935). — [13] A. Winternitz: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Einführung idealer Elemente unabhängig von der Anordnung. Ann. of Math. **41**, 365—390 (1940).

(Eingegangen am 29. November 1955)

SCHIEFERDECKER, E.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 372—384 (1956)

Einbettungssätze für topologische Halbgruppen

Von

EBERHARD SCHIEFERDECKER in Münster (Westf.)

Die in den letzten Jahren gefundenen Einbettungssätze für topologische Halbgruppen sind in der Regel Lösungen des folgenden Problems: Gegeben sei eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$, von der bekannt ist, daß sie sich rein algebraisch in eine Halbgruppe bzw. Gruppe $\mathfrak{Q}$ einbetten läßt. Unter welchen Bedingungen über die Topologie T von $\mathfrak{H}$ kann man $\mathfrak{Q}$ so topologisieren, daß $\mathfrak{Q}$ zu einer topologischen Halbgruppe bzw. Gruppe wird, in die die topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ einbettbar ist?

Die vorliegende Arbeit behandelt diese Fragestellung unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen algebraischer und topologischer Art: $\mathfrak{H}$ ist eine topologische Halbgruppe, die rein algebraisch in eine Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}$ einbettbar ist. Die Topologie T von $\mathfrak{H}$ ist aus einer uniformen Struktur S von $\mathfrak{H}$ ableitbar, wobei S ein Fundamentalsystem von Bändern zulassen soll, das gewisse Invarianzeigenschaften besitzt. Dann kann man in der Tat $\mathfrak{H}$ auch in topologischer Hinsicht in $\mathfrak{Q}$ einbetten (4, Satz 3). Dieses Resultat, dessen genaue Formulierung wegen ihres umfangreichen Wortlauts an dieser Stelle nicht wiedergegeben wird, verallgemeinert im wesentlichen die Hauptergebnisse der Arbeiten [5], [6], [7], soweit sie die Einbettung topologischer Halbgruppen betreffen. Diese letzteren Ergebnisse werden auf eine neue Art abgeleitet (4, Satz 2; 4, Satz 4).

Zum Beweis der Sätze des Abschnitts 4 wird in 3 ein Verfahren entwickelt, eine auf $\mathfrak{H}$ definierte uniforme Struktur S unter Beibehaltung gewisser Invarianzeigenschaften auf $\mathfrak{Q}$ fortzusetzen. Dieses Verfahren ist eine Nachbildung der in [5], [6] dargestellten Methode, eine auf $\mathfrak{H}$ vorgegebene Metrik „invariant" auf $\mathfrak{Q}$ fortzusetzen. Dagegen scheint die elegante Schlußweise aus [7] auf die hier behandelten allgemeineren Verhältnisse nicht ohne weiteres anwendbar zu sein.

1. Einbettung von Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen

Dieser Abschnitt enthält wichtige Definitionen und Sätze, die im folgenden benötigt werden. Ausführliche Darstellungen des hier Referierten finden sich in den Arbeiten [4], [5], [6].

Definition 1. Eine *(abstrakte) Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ ist eine nichtleere Menge $\mathfrak{H}$, für deren Elemente eine binäre assoziative Verknüpfungsoperation $(a, b) \to ab$ $(a, b, ab \in \mathfrak{H})$ definiert ist. Ein Element $\alpha \in \mathfrak{H}$ heißt *reguläres Element in* (*von*) $\mathfrak{H}$, wenn es den Kürzungsregeln

$$\text{(1)} \qquad \text{aus} \quad \alpha a = \alpha b \quad \text{folgt} \quad a = b \qquad \alpha, a, b \in \mathfrak{H}$$

und

(2) aus $a\alpha = b\alpha$ folgt $a = b$ $\qquad \alpha,\ a,\ b \in \mathfrak{H}$

genügt. Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ heißt *regulär*, wenn jedes Element $a \in \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ regulär ist.

Definition 2. $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit in $\mathfrak{H}$ regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$ enthält. Als *Linksquotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ *von* $\mathfrak{H}$ *bezüglich* $\mathfrak{m}$ bezeichnet man jede Oberhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l$ von $\mathfrak{H}$ mit neutralem (Eins-)Element 1, in der jedes $\alpha \in \mathfrak{m}$ ein Inverses α^{-1} besitzt und in der die Relation

(3) $$\mathfrak{m} A \cap \mathfrak{H} \neq \theta \qquad A \text{ beliebig} \in \mathfrak{Q}_l$$

erfüllt ist.

Elemente aus $\mathfrak{H}$ werden im allgemeinen mit kleinen lateinischen, Elemente aus $\mathfrak{m}$ immer mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, ohne daß dies stets betont wird.

Satz 1. $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe, die eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von in $\mathfrak{H}$ regulären Elementen enthält. Eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$ existiert genau dann, wenn für jedes Paar $(\alpha, a) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}$ stets

(4) $$\mathfrak{H}\alpha \cap \mathfrak{m} a \neq \theta$$

gilt. Wenn eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ existiert, dann ist sie durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ bis auf Isomorphie bezüglich $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt und umfaßt eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, die ihrerseits $\mathfrak{m}$ umfaßt und deren Elemente A als Potenzprodukte $\alpha_1^{\varepsilon_1}\dots\alpha_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, n ganz, > 0, von Elementen α_i aus $\mathfrak{m}$ darstellbar sind.

Für das Folgende werde die Existenz einer („der") Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$ vorausgesetzt ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{m}$ wie oben).

Satz 2. In einer Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ kann jedes Element $A \in \mathfrak{Q}_l$ als „Linksquotient" $A = \alpha^{-1}a$ mit geeignetem Linksnenner $\alpha \in \mathfrak{m}$ und geeignetem Rechtszähler $a \in \mathfrak{H}$ dargestellt werden. Zu endlich vielen Elementen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}_l$ gibt es stets eine solche Linksquotientendarstellung mit *gleichem* Linksnenner. Ferner gelten die Formeln

(5) $$\alpha^{-1}a = (x\alpha)^{-1}(xa) \qquad \alpha \in \mathfrak{m},\ a,\ x \in \mathfrak{H},\quad x\alpha \in \mathfrak{m};$$

$$\alpha^{-1}a = \alpha^{-1}a_1 \quad (\alpha,\ \alpha_1 \in \mathfrak{m},\ a,\ a_1 \in \mathfrak{H})$$

genau dann, wenn aus

(6) $$x\alpha = x_1\alpha_1 \text{ folgt } xa = x_1a_1 \qquad (x,\ x_1 \in \mathfrak{H});$$

(7) $$(\alpha^{-1}a)(\beta^{-1}b) = (\beta'\alpha)^{-1}(a'b) \qquad \beta' a = a'\beta;$$

hierbei sind α, $\beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$ beliebig vorgegebene Elemente, und $\beta' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$ sind irgendwie bestimmt, daß die Nebenbedingung $\beta' a = a'\beta$ erfüllt ist.

2. Hilfssätze über topologische Halbgruppen

Definition 1. Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$, die eine (nicht notwendig Hausdorffsche) Topologie trägt, heißt *topologische Halbgruppe*, wenn die Abbildung $(x, y) \to xy$

$(x, y \in \mathfrak{H})$ eine stetige Abbildung des mit der Produkttopologie versehenen Raumes $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ in den topologischen Raum $\mathfrak{H}$ darstellt.

Definition 2. Eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist in eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{I}$ *eingebettet*, wenn $\mathfrak{H}$ als abstrakte Halbgruppe Unterhalbgruppe der abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{I}$ ist und wenn die Topologie von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{H}$ eine Topologie induziert, die mit der auf $\mathfrak{H}$ vorgegebenen identisch ist.

Von besonderem Interesse sind solche topologischen Halbgruppen, deren Topologie aus einer uniformen Struktur deduziert werden kann, die also hinsichtlich ihrer topologischen Eigenschaften als uniforme Räume zu betrachten sind. Dieser Klasse von topologischen Halbgruppen gehören insbesondere die topologischen *Gruppen* an, deren Topologie nach A. WEIL zum Beispiel aus der sog. linksseitigen uniformen Struktur (structure uniforme gauche) ableitbar ist. (Vgl. hierzu und wegen weiterer im folgenden als bekannt vorausgesetzten Definitionen und Sätze über uniforme Strukturen [1]; im wesentlichen wird die in [1] benutzte Terminologie auch in der vorliegenden Arbeit verwendet.)

Satz 1. Eine abstrakte Halbgruppe $\mathfrak{H}$ trage eine uniforme Struktur S. Wenn die Menge aller Linkstranslationen $x \to a x$ $(a, x \in \mathfrak{H})$ eine gleichgradig stetige Familie[1]) von Abbildungen des uniformen Raumes $\mathfrak{H}$ in sich bildet und wenn weiterhin für jedes $a \in \mathfrak{H}$ die Rechtstranslation $x \to xa$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{H}$ in sich liefert, so ist $\mathfrak{H}$ — versehen mit der von S deduzierten Topologie T — eine topologische Halbgruppe.

Beweis. Sei $\mathfrak{U}$ das Bandfilter, das die uniforme Struktur S auf $\mathfrak{H}$ definiert. Um die Stetigkeit der Multiplikation $(x, y) \to xy$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ nachzuweisen, genügt es, wegen des Zusammenhanges von $\mathfrak{U}$ mit den Umgebungsfiltern $\mathfrak{V}(x)$ der $x \in \mathfrak{H}$ die folgende Behauptung zu verifizieren: Zu beliebig, aber fest vorgegebenen $x, y \in \mathfrak{H}$, $U \in \mathfrak{U}$ gibt es stets ein $V \in \mathfrak{U}$, so daß

$$\text{aus } (x, x') \in V \text{ und } (y, y') \in V \text{ folgt } (xy, x'y') \in U.$$

(Vgl. [1], Chap. II, § 2.)

Zu $U \in \mathfrak{U}$ gibt es $V' \in \mathfrak{U}$ mit $V' \circ V' \subseteq U$. Zu V' und beliebigem festem $y \in \mathfrak{H}$ wähle man ein $V'' \in \mathfrak{U}$, für das die Relation

$$\text{aus } (y, y') \in V'' \text{ folgt } (cy, cy') \in V' \text{ für jedes } c \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Ein solches $V'' \in \mathfrak{U}$ gibt es gewiß, weil die Familie der Linkstranslationen nach Voraussetzung gleichgradig stetig ist. Zu beliebigem festem $x \in \mathfrak{H}$, dem obigen y und zu $V' \cap V'' \in \mathfrak{U}$ bestimme man nun ein $V''' \in \mathfrak{U}$ so, daß

$$\text{aus } (x, x') \in V''' \text{ folgt } (xy, x'y) \in V' \cap V''.$$

Die Existenz eines solchen V''' ist wegen der Stetigkeit der Abbildung $x \to xy$, y fest, gesichert. Setzt man $V = V'' \cap V'''$, so gilt:

$$\text{Aus } (x, x') \in V \text{ und } (y, y') \in V \text{ folgt } (xy, x'y') \in U.$$

[1]) E, E' seien uniforme Räume mit den Bandfiltern (filtres d'entourages) $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$; $\mathfrak{F}$ bezeichne eine Menge von Abbildungen f von E in E'. Diese Familie heiße *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $U' \in \mathfrak{U}'$ und zu jedem $x_0 \in E$ ein $U = U(x_0, U')$ gibt, so daß aus $(x_0, x) \in U$ für *alle* $f \in \mathfrak{F}$ folgt $(f(x_0), f(x)) \in U'$.

Bemerkung. Wenn das die uniforme Struktur S von $\mathfrak{H}$ definierende Bandfilter eine Basis (système fondamental d'entourages) $\mathfrak{B}$ besitzt, deren Elemente gegenüber allen Linkstranslationen $(x, y) \to (a x, a y)$ von $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ in sich invariant sind, so stellt die Familie aller Linkstranslationen $x \to a x$ von $\mathfrak{H}$ in sich eine gleichgradig stetige Familie von Abbildungen des uniformen Raumes $\mathfrak{H}$ in sich dar $(a, x, y \in \mathfrak{H})$.

Satz 2. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Ist $\mathfrak{H}$ überdies eine (abstrakte) Gruppe, so stellt $\mathfrak{H}$, versehen mit der Topologie T, sogar eine topologische Gruppe dar.

Beweis. Man hat nachzuprüfen, ob die Division $x \to x^{-1} (x \in \mathfrak{H})$ stetig ist. Sei $U \in \mathfrak{U}$ beliebig vorgegeben. Man bestimme dazu $V' \in \mathfrak{U}$ mit $V' \subseteq \overset{-1}{U}$. Zur Gruppenidentität 1 und zu V' wähle man ein $V'' \in \mathfrak{U}$, so daß

$$\text{aus } (1, y) \in V'' \text{ folgt } (a, a y) \in U \text{ für jedes } a \in \mathfrak{H}.$$

Das ist wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Familie der Linkstranslationen $x \to a x$ sicher möglich. Zu V'' und beliebigem festem $x \in \mathfrak{H}$ gibt es wegen der Stetigkeit jeder Rechtstranslation ein $V \in \mathfrak{U}$, für das die Relation

$$\text{aus } (x', y') \in V \text{ folgt } (x' x^{-1}, y' x^{-1}) \in V''$$

Gültigkeit hat. Eine kurze Überlegung lehrt, daß

$$\text{aus } (x, y) \in V \text{ folgt } (x^{-1}, y^{-1}) \in U.$$

Das besagt aber gerade die Stetigkeit der Division in dem beliebigen Punkte x des uniformen Raumes $\mathfrak{H}$.

3. Invariante Fortsetzung uniformer Strukturen

Wenn eine nicht-leere Menge $\mathfrak{H}$ eine uniforme Struktur S trägt, die etwa durch ein Fundamentalsystem $\mathfrak{B}$ von Bändern (système fondamental d'entourages) definiert ist, läßt sich auf einer beliebigen Obermenge $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}$ (mindestens) eine uniforme Struktur S_1 einführen, die auf $\mathfrak{H}$ die vorgegebene uniforme Struktur S induziert. S_1 heiße eine *Fortsetzung von S auf $\mathfrak{H}_1$*.

Sind speziell $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ Halbgruppen, $\mathfrak{H}_1$ Oberhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, so kann man den Bändern $U \in \mathfrak{B}$ noch gewisse Invarianzforderungen gegenüber der Multiplikation in $\mathfrak{H}$ auferlegen und fragen, ob eine Fortsetzung der uniformen Struktur S auf die Oberhalbgruppe $\mathfrak{H}_1$ unter Beibehaltung (oder sinngemäßer „Fortsetzung") der Invarianzbedingungen möglich ist. Diese Fragestellung — für gewisse metrisierbare uniforme Strukturen in [5], § 4 behandelt — ist von Interesse für das Problem der Einbettung topologischer Halbgruppen in topologische Halbgruppen und Gruppen (siehe 4).

Satz 1. *Voraussetzung:* $\mathfrak{H}$ sei eine in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbare Halbgruppe ($\mathfrak{H}, \mathfrak{m}$ wie in 1; siehe dort insbesondere Definition 2, Satz 1). $\mathfrak{H}$ trage eine uniforme Struktur S, die definierbar sei mittels eines solchen Fundamentalsystems $\mathfrak{B}$ von Bändern, für dessen Elemente U die Relationen

(1) aus $(a, b) \in U$ folgt $(x^* a, x^* b) \in U$ für jedes $x^* \in \mathfrak{H}$ mit $x^* \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$;

(2) aus $(x^* a, x^* b) \in U$ folgt $(a, b) \in U$ für jedes $x^* \in \mathfrak{H}$ mit $x^* \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$

gelten. Dabei sind mit U ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}$, mit a, b beliebige Elemente aus $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Behauptung: Auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ gibt es eine und nur eine uniforme Struktur S_1, die S auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ so fortsetzt, daß die folgenden Eigenschaften a und b erfüllt sind:

a) S_1 ist definierbar mittels eines solchen Fundamentalsystems $\mathfrak{B}_1$ von Bändern, dessen Elemente U_1 der Invarianzbedingung

(3) aus $(A, B) \in U_1$ folgt $(\Xi A, \Xi B) \in U_1$ für jedes $\Xi \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$[2])

genügen. Mit U_1 wurde dabei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}_1$, mit A, B beliebige Elemente aus $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ bezeichnet.

b) Zu jedem $U \in \mathfrak{B}$ gibt es genau ein $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ mit $U = (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$.

Beweis. 1. Wenn es eine Fortsetzung S_1 von S mit den Eigenschaften a) und b) gibt, so ist die Bauart der den $U \in \mathfrak{B}$ gemäß b) zugeordneten $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ eindeutig bestimmt, und zwar besteht die folgende Gleichung

(4) $U_1 = \{(A, B) \in \mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$: Aus $A = \alpha^{-1}a$ und $B = \beta^{-1}b$ und $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$ folgt $(xa, yb) \in U (\in \mathfrak{B})\}$[3]).

Anders ausgedrückt: Um festzustellen, ob ein Elementepaar $(A, B) \in \mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$ in $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ liegt, stelle man A, B als Linksquotienten dar: $A = \alpha^{-1}a$, $B = \beta^{-1}b$ (α, β geeignet $\in \mathfrak{m}$, a, b geeignet $\in \mathfrak{H}$). (A, B) liegt genau dann in U_1, wenn für jedes zu α, β, a, b bestimmte Elementepaar $(x, y) \in (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})$ mit $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$ folgt $(xa, yb) \in U$. In der Tat: Wenn $A = \alpha^{-1}a$, $B = \beta^{-1}b$, $x\alpha = y\beta = \gamma \in \mathfrak{m}$ und $(A, B) \in U_1$, so gilt wegen (3), b) und 1, Satz 2

$$(\gamma A, \gamma B) = (\gamma(x\alpha)^{-1}(xa), \gamma(y\beta)^{-1}(yb)) = (xa, yb) \in (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})) = U.$$

Mithin muß U_1 in dem in (4) rechts stehenden Ausdruck enthalten sein. Analog schließt man, daß diese letztere Menge Teilmenge von U_1 ist. Also besteht (4) zu Recht. Daher gibt es höchstens eine Fortsetzung S_1 mit a) und b).

2. Nunmehr muß gezeigt werden, daß unter den in Satz 1 angeführten Voraussetzungen durch (4) ein Fundamentalsystem $\mathfrak{B}_1$ von Bändern auf $\mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$ definiert werden kann, das die gewünschten Eigenschaften besitzt. Dieser Nachweis verläuft im wesentlichen analog dem Beweis des Satzes 1 aus [5], § 4 und wird daher nur abgekürzt wiedergegeben:

Man bestätigt zunächst, daß aus $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$, $\bar{x}\alpha = \bar{y}\beta \in \mathfrak{m}$ und $(xa, yb) \in U$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b, x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathfrak{H}$, $U \in \mathfrak{B}$) folgt $(\bar{x}a, \bar{y}b) \in U$ (vgl. [5], § 4, Beweis des Satzes 1, b), S. 257). Danach schließt man, wie an der entsprechenden Stelle des Beweises zu [5], § 4, Satz 1:

Aus $\alpha^{-1}a = \alpha_1^{-1}a_1$, $\beta^{-1}b = \beta_1^{-1}b_1$, $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$, $x_1\alpha_1 = y_1\beta_1 \in \mathfrak{m}$ und $(xa, yb) \in U (\in \mathfrak{B})$ folgt $(x_1a_1, y_1b_1) \in U$.

Diese Überlegungen lehren im Hinblick auf die Gleichheitsdefinition 1, (6) von Linksquotienten der Form $A = \alpha^{-1}a (\alpha \in \mathfrak{m}, a \in \mathfrak{H})$: Durch (4) wird eine

---

[2]) Siehe 1, Satz 1.

[3]) Es sei hier an die in 1 getroffenen Vereinbarungen hinsichtlich der Bezeichnung der Elemente aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ erinnert: Kleine lateinische bzw. griechische Buchstaben werden für beliebige Elemente aus $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{m}$ benutzt, ohne daß diese Konvention stets hervorgehoben wird.

Menge $U_1 \subseteq \mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$, die $U \in \mathfrak{B}$ zugeordnet ist, *eindeutig*, d. h. unabhängig von der speziellen Wahl der Quotientendarstellungen von $A, B \in \mathfrak{Q}_l$ definiert.

Das System $\mathfrak{B}_1 = \{U_1\}_{U \in \mathfrak{B}}$ stellt eine Filterbasis auf $\mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$ dar. Das folgt auf Grund der leicht zu verifizierenden Formeln

$$\Delta_1 = \{(A, A) : A \in \mathfrak{Q}_l\} \subseteq U_1 \text{ für jedes } U \in \mathfrak{B}$$

und

$$U_1 \subseteq U_1', \text{ falls } U \subseteq U' \qquad U, U' \in \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{B}$ ist darüber hinaus ein Fundamentalsystem von Bändern auf $\mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$: Zu $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ wähle man $U_1' \in \mathfrak{B}_1$ mit $U' \subseteq \overset{-1}{U}$. Dann kommt:

$$U_1' \subseteq \left(\overset{-1}{U}\right)_1 \subseteq \overset{-1}{(U_1)}.$$

Um zu zeigen, daß zu $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ immer ein $V_1 \in \mathfrak{B}_1$ mit $V_1 \circ V_1 \subseteq U_1$ vorhanden ist, bestimme man zu einem $U \in \mathfrak{B}$, dem U_1 vermöge (4) zugeordnet ist, ein $V \in \mathfrak{B}$ mit $V \circ V = W \subseteq U$. Eine kurze Rechnung, die hier übergangen wird, lehrt:

$$V_1 \circ V_1 \subseteq W_1 \subseteq U_1.$$

Man betrachte nun für beliebiges $U \in \mathfrak{B}$ die Menge $U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})$. Offenbar besteht die Inklusion

$$U \subseteq (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})).$$

Denn mit (a, b) liegt auch $(x^* \alpha a, x^* \alpha b)$ in U, falls $x^* \in \mathfrak{H}$ die Eigenschaft $x^* \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ besitzt. Folglich:

$$(a, b) = (\alpha^{-1}(\alpha a), \alpha^{-1}(\alpha b)) \in U_1.$$

Sei andererseits $(A, B) \in (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$; dann hat man Darstellungen $A = \alpha^{-1}(\alpha a)$, $B = \beta^{-1}(\beta b)$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$. Werden nun $x, y \in \mathfrak{H}$ mit $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$ gewählt, so ergibt (4) $(x\alpha a, y\beta b) \in U$. Wegen (2) folgt daraus

$$(A, B) = (a, b) \in U.$$

Also: für beliebiges $U \in \mathfrak{B}$ und das diesem gemäß (4) zugeordnete $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ gilt die Gleichung

$$U = (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})). \tag{5}$$

Daraus folgt Behauptung b). Wäre nämlich für gewisse $U, U' \in \mathfrak{B}$ mit $U \neq U'$

$$U = (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})) = (U_1' \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})),$$

so resultierte wegen (5) $U = U'$, was widersinnig ist.

Schließlich ist noch die Richtigkeit der Aussage (3) nachzuprüfen. Dazu genügt es, wegen der Darstellbarkeit der $\Xi \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ (1, Satz 1) folgende Behauptungen zu verifizieren:

$$(\gamma^{-1}A, \gamma^{-1}B) \in U_1 \text{ genau dann, wenn } (A, B) \in U_1; \tag{6}$$

$$(\delta A, \delta B) \in U_1 \text{ genau dann, wenn } (A, B) \in U_1. \tag{7}$$

(γ, δ beliebig $\in \mathfrak{m}$, $A, B \in \mathfrak{Q}_l$, U_1 beliebig $\in \mathfrak{B}_1$.) An Hand von (1), (2) und (4) erkennt man zunächst, daß für *beliebiges* $\alpha \in \mathfrak{m}$

$$(\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b) \in U_1 \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in U. \tag{8}$$

Um (6) nachzuweisen, schreibe man A, B in der Form $A = \alpha^{-1}a$, $B = \alpha^{-1}b$ (α geeignet $\in \mathfrak{m}$, a, b geeignet $\in \mathfrak{H}$), was nach 1, Satz 2 statthaft ist. $\gamma^{-1}A$, $\gamma^{-1}B$ schreiben sich dann als $(\alpha\,\gamma)^{-1}a$, $(\alpha\,\gamma)^{-1}b$. Ersetzt man in (8) α durch $\alpha\,\gamma$, so erhält man (6).

Zu (7): Mit $A = \alpha^{-1}a$, $B = \alpha^{-1}b$ und $d'\alpha = \alpha' d$ ($d' \in \mathfrak{H}$, $\alpha' \in \mathfrak{m}$) kommt

$$A = \alpha'^{-1}(d'a), \quad B = \alpha'^{-1}(d'b).$$

Nach (8) ist die Aussage

$$(\delta A, \delta B) = (\alpha'^{-1}d'a, \alpha'^{-1}d'b) \in U_1$$

gleichbedeutend mit $(d'a, d'b) \in U$, wegen (1) und (2) also auch mit $(a, b) \in U$; dies ist wiederum nach (8) gleichbedeutend mit

$$(A, B) = (\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b) \in U_1.$$

Damit ist Satz 1 in allen Teilen bewiesen.

Bemerkung 1. Wenn man in (1) auf die Nebenbedingung $x^*\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ verzichtet, so gilt über das in Satz 1 Behauptete hinaus noch:

(9) Aus $(A, B) \in U_1$ folgt $(CA, CB) \in U_1$ für jedes $C \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

(U_1 beliebig $\in \mathfrak{B}_1$; A, B beliebig $\in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$). Ein Beweis gelingt leicht unter Benutzung von (6) und der dann gültigen Relation

(10) aus $(A, B) \in U_1$ folgt $(cA, cB) \in U_1$ für jedes $c \in \mathfrak{H}$

(U_1, A, B wie in (9)), die man durch eine leichte Modifikation des Beweises zu (7) verifiziert.

Satz 2. *Voraussetzung:* Die in Satz 1 aufgeführten Voraussetzungen seien sämtlich erfüllt. Ferner mögen folgende Relationen gelten:

(11) Zu $y^* \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{m}\,y^* \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ und $U \in \mathfrak{B}$ gibt es ein $U' = U'(y^*, U) \in \mathfrak{B}$, so daß aus $(a, b) \in U'$ folgt $(a\,y^*, b\,y^*) \in U$.

(12) Zu $y^* \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{m}\,y^* \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ und $U \in \mathfrak{B}$ gibt es ein $U'' = U''(y^*, U) \in \mathfrak{B}$, so daß aus $(a\,y^*, b\,y^*) \in U''$ folgt $(a, b) \in U$.

Behauptung: Neben den in Satz 1 genannten Behauptungen gilt noch

(13) Zu $H \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ und $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ gibt es ein $U_1' = U_1'(H, U_1) \in \mathfrak{B}_1$, so daß aus $(A, B) \in U_1'$ folgt $(AH, BH) \in U_1$.

Beweis. Die Aussage (13) werde zunächst für $H = \gamma^{-1}$ ($\gamma \in \mathfrak{m}$) bewiesen. Seien $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ und γ vorgegeben. Man bestimme zu $U = (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$ und γ ein $U'' = U''(\gamma, U) \in \mathfrak{B}$, für welches aus $(a, b) \in U''$ folgt $(a\,\gamma, b\,\gamma) \in U$ [vgl. (11)]. Man ordne diesem $U'' \in \mathfrak{B}$ wie in Satz 1, b) $U_1'' = (U'')_1 \in \mathfrak{B}_1$ zu. Es soll gezeigt werden:

(14) Aus $(A, B) \in U_1''$ folgt $(A\,\gamma^{-1}, B\,\gamma^{-1}) \in U_1$.

Setzt man

$$A = \alpha^{-1}a, \; B = \alpha^{-1}b, \; A\,\gamma^{-1} = (\gamma'\alpha)^{-1}a', \; B\,\gamma^{-1} = (\gamma'\alpha)^{-1}b'$$

mit $\gamma' a = a'\gamma$, $\gamma' b = b'\gamma$, so folgt aus $(A, B) \in U_1$ wegen (4) $(\gamma' a, \gamma' b) = (a'\gamma, b'\gamma) \in U''$. Nach Konstruktion von U'' muß dann (a', b') in U liegen.

$(a', b') \in U \subseteq U_1$ impliziert aber [vgl. (3)]

$$(A\,\gamma^{-1}, B\,\gamma^{-1}) = ((\alpha'\gamma)^{-1}a', (\alpha'\gamma)^{-1}b') \in U_1.$$

Daß (13) auch für $H = \delta \in \mathfrak{m}$ richtig ist, erkennt man wie folgt: Zu vorgegebenen $U_1 \in \mathfrak{B}_1$, $\delta \in \mathfrak{m}$ bestimme man $U' = U'(\delta, U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})) \in \mathfrak{B}$, so daß aus $(a, b) \in U''$ folgt $(a\,\delta, b\delta) \in U = (U_1 \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$. Wenn $A = \alpha^{-1}a$, $B = \alpha^{-1}b$ und $(A, B) \in U_1'$, so muß nach (8) (a, b) in U' liegen. ($U_1' \in \mathfrak{B}_1$ ist U' wie in Satz 1, b) zugeordnet.) Folglich: $(a\delta, b\delta) \in U$; daher gilt:

(15) Aus $(A, B) = (\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b) \in U_1'$ folgt $(A\,\delta, B\delta) \in U_1$.

Jedes Element $H \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ kann in der Form

$$H = (\gamma_1^{-1}\delta_1)\dots(\gamma_n^{-1}\delta_n) \qquad \gamma_i, \delta_i \in \mathfrak{m},\ n \in \{1, 2, \dots\}$$

geschrieben werden. Durch vollständige Induktion nach n schließt man unter Zuhilfenahme von (14) und (15), daß die Behauptung des Satzes 2 auch für allgemeines $H \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ in (13) zutrifft.

Bemerkung 2. Der obige Beweis lehrt weiter: Verzichtet man in (11) auf die Nebenbedingung $\mathfrak{m}\,y^* \cap \mathfrak{m} \neq \theta$, so besteht die Relation

(16) Zu $C \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ und $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ gibt es $U_1' = U_1'(C, U_1) \in \mathfrak{B}_1$, so daß aus $(A, B) \in U_1'$ folgt $(AC, BC) \in U_1$.

Bemerkung 3. Die durch $\mathfrak{B}_1 = \{U_1\}_{U \in \mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ gemäß (4) definierte uniforme Struktur S_1 ist mit S (definiert durch $\mathfrak{B} = \{U\}$) zugleich separiert oder nichtsepariert.

4. Einbettung topologischer Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen

In den Sätzen des Abschnitts 3 sind Einbettungsaussagen für topologische Halbgruppen enthalten; diese Aussagen sollen nun herausgearbeitet werden.

Satz 1. Um eine kommutative topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Kürzungsregel in ihre Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{H})$ so einbetten (2, Definition 2) zu können, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ sogar eine topologische Gruppe wird, sind die folgenden Bedingungen a) und b) notwendig und hinreichend.

a) Die Topologie T von $\mathfrak{H}$ ist aus einer uniformen Struktur S auf $\mathfrak{H}$ deduzierbar.

b) Diese uniforme Struktur S kann definiert werden mittels eines solchen Fundamentalsystems $\mathfrak{B}$ von Bändern, dessen Elemente U der Invarianzforderung

(1) $(x^*a, x^*b) \in U$ genau dann, wenn $(a, b) \in U$ $\quad x^*$ beliebig $\in \mathfrak{H}$

genügen. (U beliebig $\in \mathfrak{B}$, $a, b \in \mathfrak{H}$.)

Beweis. Siehe Beweis des Satzes 2.

Satz 2. Um eine Oresche[4] topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in ihre Linksquotientengruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{H})$ so einbetten zu können, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ sogar

[4]) Eine reguläre Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (1, Definition 1) heißt Oresch, wenn für beliebige a, $b \in \mathfrak{H}$ stets $\mathfrak{H}\,a \cap \mathfrak{H}\,b \neq \theta$ gilt. — Auch andere Termini kommen in der Literatur vor. Zum Beispiel wird in [2] eine Oresche Halbgruppe als „semi-groupe régulier à gauche" bezeichnet.

eine topologische Gruppe wird, sind die folgenden Bedingungen a), b) notwendig und hinreichend.

a) Die Topologie T von $\mathfrak{H}$ ist aus einer uniformen Struktur S auf $\mathfrak{H}$ deduzierbar.

b) Diese uniforme Struktur S kann definiert werden mittels eines solchen Fundamentalsystems $\mathfrak{B}$ von Bändern, dessen Elemente U den Invarianzforderungen (2), ..., (5) genügen:

(2) Aus $(a, b) \in U$ folgt $(x^* a, x^* b) \in U$ für jedes $x^* \in \mathfrak{H}$.

(3) Aus $(x^* a, x^* b) \in U$ folgt $(a, b) \in U$ für jedes $x^* \in \mathfrak{H}$.

(4) Zu $y^* \in \mathfrak{H}$ und $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $U' = U'(y^*, U) \in \mathfrak{B}$, so daß aus $(a, b) \in U'$ folgt $(a y^*, b y^*) \in U$.

(5) Zu $y^* \in \mathfrak{H}$ und $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $U'' = U''(y^*, U) \in \mathfrak{B}$, so daß aus $(a y^*, b y^*) \in U''$ folgt $(a, b) \in U$.

Beweis. Wenn a und b erfüllt sind, ist $\mathfrak{H}$ eine topologische Halbgruppe (2, Satz 1). Mittels der in Abschnitt 3 entwickelten Methoden kann man die uniforme Struktur S „invariant" zu S_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ fortsetzen (in 3, Satz 1, Satz 2 ist speziell $\mathfrak{m} = \mathfrak{H}$ zu setzen). Die von S_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ deduzierte Topologie T_1 induziert nach 3, Satz 1 auf $\mathfrak{H}$ die dort vorgegebene Topologie, so daß in der Tat eine Einbettung der topologischen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in einen topologischen Raum $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ vorliegt. Dieser Raum stellt aber eine topologische Gruppe dar, was aus den Relationen (3) und (4) des Abschnitts 3 (dort ist $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ zu setzen) und aus 2, Satz 2 folgt. Die oben genannten Bedingungen a) und b) reichen also hin, um die topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auch in topologischer Hinsicht in ihre Linksquotientengruppe einbetten zu können.

Die Forderungen a) und b) sind noch als notwendig für die Lösung der gestellten Aufgabe zu erweisen. Sei eine OREsche topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in ihre Linksquotientengruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ so eingebettet, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ eine topologische Gruppe wird. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ besitzt dann, wie jede topologische Gruppe $\mathfrak{G}$, eine linksseitige uniforme Struktur (structure uniforme gauche) $S_{1,l}$, die mit der Topologie T_1 von $\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ verträglich ist (siehe [1], Chap. III, § 3). Die uniforme Struktur $S_{1,l}$ hat auf $\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ nach [1], Chap. III, § 3, Prop. 1 folgende Eigenschaften:

I. $S_{1,l}$ kann definiert werden mittels eines solchen Fundamentalsystems $\mathfrak{B}_{1,l}$ von Bändern, dessen Elemente $U_{1,l}$ gegenüber den Linkstranslationen $(X, Y) \to (AX, AY)$ $(A, X, Y \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}))$ invariant sind.

II. Jede Rechtstranslation $X \to XA(A, X \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}))$ ist eine gleichmäßig stetige Abbildung des mit der Struktur $S_{1,l}$ versehenen Raumes $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ in sich.

Aus I folgt, wenn man den Definitionsbereich der Linkstranslationen $(XY) \to (AX, AY)$ auf $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ bzw. auf $(\mathfrak{H}\, x^*) \times (\mathfrak{H}\, x^*)$ beschränkt und $A = x^*$ bzw. $A = x^{*-1} (x^* \in \mathfrak{H})$ setzt: Die Relationen (2) und (3) sind für jedes U mit $U = (U_{1,l} \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$, $U_{1,l} \in \mathfrak{B}_{1,l}$ erfüllt. Beschränkt man entsprechend den Definitionsbereich der Rechtstranslationen $X \to XA$ auf $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}\, y^*$ und setzt man $A = y^*$ bzw. $A = y^{*-1} (y^* \in \mathfrak{H})$, so erkennt man, daß auch (4) und (5)

gelten müssen für jedes $y^* \in \mathfrak{H}$ und jedes $U = (U_{1,l} \cap (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}))$, $U_{1,l} \in \mathfrak{B}_{1,l}$. Also gibt es auf $\mathfrak{H}$ ein Fundamentalsystem $\mathfrak{B}$ von Bändern mit den in Satz 2 angeführten Invarianzeigenschaften.

Bemerkung 1. Ein anderes mit Satz 2 gleichwertiges Einbettungstheorem findet sich in einer Arbeit von Tamari ([7], Théorème 2). Es sind nämlich (2) und (3) zusammen gleichwertig der Aussage, daß die $U \in \mathfrak{B}$ saturiert sind bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation R in $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$:

$$(\alpha, a)\, R\, (\alpha_1, a_1) \text{ genau dann, wenn } x, x_1 \text{ existieren}$$
$$\text{mit } x\alpha = x_1\alpha_1 \text{ und } xa = x_1 a_1 (\alpha, \alpha_1, a, a_1, x, x_1 \in \mathfrak{H}).$$

(4) und (5) hingegen sind Invarianzforderungen gegenüber gewissen „partiellen" Translationen (siehe [7], 4). Ein Vorteil des in der vorliegenden Arbeit benutzten Einbettungsverfahrens gegenüber der eleganten Schlußweise in [7] besteht darin, daß jene Methode verallgemeinerungsfähig ist für Halbgruppen, die nur in Quotientenhalbgruppen einbettbar sind (siehe unten Satz 3) und daß sie ganz elementar formulierbare Bedingungen benutzt.

Bemerkung 2. Die auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{H})$ nach dem Verfahren aus 3 konstruierte uniforme Struktur S_1 ist mit der linksseitigen uniformen Struktur $S_{1,l}$ dieser topologischen Gruppe identisch. Nach [1], Chap. III, § 3, Ex. 1 ist nämlich $S_{1,l}$ unter allen auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ definierten und mit der Topologie T_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ verträglichen uniformen Strukturen dadurch ausgezeichnet, daß $S_{1,l}$ ein Fundamentalsystem von Bändern zuläßt, dessen Elemente gegenüber jeder Translation $(X, Y) \to (AX, AY)$ $(A, X, Y \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}))$ invariant sind. Die Sätze 1 und 2 aus 3 besagen aber unter anderem, daß S_1 die für $S_{1,l}$ charakteristischen Eigenschaften besitzt.

Satz 3. *Voraussetzung:* $\mathfrak{H}$ sei eine in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbare Halbgruppe ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{m}$ wie in 1). $\mathfrak{H}$ trage eine uniforme Struktur S, die ein solches Fundamentalsystem $\mathfrak{B}$ von Bändern zuläßt, für dessen Elemente die Relationen (2) und (4) ohne Einschränkung, sowie die Relationen (3) und (5) unter den Nebenbedingungen $x^*\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ bzw. $\mathfrak{m}\, y^* \cap \mathfrak{m} \neq \theta$ erfüllbar sind.

Behauptung: $\mathfrak{H}$, versehen mit der von S deduzierten Topologie T, stellt eine topologische Halbgruppe dar, die man mittels der in 3 entwickelten Methoden (d. h. durch „invariante Fortsetzung" der uniformen Struktur S) in ihre Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ auch in topologischer Hinsicht einbetten kann[5]). Dieser Fortsetzungsprozeß bewirkt zugleich eine Einbettung der topologischen Halbgruppe $\mathfrak{m}$ in die topologische Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$[5]). Das Verfahren aus 3 liefert auf $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ die linksseitige uniforme Struktur dieser topologischen Gruppe. Die auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ erhaltene Topologie T_1 ist mit T zugleich Hausdorffsch oder nicht Hausdorffsch.

[5]) Die Topologisierung der Halbgruppen $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}$ ist wie folgt vorzunehmen: $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ trägt die Topologie T_1, die aus der invarianten Fortsetzung S_1 von S auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ abgeleitet ist; $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{m}$ tragen die von T_1 bzw. T auf $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{m}$ induzierte Topologie. — Offenbar sind $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ und $\mathfrak{m}$ uniformisierbar, und zwar mittels der uniformen Strukturen S^* bzw. S_0, die von S_1 bzw. S auf $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{m}$ induziert werden.

Beweis. $\mathfrak{H}$, versehen mit der Topologie T, ist eine topologische Halbgruppe (2, Satz 1; 2, Bemerkung). S kann invariant zu einer uniformen Struktur S_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortgesetzt werden (3, Satz 1). Wegen der Invarianzeigenschaften von S_1 (3, Sätze 1, 2; 3, Bemerkungen 1, 2) muß die Multiplikation in $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ stetig im Sinne der von S_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ abgeleiteten Topologie T_1 sein (siehe 2, Satz 1; 2, Bemerkung). Durch die Fortsetzung von S zu S_1 werden die topologischen Halbgruppen $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{H}$ in die topologischen Halbgruppen $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eingebettet [5]) (3, Satz 1, b), und zwar ist T_1 mit T zugleich HAUSDORFFsch und nicht HAUSDORFFsch (3, Bemerkung; [1], Chap. II, § 2, Prop. 1). S^* [5]) besitzt die Eigenschaften I und II von $S_{1,l}$ auf $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ (siehe Beweis des Satzes 2). Daraus folgt: $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ ist sogar eine topologische Gruppe, und S^* stellt die linksseitige uniforme Struktur dieser topologischen Gruppe dar (vgl. Beweis des Satzes 2).

Bemerkung 3. Die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine als existent vorausgesetzte Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ algebraisch und topologisch so einbetten läßt, daß dieser Einbettungsprozeß die Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ zu einer topologischen Gruppe macht, scheint schwieriger zu sein. Man kann durch Schlußweisen, die dem zweiten Teil des Beweises zu Satz 2 analog sind, zeigen: Damit eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit uniformer Struktur S („uniforme Halbgruppe") in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ so eingebettet werden kann, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eine uniforme Halbgruppe wird, die $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ als topologische Untergruppe enthält, ist notwendig, daß die in Satz 3 angeführten Voraussetzungen erfüllt sind mit der Abänderung, daß (2) nur für diejenigen $x^* \in \mathfrak{H}$ mit $x^* \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m} \neq 0$ gültig ist.

Bemerkung 4 (vgl. auch [7], 6). Bettet man eine uniforme Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ nach dem in 3 entwickelten Verfahren ein (soweit möglich), so ist die Topologie T_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ durch die invariant fortgesetzte uniforme Struktur S von $\mathfrak{H}$, nicht aber durch die Topologie T von $\mathfrak{H}$, eindeutig bestimmt. Es kann nämlich eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ verschiedene mit T verträgliche uniforme Strukturen (mit gewissen Invarianzeigenschaften) zulassen, und diese Strukturen können unter Umständen auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu verschiedenen Topologien Veranlassung geben. Einfachste Beispiele sind von TAMARI [7], 6 und mir [5], § 3 angegeben worden. Die Verschiedenheit der Topologien, die gewisse Methoden zur Einbettung kommutativer metrischer Halbgruppen $\mathfrak{H}$ in Quotientengruppen $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ auf diesen letzteren liefern, hat in dem eben Erwähnten seinen Grund. (Vgl. hierzu insbesondere ein Theorem von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT ([3], Theorem 15) und [5], § 6.)

Bemerkung 5. Die obigen Sätze stellen im wesentlichen Übertragungen von Sätzen aus [5], § 5 auf den Fall dar, daß man metrisierbare uniforme Strukturen auf Halbgruppen durch beliebige uniforme Strukturen ersetzt und zugleich schwächere Invarianzforderungen stellt. Insbesondere entsprechen den Sätzen 1, 2, 3 bzw. die Sätze 1, 2, 4 aus [5], § 5.

Abschließend soll noch gezeigt werden, wie man aus den Sätzen dieses Abschnitts die Ergebnisse von [5], § 5 erhalten kann. Es genügt, den folgenden Satz 4 zu beweisen, da aus diesem die Sätze von [5], § 5 durch Spezialisierung hervorgehen.

Satz 4. *Voraussetzung:* $\mathfrak{H}$ sei eine in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbare Halbgruppe. $\mathfrak{H}$ trage eine bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariante Metrik[6]) $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ mit

$$|ca, cb| \leq K\, |a, b| \qquad |ac, bc| \leq K\, |a, b| \tag{6}$$

$(a, b, c$ beliebig $\in \mathfrak{H}$; K eine reelle Konstante $\geq 1)$.

Behauptung: a) $\mathfrak{H}$ stellt eine metrische Halbgruppe dar[7]), deren Metrik $|a, b|$ zu einer bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invarianten Metrik $\|A, B\|$ von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ derart fortgesetzt werden kann, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ (mit der Metrik $\|A, B\|$) eine metrische Halbgruppe wird, in die die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eingebettet ist.

b) Diese „bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariante Fortsetzung“ $\|A, B\|$ der Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist durch die letztere eindeutig bestimmt; und zwar gilt:

$$\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |xa, yb| \text{ falls } \alpha, \beta \in \mathfrak{m},\ a, b, x, y \in \mathfrak{H} \text{ und } x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}; \tag{7}$$

$$\|CA, CB\| \leq K\, \|A, B\| \qquad \|AC, BC\| \leq K\, \|A, B\| \tag{8}$$

$(A, B, C$ beliebig $\in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$; K die reelle Konstante aus (6)).

c) Durch die Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ gemäß a), b) wird zugleich die metrische Halbgruppe $\mathfrak{m}$ (Metrik $|\alpha, \beta|$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{m})$) in die topologische Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ mit der invarianten Metrik $\|\mathsf{A}, \mathsf{B}\|$ $(\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}))$ eingebettet.

Beweis. Man setze für beliebige $\varepsilon \geq 0$

$$U^{(\varepsilon)} = \{(a, b) : a, b \in \mathfrak{H};\ |a, b| \leq \varepsilon\}.$$

Dann stellt $\mathfrak{B} = \{U^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon \geq 0}$ ein Fundamentalsystem von Bändern einer uniformen Struktur S auf $\mathfrak{H}$ dar. S und $\mathfrak{B}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 3 mit einer für den Beweis dieses Satzes unwesentlichen Ausnahme[8]), so daß Satz 3 in vollem Umfange anwendbar ist. Zu zeigen bleibt noch, daß die topologischen (Halb-)Gruppen $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ und $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ metrisierbar sind bezüglich einer Metrik $\|A, B\|$ mit den oben angeführten Eigenschaften.

Setzt man für $U^{(\varepsilon')}_1 \in \mathfrak{B}_1$ und $A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$[9])

$$\|A, B\| = \inf\{\varepsilon' : (A, B) \in U^{(\varepsilon')}_1\}, \tag{9}$$

[6]) Eine auf einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ definierte Metrik $|a, b|$ heißt bezüglich einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ *invariant*, wenn für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$ und beliebiges $h \in \mathfrak{h}$ $|ha, hb| = |a, b| = |ah, bh|$ gilt. Vgl. auch [5], § 3.

[7]) Das heißt, eine solche topologische Halbgruppe, deren Topologie aus einer Metrik ableitbar ist.

[8]) (2) braucht hier nicht für alle $x^* \in (\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})))$ erfüllt zu sein. Doch wird die Forderung: Aus $(a, b) \in U$ folgt $(x^*a, x^*b) \in U$ für jedes $U \in \mathfrak{B}$ und jedes $x^* \in (\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})))$ nur benötigt, um sicher zu sein, daß die Menge aller Linkstranslationen $x \to ax$ eine gleichgradig stetige Familie von Abbildungen des uniformen Raumes $\mathfrak{H}$ in sich ist. Unter den Voraussetzungen des Satzes 4 ist aber diese letztere Bedingung gewiß erfüllt.

[9]) Hier und im folgenden werden die in 3 eingeführten Bezeichnungen benutzt.

so gilt wegen der Eigenschaften von $\mathfrak{B}_1$ (vgl. 3, Satz 1):

$$\|A, B\| = \|B, A\| \geqq 0 \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m});$$
$$\|\mathsf{A} A, \mathsf{A} B\| = \|A, B\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}); \mathsf{A} \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m});$$
$$\|a, b\| = |a, b| \qquad a, b \in \mathfrak{H}.$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß die durch (9) definierte Funktion $\|A, B\|$ der Relation (7) genügt. Ferner ist klar, daß nur diese Funktion als bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariante Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ in Frage kommt. Daß $\|A, B\|$ in der Tat eine Metrik auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ darstellt, ergibt sich unter Benutzung von (7) wie der Beweis von [5], § 5, (2), (3). Ferner hat man

$$\|A, B\| = \|A \mathsf{A}, B \mathsf{A}\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}); \mathsf{A} \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$$

(vgl. hierzu [5], S. 460, Beweis des Satzes 2, b); Folgerung 4). Daß die Ungleichungen (8) zu Recht bestehen, folgt wie in [5], S. 460/61, Beweis des Satzes 3.

Die mittels des Fundamentalsystems $\mathfrak{B}_1$ definierte uniforme Struktur S_1 auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist mit der durch die Metrik $\|A, B\|$ definierten Struktur identisch, da für jedes $\varepsilon \geqq 0$ und jedes $U^{(\varepsilon)}{}_1 \in \mathfrak{B}_1$ offenbar

$$U^{(\varepsilon)}{}_1 \subseteq \{(A, B) : A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}); \ \|A, B\| \leqq \varepsilon\} \subseteq U^{(2\varepsilon)}{}_1$$

gilt. Die Teile a) und b) des Satzes 4 sind damit bewiesen. Die Richtigkeit der Behauptung c) ist evident.

Literatur

[1] N. Bourbaki: Topologie générale Chap. II, III. 2e ed. Paris 1951. — [2] P. Dubreil: Algèbre, Tome I. 2e ed. Paris 1954. — [3] B. Gelbaum, G. K. Kalisch and J. M. H. Olmstedt: On the embedding of topological semigroups and integral domains. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 807—821 (1951). — [4] K. Murata: On the quotient-semigroup of a non commutative semigroup. Osaka Math. J. **2**, 1—5 (1950). — [5] E. Schieferdecker: Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen. Math. Z. **62**, 443—468 (1955). — [6] E. Schieferdecker: Zur Einbettung metrischer Halbgruppen und Ringe in ihre Quotientenstrukturen. Diss. München 1954. Maschinenschrift, 59 S. — [7] D. Tamari: Sur l'immersion d'un semi-groupe topologique dans un groupe topologique. Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres. C.N.R.S. Paris 1950, 217—221.

(Eingegangen am 9. Dezember 1955)

LENZ, H.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 385—389 (1956)

Zur Definition der Flächen zweiter Ordnung

Von
HANFRIED LENZ in München

Die zweckmäßigste synthetische Definition der Kegelschnitte hat v. STAUDT[1]) gegeben: *Ein Kegelschnitt ist die als nicht leer vorausgesetzte Menge der hinsichtlich einer festen Polarität*[2]) *zu sich selbst konjugierten Punkte und Geraden der reellen projektiven Ebene.*

Diese selbstduale Definition läßt sich unmittelbar auf den n-dimensionalen Raum über beliebigem Koordinatenkörper[3]) K übertragen, wenn man noch voraussetzt, daß die Polarität π *projektiv* ist, d. h. eine Gerade projektiv auf ein Ebenenbüschel[3]) abbildet. Im reellen Raum ist diese Bedingung, die die Kommutativität des Koordinatenkörpers nach sich zieht (BAER a. a. O. S. 132, Proposition 1, BAG S. 52), bekanntlich[4]) von selbst erfüllt. Ziel dieser Note ist der die Entwicklungen bei BAER (a. a. O. S. 131—138) ergänzende

Satz: *Wenn in einem projektiven Raum beliebiger endlicher oder unendlicher Dimension (oder in einer projektiven Ebene, in der der Satz von* DESARGUES *gilt) eine Quasipolarität*[5]) *gegeben ist von der Eigenschaft, daß eine Gerade g existiert, die mindestens zwei, aber höchstens endlich viele selbstkonjugierte Punkte enthält, so gilt der Satz von* PAPPOS-PASCAL.

Wenn g außerdem unendlich viele nicht selbstkonjugierte Punkte enthält, so ist die Quasipolarität projektiv. Die Menge der selbstkonjugierten Punkte und Hyperebenen ist eine Fläche zweiter Ordnung im klassischen Sinn, d. h. das Nullstellengebilde einer die Null darstellenden quadratischen Form[6]). *Die Charakteristik $\chi(K)$ des Koordinatenkörpers K ist dann $\neq 2$.*

Zum Beweis benötigen wir drei Hilfssätze:[7])

[1]) K. G. C. v. STAUDT: Geometrie der Lage, § 246, S. 137. Nürnberg 1857.

[2]) Zur Definition der Polarität s. R. BAER: Linear algebra and projective geometry, p. 109; H. LENZ: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. 1954, S. 17—72, insbesondere S. 48, im folgenden mit BAG zitiert; ferner: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. Math. Ann. 128, 363—372 (1954), im folgenden mit AP zitiert.

[3]) Unter einem Körper verstehen wir in dieser Note einen kommutativen oder nichtkommutativen Körper, unter Schiefkörper einen nichtkommutativen Körper.

[4]) G. DARBOUX: Math. Ann. 17, 55—61 (1880).

[5]) Zu den verwendeten Begriffen vgl. AP. Eine Quasipolarität ist eine umkehrbare Abbildung π der Punkte des Raumes in den dualen Raum mit der Eigenschaft, daß aus $A \in \pi B$ stets $B \in \pi A$ folgt.

[6]) Im Fall unendlicher Dimension sind quadratische Formen entsprechend den Entwicklungen in AP durch $x_i x^i = g^{ik} x_i x_k$ zu definieren.

[7]) Einige einfache Tatsachen werden hier bewiesen, obwohl sie bei BAER a. a. O. zu finden sind; einmal weil die axiomatischen Ausgangspunkte bei BAER und in den Arbeiten BAG und AP verschieden, wenn auch äquivalent sind, und zum anderen, um dem Leser das Nachschlagen zu ersparen.

Hilfssatz 1. *Wenn der Durchschnitt $\mathfrak{d}$ einer Geraden p mit ihrem Polarunterraum $\pi\, p$ nicht leer ist, so enthält p entweder genau einen oder lauter selbstkonjugierte Punkte, nämlich gerade die Punkte von $\mathfrak{d}$* (vgl. Baer a. a. O. S. 133).

Das ist im Fall $p \cap \pi\, p = p$ klar. Es sei also nun $\mathfrak{d} = p \cap \pi\, p = P$ ein Punkt. Jeder Punkt von p ist konjugiert zu P. Wäre ein Punkt $A \neq P$ von p selbstkonjugiert, so wäre er auch zu P, also zu jedem Punkt von p konjugiert. Denn ein Punkt, der zu zwei Punkten konjugiert ist, ist zu jedem Punkt ihrer Verbindungsgeraden konjugiert. Daher wäre jeder Punkt von p zu P und zu A, also auch zu sich selbst konjugiert und läge daher doch in $\pi\, p$.

Hilfssatz 2. *Enthält die Gerade g mindestens zwei, aber nicht lauter selbstkonjugierte Punkte, so ist die Anzahl ihrer selbstkonjugierten Punkte gleich $\mathfrak{k} + 1$, wobei $\mathfrak{k}$ die Lösungsanzahl der Gleichung*

$$\xi + \overline{\xi} = 0 \tag{1}$$

bedeutet. Dabei wird durch Überstreichen die Anwendung des involutorischen Automorphismus bezeichnet, der durch die Quasipolarität π definiert wird, wenn man sie in bekannter Weise (vgl. AP) *durch Gleichungen*

$$\pi\, x_i = x^i\,. \tag{2}$$

$$x^i = g^{ik}\,\overline{x}_k,\ g^{ki} = \overline{g}^{ik},\ \overline{\overline{\xi}} = \xi \qquad \text{für alle } \xi \in K \tag{3}$$

darstellt (vgl. Baer a. a. O. S. 138). (Die Quasipolarität kann kein Nullsystem sein, weil für ein solches alle Punkte des Raumes selbstkonjugiert sind.)

Auf g wird durch die Vorschrift (weil $g \cap \pi\, g$ nach Voraussetzung und Hilfssatz 1 leer ist)

$$\Pi\, P = \pi\, P \cap g \qquad \text{für } P \in g \tag{4}$$

eine (i. a. nicht projektive) *Involution Π* erklärt. Sie hat nach Voraussetzung zwei Fixpunkte, etwa mit den Koordinaten r_i, s_i. Es ist $r_i s^i \neq 0$, weil sonst $g \cap \pi\, g = g$ wäre. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei $r_i s^i = 1$. Ein Punkt mit den Koordinaten $x_i = r_i + \mu\, s_i$ ist selbstkonjugiert, wenn und nur wenn

$$x_i x^i = 0 + r_i s^i \overline{\mu} + \mu\, s_i r^i + 0 = \overline{\mu} + \mu = 0$$

ist, w.z.b.w.

Hilfssatz 3. *Ist K ein Schiefkörper*[3]) *mit einem involutorischen Antiautomorphismus $\mu \to \overline{\mu}$, so hat die Gleichung*

$$\xi + \overline{\xi} = 0 \tag{1}$$

unendlich viele Lösungen in K.

Beweis: *Fall 1: $\chi(K) = 2$.*

Die Lösungen von (1) sind jetzt einfach die *invarianten Elemente γ von K*, für die also $\gamma = \overline{\gamma}$ ist. Wenn diese eine endliche Menge $\mathfrak{M}$ bilden (sonst sind wir fertig), so gibt es zu jeder Lösung β von (1) nur endlich viele $\alpha \in K$, für die $\beta = \alpha - \overline{\alpha}$ ist. Denn aus

$$\alpha - \overline{\alpha} = \alpha' - \overline{\alpha'}$$

folgt $\alpha - \alpha' = \overline{\alpha - \alpha'}$, d. h. $\alpha - \alpha' \in \mathfrak{M}$.

Nun ist aber $\beta = \gamma - \bar{\gamma}$ für alle $\gamma \in K$ eine Lösung von (1). Daher kann K nur endlich viele Elemente enthalten und ist daher nach dem bekannten Satz von WEDDERBURN[8]) kommutativ, w.z.b.w.

Fall 2: $\chi(K) \neq 2$.

Wir nehmen an, die Menge $\mathfrak{M}$ der Lösungen von (1) sei endlich. Sie enthalte etwa m Elemente.

I. C sei ein kommutativer Teilkörper von K, der nicht aus lauter invarianten Elementen besteht. Es sei also etwa $\alpha \in C$, $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Dann ist jedes Element von C quadratisch und separabel über dem Unterkörper C_0 der invarianten Elemente von C, wenn es nicht selbst invariant ist. Nach dem Satz vom primitiven Element ist daher C selbst quadratische Erweiterung von C_0, etwa $C = C_0(\sqrt{\beta})$ mit $\beta \in C_0$. $\sqrt{\beta}$ ist Lösung von (1), ebenso $\delta\sqrt{\beta}$ mit beliebigem $\delta \in C_0$. Hat C also p^{2k} bzw. unendlich viele Elemente, so gibt es in C p^k bzw. unendlich viele Lösungen von (1).

II. Damit ist der Fall $\chi(K) = 0$ erledigt. Es sei jetzt $\chi(K) = p > 2$. *Ist α ein beliebiges Element von K, so genügt α einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus dem Primkörper P, deren Grad eine feste Schranke s nicht überschreitet.*

Ist nämlich $\alpha \neq \bar{\alpha}$ und α über P nicht algebraisch vom Grad $\leq s$, so liegen nach I schon in $P(\alpha)$ mindestens $p^{\frac{s+1}{2}}$ Lösungen von (1). Ist aber α invariant, so sei β ein nichtinvariantes Element. Ein solches existiert, denn andernfalls wäre der Antiautomorphismus $\mu \to \bar{\mu}$ die Identität und K kommutativ. Wir setzen $\gamma = \frac{\alpha + \beta - \bar{\beta}}{2}$. Dann ist $\gamma \neq \bar{\gamma}$ und $\alpha = \gamma + \bar{\gamma}$ liegt in einem Unterkörper von $P(\gamma)$. Wäre also α nicht algebraisch von höchstens s^{tem} Grad über P, so lägen schon in $P(\gamma)$ mindestens p^{s+1} Lösungen von (1). Daher muß unsere Behauptung richtig sein.[9])

III. *K enthält unendlich viele invariante Elemente.* Denn jedes Element $\gamma \in K$ gestattet eine eindeutige Zerlegung

$$\gamma = \xi + \mu \text{ mit } \xi + \bar{\xi} = 0,\ \mu = \bar{\mu}\,. \tag{5}$$

Man erhält aus (5) nämlich

$$2\mu = \gamma + \bar{\gamma}\,.\, 2\xi = \gamma - \bar{\gamma}\,.$$

Gäbe es nur endlich viele invariante Elemente, so wäre nach (5) und wegen $\xi \in \mathfrak{M}$ der Körper K endlich, also kommutativ.

IV. *Sind α, β zwei invariante Elemente von K, so enthält K unendlich viele invariante Elemente, die mit α und β vertauschbar sind.*

---

[8]) Siehe z. B. H. ZASSENHAUS: Lehrbuch der Gruppentheorie, S. 70—71 (Beweis von E. WITT). Leipzig und Berlin 1937.

[9]) Wie mir Herr PICKERT mitteilte, folgt hieraus schon, daß K kommutativ ist (vgl. N. JACOBSSON: Structure theory for algebraic algebras of bounded degree. Ann. of Math. (2) **46**, 695—707 (1945); I. KAPLANSKY: A theorem on division rings. Canadian J. of Math. **3**, 290—292 (1951); I. N. HERSTEIN: An elementary proof of a theorem of Jacobsson. Duke Math. J. **21**, 45—48 (1954); T. NAKAYAMA: On the commutativity of certain division rings. Canadian J. Math. **5**, 242—244 (1953). Der folgende ganz elementare Beweis des Hilfssatzes 3 macht von diesem Ergebnis keinen Gebrauch.

Für jedes μ mit $\mu = \bar{\mu}$ ist nämlich $\alpha\mu - \mu\alpha \in \mathfrak{M}$, $\beta\mu - \mu\beta \in \mathfrak{M}$. Wir nehmen an, die Menge $\mathfrak{N}$ der invarianten Elemente μ, für die $\alpha\mu - \mu\alpha = \beta\mu - \mu\beta = 0$ ist, enthalte nur endlich viele, etwa n Elemente. Zu jedem der m^2 Paare ξ, η mit $\xi \in \mathfrak{M}$, $\eta \in \mathfrak{M}$ gibt es dann höchstens n Lösungen des Gleichungssystems (mit der Unbekannten μ)

$$\begin{aligned} \alpha\mu - \mu\alpha &= \xi\,, \\ \beta\mu - \mu\beta &= \eta\,, \\ \mu &= \bar{\mu}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Denn sind μ, μ' zwei solche Lösungen, so ist $\mu - \mu' \in \mathfrak{N}$. Danach gäbe es höchstens nm^2 invariante Elemente im Widerspruch zu III.

V. *Es gibt in K zwei nicht vertauschbare, invariante Elemente α, β.* Wären nämlich alle invarianten Elemente vertauschbar, so würden sie einen unendlichen kommutativen Körper H bilden, was dem Ergebnis von II widerspricht. Denn die endlich vielen möglichen Gleichungen höchstens s^{ten} Grades mit Koeffizienten aus P haben insgesamt in einem kommutativen Körper nur endlich viele Lösungen.

VI. Es sei also $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. *Wir wollen zeigen, daß schon in dem Schiefkörper $P(\alpha, \beta) = K'$ unendlich viele Lösungen von* (1) *liegen.*

Nach IV [10]) sind unendlich viele Elemente von K' mit α und β vertauschbar. Sie bilden einen Körper L. Die mit allen Elementen von L vertauschbaren Elemente von K' bilden einen Körper, der P, α und β enthält, also mit K' identisch ist. Daher ist L das Zentrum von K'. $\alpha\beta$ ist ein nichtinvariantes Element von K'. Daher ist $L(\alpha\beta) = C$ ein kommutativer Körper mit unendlich vielen Elementen, die nicht alle invariant sind. Nach I. hat daher die Gleichung (1) schon in C unendlich viele Lösungen. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Nun können wir den eingangs aufgestellten Satz rasch beweisen: Wir nehmen an, K sei nicht kommutativ. Die Gerade g enthält nicht nur selbstkonjugierte Punkte, weil sonst K endlich, also doch kommutativ wäre. Nach den Hilfssätzen 2 und 3 müßte g nun im Widerspruch zur Voraussetzung unendlich viele selbstkonjugierte Punkte enthalten. K ist also kommutativ, d. h. der Satz von Pappos-Pascal gilt.

Wenn g unendlich viele Punkte enthält, so ist die Lösungsanzahl von (1) auch bei kommutativem Koordinatenkörper unendlich, außer, wenn der Automorphismus $\mu \to \bar{\mu}$ die Identität und außerdem $\chi(K) \neq 2$ ist. Damit ist alles bewiesen, denn die selbstkonjugierten Punkte sind nun gegeben durch die Gleichung $x_i x^i = x_i g^{ik} x_k = g^{ik} x_i x_k = 0$.

Man kann daher die Flächen zweiter Ordnung wie folgt synthetisch definieren: In einem projektiven Raum (AP S. 363) *sei zwischen seinen Punkten eine binäre Relation $A \wedge B$ („A konjugiert zu B") erklärt mit folgenden Eigenschaften:*

K I: *Aus $A \wedge B$ folgt $B \wedge A$.*

K II: *Aus $A \wedge B$, $A \wedge C$, $D \in \overline{BC}$ folgt $A \wedge D$.*

K III: *Aus $B \neq C$ folgt, daß zu jedem Punkt A ein Punkt $D \in \overline{BC}$ mit $A \wedge D$ existiert.*

[10]) [angewandt auf K']

K IV: *Kein Punkt ist zu allen Punkten konjugiert.*

K V: *Es gibt eine Gerade, die zwei, aber nicht unendlich viele selbstkonjugierte Punkte enthält. Wenn die Gesamtzahl ihrer Punkte endlich ist, soll sie nicht kleiner sein als das Quadrat der Anzahl ihrer selbstkonjugierten Punkte.*

Die Punkte P mit $P \wedge P$ bilden eine Fläche 2. Ordnung. Die Eigenschaften K I bis K IV erklären nämlich nach AP, § 3 eine Quasipolarität. K V sichert nach unserem Satz, falls die Zahl der Punkte auf der Geraden unendlich ist, daß die Fläche zweiter Ordnung das Nullstellengebilde einer quadratischen Form ist. Hat aber unsere Gerade $p^{2k} + 1$ Punkte (p Primzahl), so ist die Zahl ihrer Punkte P mit $P \wedge P$ nach Hilfssatz 1 und 2, sowie Abschnitt I des Beweises von Hilfssatz 3, Fall 2, genau 2 oder aber mindestens $p^k + 1$, und das ist durch KV ausgeschlossen. Es wird von selbst $\chi(K) \neq 2$. Für $\chi(K) = 2$ kann man auch keine Flächen 2. Ordnung $g^{ik} x_i x_k = 0$ definieren, weil diese Gleichung einen linearen Unterraum darstellt, wenn $g^{ik} = g^{ki}$ ist. Man könnte bei der algebraischen Definition freilich auf diese Forderung verzichten, doch soll darauf nicht eingegangen werden. Will man von der obigen Definition ausgehend rein synthetische Geometrie der Flächen 2. Ordnung treiben, also algebraische Überlegungen vermeiden, so wird man allerdings mindestens als bekannt voraussetzen müssen, daß die in K V eingeführte Gerade tatsächlich genau zwei selbstkonjugierte Punkte enthält.

(Eingegangen am 13. Februar 1956)

KANOLD, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 390—392 (1956)

Eine Bemerkung über die Menge der vollkommenen Zahlen

Von

HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

Wir bezeichnen mit $V(n)$ die Anzahl der *verschiedenen* Primteiler einer natürlichen Zahl n und betrachten in dieser Note nur vollkommene Zahlen n, die also der Bedingung

$$\sigma(n) = 2n \tag{1}$$

genügen, wobei $\sigma(n)$ die Summe aller positiven Teiler von n bedeutet. Die Menge aller n sei $\mathfrak{N}$, die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}$, $n \leqq x$ sei $N(x)$. Vor kurzem zeigten B. VOLKMANN und B. HORNFECK, daß

$$N(x) = O(x^{5/6}) \tag{2}$$

bzw.

$$N(x) = O(x^{1/2}) \tag{3}$$

gelten muß. Einer brieflichen Mitteilung von Herrn HORNFECK (vom 12. 2. 1956) konnte ich entnehmen, daß er sogar

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)}{\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{2} \tag{4}$$

beweisen kann. In der vorliegenden Note soll dieses Ergebnis zu

$$N(x) = o(\sqrt{x}) \tag{5}$$

verschärft werden. Dabei werden wir einen bekannten Satz von L. E. DICKSON benutzen.

§ 1

Zunächst betrachten wir die Menge $\mathfrak{N}_K$, die genau aus allen den natürlichen Zahlen n bestehen soll, die neben (1) noch

$$V(n) \leqq K \tag{6}$$

erfüllen, wobei $K > 1$ eine beliebig vorgegebene, dann festgehaltene natürliche Zahl sein soll. Wir fragen nach der Anzahl $N_K(x)$ der $n \in \mathfrak{N}_K$, $n \leqq x$.

Nach dem bereits erwähnten Ergebnis von DICKSON enthält $\mathfrak{N}_K$, abgesehen von höchstens *endlich* vielen Ausnahmen, deren Anzahl gleich c_K sein soll, nur gerade vollkommene Zahlen. Somit ist also

$$N_K(x) \leqq c_K + N_2(x)\,. \tag{7}$$

Jedes $n \in \mathfrak{N}_2$ ist bekanntlich von der Gestalt

$$2^{p-1}(2^p - 1)\,, \tag{8}$$

wobei p und $2^p - 1$ Primzahlen sind. Aus $2^{p-1}(2^p - 1) \leqq x$ folgt

$$4^{p-1} < x\,;\ p < \frac{\log x}{\log 4} + 1\,. \tag{9}$$

Bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqq x$, so ist

$$N_2(x) \leqq \pi\left(\frac{\log x}{\log 4} + 1\right) < (1+\varepsilon)\,\frac{\frac{\log x}{\log 4} + 1}{\log\left(\frac{\log x}{\log 4} + 1\right)} \tag{10}$$

bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und hinreichend großen x. Aus (7) und (10) gewinnen wir leicht

$$N_K(x) < \frac{\log x}{\log\log x} \tag{11}$$

für alle genügend großen x.

§ 2

Wir betrachten jetzt die n, die (1) und

$$V(n) > K \tag{12}$$

genügen. Jedes solche n ist ungerade und besitzt die Gestalt

$$n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} \cdots q_r^{2\beta_r}\,;\quad p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4);\quad r \geqq K\,, \tag{13}$$

wobei noch o. B. d. A.

$$q_1 < \cdots < q_r \tag{14}$$

sein soll. Wir unterteilen nun noch einmal die Menge der n.

I. Diejenigen n, die (1), (12) genügen und für die in (13)

$$p^\alpha \geqq K \tag{15}$$

erfüllt ist, sollen die Menge $\mathfrak{N}'$ bilden. Wie man leicht sieht (und wie auch von Hornfeck bereits bemerkt wurde), ist die Zuordnung

$$n \leftrightarrow \frac{n}{p^\alpha} \tag{16}$$

eineindeutig. Also erhalten wir für die Anzahl $N'(x)$ der $n \in \mathfrak{N}'$, $n \leqq x$ die Abschätzung

$$N'(x) \leqq \sqrt{\frac{x}{K}}\,. \tag{17}$$

II. Die Menge $\mathfrak{N}''$ soll genau aus denjenigen n bestehen, für welche (1), (12) und in (13)

$$p^\alpha < K \tag{18}$$

gilt. Wir ordnen nun jedem $n \in \mathfrak{N}''$ die Zahl $m = \frac{n}{p^\alpha q_r^{2\beta_r}}$ zu und zeigen, daß auch diese Zuordnung eineindeutig ist. Daß jedem n genau ein m entspricht, ist trivial. Würden einem m zwei verschiedene n entsprechen, so hätten wir

$$\left\{\begin{aligned} & n = p^\alpha q_r^{2\beta_r} m\,;\ \bar{n} = \bar{p}^{\bar{\alpha}} \bar{q}_r^{2\bar{\beta}_r} m\,;\\ & \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(m)}{m}\cdot\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}\cdot\frac{\sigma(q_r^{2\beta_r})}{q_r^{2\beta_r}} = \frac{\sigma(\bar{n})}{\bar{n}} = \frac{\sigma(m)}{m}\cdot\frac{\sigma(\bar{p}^{\bar{\alpha}})}{\bar{p}^{\bar{\alpha}}}\cdot\frac{\sigma(\bar{q}_r^{2\bar{\beta}_r})}{\bar{q}_r^{2\bar{\beta}_r}}\,.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Wir beachten, daß wegen (13) und (18) die Ungleichungen

$$q_r, \bar{q}_r \geqq 2K + 1 > 2\,p^\alpha,\ 2\bar{p}^{\bar{\alpha}} \tag{20}$$

gelten. Aus (19) erhalten wir durch eine leichte Umformung

$$\begin{aligned} &\bar{p}^{\bar{\alpha}} \bar{q}_r^{2\beta_r} (1 + p + \cdots + p^\alpha)(1 + q_r + \cdots + q_r^{2\beta_r}) \\ &= p^\alpha q_r^{2\beta_r} (1 + \bar{p} + \cdots + \bar{p}^{\bar{\alpha}})(1 + \bar{q}_r + \cdots + \bar{q}_r^{2\bar{\beta}_r}). \end{aligned} \tag{21}$$

Die Ungleichungen (20) liefern jetzt

$$q_r^{2\beta_r} \mid \bar{q}_r^{2\bar{\beta}_r} \mid q_r^{2\beta_r}, \tag{22}$$

also

$$q_r = \bar{q}_r\ ;\ \beta_r = \bar{\beta}_r\,. \tag{23}$$

Dann folgt weiterhin aus (21)

$$p = \bar{p},\ \alpha = \bar{\alpha}\,. \tag{24}$$

Ist $N''(x)$ die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}''$, $n \leqq x$, so gilt also

$$N''(x) \leqq \sqrt{\frac{x}{5(2K+1)^2}}\,. \tag{25}$$

Aus (11), (17) und (25) ergibt sich daraus für alle hinreichend großen x

$$N(x) < \frac{\log x}{\log\log x} + \sqrt{\frac{x}{K}} + \sqrt{\frac{x}{5(2K+1)^2}} < 3\sqrt{\frac{x}{K}}\,. \tag{26}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann wählen wir $K > \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2$. Daraus folgt dann $N(x) < \varepsilon\sqrt{x}$. Damit ist die Behauptung (5) bewiesen.

Literatur

Dickson, L. E.: Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. Amer. J. of Math. **35**, 413—422 (1913). — Hornfeck, B.: Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen. Arch. d. Math. **6**, 442—443 (1955). — Volkmann, B.: Ein Satz über die Menge der vollkommenen Zahlen. J. reine u. angew. Math. **195**, 152—155 (1955).

(Eingegangen am 16. Februar 1956)

Bauer, F.-W.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 393—410 (1956)

Zur Dimensionstheorie der Kompakten im R^n

Von
Friedrich-Wilhelm Bauer in Frankfurt am Main

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der Brouwersche Dimensionsbegriff für ein Kompaktum φ durch Lageeigenschaften desselben im R^n charakterisiert. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz I. *Ist φ ein r-dimensionales Kompaktum des R^n und f_q eine beliebige dimensionale Funktion* ($q = -1, 0, 1, \ldots$), *so gilt:* (1) *Man kann zu jeder Kette c^p mit $\overline{Fc^p} \cap \varphi = 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Kette $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$ mit $f_{r+p-n}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) < \varepsilon$ finden.* (2) *Es gibt aber eine Kette c^p mit $\overline{Fc^p} \cap \varphi = 0$ und eine Zahl $\gamma > 0$, so daß $f_{r+p-n-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ ist für alle $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \gamma)$.* Man kann im zweiten Teil des Satzes die Aussage, daß $f_{r+p-n-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ ist, sogar für alle Ketten c_1^p mit $F\,c_1^p = F\,c^p$ erhalten. Solange nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, legen wir die ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich zugrunde. Der Satz I ist aus der Fragestellung heraus entstanden, folgende Behauptung über Polyeder auf Kompakten zu erweitern:

A. Ist P ein p-dimensionales Polyeder des R^n, so gilt:

(1) Zu jedem q-dimensionalen Polyeder Q und zu beliebigem $\varepsilon > 0$ kann man eine ε-Verschiebung f finden, so daß $\dim f(Q) \cap P \leqq p + q - n$ ist.

(2) Es gibt aber ein q-dimensionales Polyeder Q und eine Zahl $\gamma > 0$, so daß für jede ε-Verschiebung $f(\varepsilon \leqq \gamma)$ $\dim f(Q) \cap P > p + q - n - 1$ ist.

Der französische Mathematiker Antoine konstruierte ein 0-dimensionales Kompaktum $M \subset R^3$ und dazu, ebenfalls im R^3, ein Quadrat K, so daß man nicht durch beliebig kleine ε-Verschiebungen K von Punkten von M befreien kann. Wir sehen hieraus, daß man in der Behauptung A nicht das Polyeder P durch ein beliebiges Kompaktum ersetzen kann. In Satz I sind die ε-Verschiebungen durch ε-Homologien ersetzt worden, die Aussage $\dim f(Q) \cap P \leqq$ $\leqq p + q - n$ schwächen wir ab, indem wir nur noch verlangen, daß die dimensionelle Funktion des Durchschnittes beliebig klein gemacht werden kann. Hierbei ist die dimensionelle Funktion f_q eine reellwertige nicht negative Funktion auf dem Raum $\mathfrak{R}(\varphi)$ aller kompakten Teilmengen einer Menge φ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $f_q(M) = 0$ dann und nur dann, wenn $\dim M \leqq q$.

(2) Halbstetigkeit, d. h. $\overline{\lim} f_q(t_i) \leqq f_p(\lim t_i)$ für jede konvergente Folge $\{t_i\}$ in $\mathfrak{R}(\varphi)$ und

(3) Monotonie.

Für $q \leqq -1$ wird $f_q(M)$ gleich Null oder Eins gesetzt, je nachdem ob $M = 0$ oder $M \neq 0$ ist.

K. SITNIKOW, der sich mit den gleichen Problemen befaßt, dabei aber andere Wege geht als wir, benutzt in [7] den α^p-Operator, von dem in der vorliegenden Arbeit bewiesen wird, daß er eine dimensionelle Funktion ist.

Im Fall $p = n - r$ heißt die Behauptung von Satz I so:

B. Für eine Kette $c^p (p < n - r)$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ kann man eine Kette $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$ finden, so daß $\bar{c}_1^p \cap \varphi = \theta$ ist. Es gibt aber eine Kette c^{n-r} und eine Zahl $\gamma > 0$, so daß für alle c_1^{n-r} mit $Fc_1^{n-r} = Fc^{n-r}$ und $\bar{c}_1^{n-r} \subset$ $\subset U(\bar{c}^{n-r}, \gamma)$ $\bar{c}_1^{n-r} \cap \varphi \neq \theta$ gilt. Dieser Sachverhalt wurde von P. S. ALEXANDROW im Jahre 1932 gefunden und unter anderem in [2] in folgender Form ausgesprochen:

Satz II. *Ist φ ein r $(\leqq n - 1)$-dimensionales Kompaktum des R^n, so gilt:*

(1) *Jeder Zyklus z^q $(q < n - r - 1)$, der im $R^n - \varphi$ liegt und im R^n in einer ε-Umgebung von sich berandet, tut dies auch schon in einer ε-Umgebung rel. $R^n - \varphi$.*

(2) *Es gibt aber eine Zahl $\gamma > 0$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ einen Zyklus z^{n-r-1} im Restraum $R^n - \varphi$, so daß z^{n-r-1} zwar in $U(\bar{z}^{n-r-1}, \varepsilon)$, aber nicht in $U(\bar{z}^{n-r-1}, \gamma) \cap$ $\cap (R^n - \varphi)$ berandet.*

Der Zyklus z^{n-r-1} ist der Rand des Teiles unserer Kette c^{n-r} aus B, der in einer genügend kleinen Umgebung von φ liegt. Ein genauer Beweis dafür, daß aus B Satz II folgt, wird im 6. Teil der vorliegenden Arbeit erbracht.

Der Satz II ist allgemein unter dem Namen *Alexandrowscher Rechtfertigungssatz* oder auch *Hindernissatz* bekannt.

Wir wollen zur Behauptung B und zu Satz II ein Beispiel bringen, welches die von ALEXANDROW stets betonte Anschaulichkeit dieser Art von Sätzen unterstreichen soll.

Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ der x-Achse des R^3, welches offenbar ein 1-dimensionales Kompaktum ist. Sei c^1 eine beliebige 1-dimensionale Kette im R^3, so kann man die Simplexe dieser Kette, die mit $[0, 1]$ einen gemeinsamen Durchschnitt haben, leicht so abändern, daß eine neue Kette entsteht, für welche $\bar{c}_1^1 \cap [0, 1] = \theta$ gilt, vorausgesetzt, daß $\overline{Fc^1} \cap [0, 1] = \theta$ war. Andererseits nehmen wir ein 2-Simplex σ^2, dessen Durchmesser kleiner als $1/8$ ist, dessen Trägerebene senkrecht auf der x-Achse steht und dessen Schwerpunkt mit dem Punkt $(x, y, z) = (1/2, 0, 0)$ zusammenfällt. Indem wir σ^2 orientieren, machen wir es zu einer Kette c^2, für welche $\overline{Fc^2} \cap [0, 1] = \theta$ ist. Offenbar gibt es in $U(\bar{c}^2, 1/4)$ keine Kette, die den gleichen Rand wie c^2 hat und deren Körper zu $[0, 1]$ fremd ist. Ebenso ist der Zyklus Fc^2 mit $\gamma = 1/4$ ein Beispiel für Satz II. Wir wollen diesen Satz noch durch ein zweites Beispiel erläutern. Diesmal sei φ ein beliebiges 0-dimensionales Kompaktum des R^n. Man kann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in \varphi$ $(i = 1, \ldots, N)$ finden, so daß es um jedes x_i polyedrale ε-Umgebungen gibt, so daß der Rand dieser Umgebungen U_i (rel. R^n) zu φ fremd ist und so daß die Vereinigungsmenge dieser U_i φ enthält. Sei nun c^{n-1} eine beliebige $(n-1)$-dimensionale Kette mit $\overline{Fc^{n-1}} \cap \varphi = \theta$, so kann man sich den Teil eines Simplexes von c^{n-1}, der mit φ einen nicht-leeren Durchschnitt hat, durch einen Teil des Randes von geeigneten U_i ersetzt denken. Andererseits

erfüllt jede polyedrale Umgebung von φ, wenn wir diese nur irgendwie orientieren, die Bedingung, daß alle Ketten, die den gleichen Rand wie sie haben, mit φ einen nicht leeren Durchschnitt haben, und damit erst recht die Bedingung des Satzes.

P. S. Alexandrow und K. Sitnikow gehen beim Beweis ihrer Sätze so vor, daß sie zunächst die Äquivalenz der Induktionsdimension mit der Homologiedimension genommen über dem Koeffizientenbereich der reellen Zahlen mod 1 beweisen, und zwar geschieht das mittels des Hopfschen Abbildungssatzes. Der Alexandersche Dualitätssatz in der Pontrjaginschen Verschärfung liefert dann den Satz II.

Wir wollen eine Skizze des Beweisgedankens zu Satz I geben.

Zu Satz I (1). Wir führen vollständige Induktion nach r. Wir finden endlich viele Punkte $x_i \in \varphi$ und zu diesen hinreichend kleine Umgebungen U_i im R^n, so daß $\dim(Rd_R n\, U_i) \cap \varphi \leqq r-1$ und so daß $\bigcup U_i \supset \varphi$. Außerdem soll $\overline{Fc^p} \cap \bigcup \overline{U}_i = \theta$ sein. Wegen Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, daß die dimensionelle Funktion in der Dimension $r+p-n-1$ für die Menge $(\bigcup Rd\, U_i) \cap \varphi \cap \overline{c^p}$ hinreichend klein wird. Nun nehmen wir hinreichend kleine Vollkugeln K_i um x_i, und zwar können wir auch hier erreichen, daß $\bigcup K_i \cap \overline{Fc^p} = \theta$ ist. Der Teil von c^p, der in K_i liegt, möge c_i^p heißen. Es berandet Fc_i^p auf $Rd\, K_i$ eine Kette k_i^p und $c_i^p - k_i^p$ berandet in K_i eine Kette w_i^{p+1}. Wenn $U_i \subset K_i$ war, so kann man unter nochmaliger Anwendung der Induktionsvoraussetzung diesmal für die Kette w_i^{p+1} und die Menge $(\bigcup Rd\, U_i) \cap \varphi$ erreichen, daß die dimensionelle Funktion in der Dimension $p+r-n$ für den Durchschnitt hinreichend klein ist. Die Kette w_i^{p+1} ändern wir nun so zu einer Kette $w_i'^{p+1}$ ab, indem wir aus $K_i - U_i$ so viele Simplexe von w_i^{p+1} herausnehmen, daß $\overline{Fw_i'^{p+1} - c_i^p}$ $Rd\, U_i$ so nahekommt, daß f_{r+p-n} $(\overline{Fw_i'^{p+1} - c_i^p} \cap \varphi)$ kleiner wird als unser vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Letzteres ist wegen der Halbstetigkeit möglich. Diese lokale Konstruktion läßt sich zu einer Konstruktion der gewünschten Kette c_1^p erweitern.

Zu Satz I (2). Wir befassen uns zunächst mit zwei Behauptungen, die in allerdings sehr viel komplizierterer Form für den ganzen Beweis charakteristisch sind.

C. Ist $\dim \varphi \geqq r$, so gibt es eine Ebene E_0^p, eine Zahl $\gamma > 0$, so daß für jede zu E_0^p parallele Ebene E^p in $U(E_0^p, \gamma)$ $\dim E^p \cap \varphi \geqq r+p-n$ ist. Wir verwenden vollständige Induktion nach $s = n-p$. Zunächst kann man eine Ebene E_0^{n-1} finden, so daß $\dim E_t^{n-1} \cap \varphi \geqq r-1$ ist, für alle (zu E_0^{n-1} parallelen) Ebenen $E_t^{n-1} \subset U(E_0^{n-1}, \gamma)$ für ein geeignetes $\gamma > 0$. Die Wahl des Parameters t kann insbesondere so erfolgen, daß, wenn dieser von 0 bis 1 läuft, gerade alle Ebenen in $U(E_0^{n-1}, \gamma)$ erfaßt werden. Nun führen wir die Betrachtung noch einmal durch, ersetzen dabei aber den R^n durch E_t^{n-1}, φ durch $E_t^{n-1} \cap \varphi$. Wir finden eine Zahl $\gamma_t > 0$, eine Ebene $E_{0t}^{n-2} \subset E_t^{n-1}$, so daß mit diesen Bezeichnungen wieder unsere Behauptung gilt. Wenn man also E_{0t}^{n-2} in E_t^{n-1} parallel verschiebt, so gilt für alle hinreichend wenig verschobenen Ebenen E_{st}^{n-2} (t fest, $0 \leqq s \leqq 1$): $\dim E_{st}^{n-2} \cap \varphi \geqq r-2$. Verläßt man hingegen bei einer solchen Parallelverschiebung von E_{0t}^{n-2} die Ebene E_t^{n-1}, so

erhält man zwar eine Ebene $E^{n-2} \subset E_{t'}^{n-1}$ mit $t' \neq t$, aber über deren Durchschnitt mit φ kann man keine Aussage mehr machen, weil es zwar auch hier ein $E_{0t'}^{n-2}$ gibt, wir aber nichts über dessen Abstand von E_{0t}^{n-2} und damit von E^{n-2} wissen. Hier hilft uns nun die Behauptung 1 E der vorliegenden Arbeit weiter, die uns eine Ebene $E_{0\tau}^{n-2}$ finden läßt, so daß $E_{0\tau}^{n-2}$ zu E_{0t}^{n-2} benachbart ist für alle E_t^{n-1}, die zu E_τ^{n-1} benachbart sind. Außerdem kann man wegen 1 D voraussetzen, daß $\inf \gamma_t > 0$ ist für alle diese t. Es gilt nun in der Tat, daß $E^{n-2} \frown \varphi$ eine Dimension $\geqq r-2$ hat für alle zu $E_{0\tau}^{n-2}$ benachbarten und parallelen Ebenen. In dieser Weise kann man die vollständige Induktion anlegen, die zum Beweis von C führt.

D. Es gibt eine $(n-1)$-dimensionale Kette c^{n-1} im R^n, eine Zahl $\gamma > 0$, so daß $\dim \bar{c}_1^{n-1} \frown \varphi \geqq r-1$ ist für alle $c_1^{n-1} \sim c^{n-1}$ in $U(\bar{c}^{n-1}, \gamma)$. Es gibt ein $x \in \varphi$, so daß für jedes $U \subset U(x, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ $\dim (Rd\, U) \frown \varphi \geqq r-1$ ist. Dies ist aber nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß $\dim \varphi \geqq r$ ist. Nehmen wir eine polyedrale $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von x, so kann man diese durch Orientierung zu einer Kette $\mathfrak{x}^n$ machen. Wir setzen $c^{n-1} = F\mathfrak{x}^n$. Ist $c_1^{n-1} \sim$ $\sim c^{n-1}$ in $U(\bar{c}^{n-1}, \frac{\varepsilon}{4})$, so gibt es eine Kette c^n, so daß $Fc^n = c_1^{n-1} - c^{n-1}$ und $\bar{c}^n \subset U(\bar{c}^{n-1}, \frac{\varepsilon}{4})$. Die Kette $\mathfrak{x}^n + c^n$ ist so beschaffen, daß $\overline{\mathfrak{x}^n + c^n} \subset U(x, \frac{3}{4}\varepsilon)$ abgeschlossene Hülle einer polyedralen Umgebung von x ist, und es gilt: $\bar{c}_1^{n-1} \supset Rd_{R^n} \overline{\mathfrak{x}^n + c^n}$, also ist erst recht $\dim \bar{c}_1^{n-1} \frown \varphi \geqq r-1$.

Hätten wir die Behauptung D nicht für den Fall des R^n formuliert, sondern wäre φ ein Kompaktum gewesen, welches auf dem Körper einer p-dimensionalen Kette c_0^p liegt, so würde der letzte Schluß in unserem Beweis versagen. Es wäre durchaus nicht mehr $\bar{c}_1^{p-1} \supset Rd_{\bar{c}_0^p} \overline{\mathfrak{x}^n + c^p}$, und wir können nur etwas über den mengentheoretischen Rand, nichts mehr aber über den Körper des algebraischen Randes aussagen. Zum Beweis von Satz I brauchen wir gerade diese Behauptung nicht nur für den R^n, sondern für beliebige Kettenkörper. Hier hilft uns der Satz von der Regularität weiter, der uns in beliebiger Nachbarschaft von c_0^p eine solche Kette finden läßt, auf deren Körper obiger Schluß über das Verhältnis des mengentheoretischen und algebraischen Randes immer noch zulässig ist. Diese abgeänderte Kette $c_0'^p$ wird in unserem Beweis nur für den Fall $p = n-1$ gebraucht. Bei ihrer Konstruktion wird laufend die Tatsache benutzt, daß wir unsere Ketten über dem Bereich der ganzen Zahlen genommen haben. Hier ist die Stelle, wo der Koeffizientenbereich eingeht. Es war notwendig, daß wir irgendwo auf ihn stoßen mußten, denn für beliebige Koeffizientenbereiche gilt der Alexandrowsche Rechtfertigungssatz gar nicht mehr. Seine Aussage charakterisiert dann eine Homologiedimension, die, wie die Pontrjaginschen Gegenbeispiele lehren, im allgemeinen nicht mehr mit der Brouwerschen Induktionsdimension äquivalent ist.

Der Beweis unseres Satzes wird nun, ähnlich wie die Behauptung C, durch vollständige Induktion nach $s = n - p$ geführt. Wir haben nur die dort genannten Ebenen durch Kettenkörper zu ersetzen, deren Ketten alle den gleichen Rand haben. Für jeden derartigen Kettenkörper c^{p+1} wissen wir, daß er mit φ einen hinreichend hoch dimensionalen Durchschnitt hat. Hier verwenden wir nun unsere Behauptung D, diesmal nicht für den R^n, sondern

für diesen Kettenkörper oder evtl. für eine benachbarte Kette c_1^{p+1}, die den gleichen Rand wie c^{p+1} hat und die regulär ist. Indem wir ähnlich wie in C weiter schließen, kommen wir schließlich zum Beweis unseres Satzes.

Es muß noch bemerkt werden, daß der Beweis selber in Wahrheit die ganze Schwierigkeit, die durch die regulären Ketten hereinkommt, in den Fall $s = 2$ verlagert.

Für alle $s \geqq 3$ geht dieses Problem nicht mehr in den Induktionsschluß von s auf $s + 1$ ein.

Der Raum $\mathfrak{R}(\varphi)$ gibt uns die Möglichkeit, für die Gesamtheit aller Kettenkörper von Ketten mit festem Rand oder für die Gesamtheit aller Teilmengen des Kompaktums Schlüsse nutzbar zu machen, wie sie etwa der Bairesche Dichtigkeitssatz liefert. Wie aus der Beweisandeutung hervorgeht, tritt der Dimensionsbegriff in dieser Arbeit nur in Gestalt der Induktionsdimension auf. Diese induktive Dimension wird unmittelbar zu einem induktiven Beweis des Satzes benutzt. Irgendwelche tieferliegenden Sätze oder Begriffe der Dimensionstheorie sowie überhaupt aus der Topologie werden hierbei nicht benutzt. Die Bezeichnungen und topologischen Grundbegriffe sind aus [6] entnommen worden.

1. Die Topologie des Raumes $\mathfrak{R}(\varphi)$

Sei φ eine Teilmenge des R^n, so nennen wir $\mathfrak{R}(\varphi)$ die Gesamtheit aller nicht-leeren Teilmengen von φ. Für uns ist nur der Fall, indem $\varphi = R^n$ oder φ ein Kompaktum ist, von besonderer Wichtigkeit.

A. Bekanntlich [4] ist: $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \inf(\varepsilon \mid \varphi_1 \subset U(\varphi_2, \varepsilon),\ \varphi_2 \subset U(\varphi_1, \varepsilon))$ für beliebige $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{R}(\varphi)$ eine Metrik und es ist

B. $\mathfrak{R}(\varphi)$ dann und nur dann kompakt, wenn φ kompakt ist. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, gilt unsere besondere Aufmerksamkeit reellen Funktionen auf $\mathfrak{R}(\varphi)$. Wir definieren:

Eine reelle Funktion über einem topologischen Raum soll *halbstetig* heißen, wenn $\overline{\lim}(f(t_i)) \leqq f(\lim t_i)$ für jede konvergente Folge $\{t_i\}$ gilt.

Für ganzzahliges nicht negatives r heißt eine halbstetige Funktion $f_r(t)$ $(t \in \mathfrak{R}(\varphi))$ *dimensionell*, wenn $f_r(t) \geqq 0$; $f_r(t) = 0$ dann und nur dann, wenn $\dim t \leqq r$. Außerdem soll f_r monoton sein, d. h. es soll $f_r(t_1) \leqq f_r(t_2)$ sein, wenn $t_1 \leqq t_2$ ist. Es wird ferner $f_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$ festgesetzt für $r \leqq -1$. Wir bemerken, daß, wenn $\dim \varphi > 0$ ist, eine dimensionelle Funktion nie stetig sein kann, denn man kann φ mit einem Netz von endlich vielen Punkten überziehen, so daß jeder Punkt von φ von einem Punkt des Netzes einen vorgegebenen Abstand hat. Die Eigenschaft der Halbstetigkeit werden wir in folgender Weise ausnutzen:

C. Ist R ein kompakter metrischer Raum, $f(t)$ eine beliebige reelle Funktion auf R, welche überall positiv ist, so gibt es eine offene Menge 0, eine in 0 dichte Menge J, eine Zahl $\gamma > 0$, so daß $f(t) > \gamma$ ist für alle $t \in J$.

Beweis: Wäre C falsch, so würde für beliebiges rationales $\varepsilon > 0$ die Menge $L_\varepsilon = \{t \mid f(t) > \varepsilon\}$ in R nirgends dicht liegen, da aber $\bigcup L_\varepsilon = R$ ist, widerspricht das dem Baireschen Dichtigkeitssatz [5] und C ist bewiesen.

D. Ist unter gleichen Voraussetzungen wie in C $f(t)$ sogar halbstetig, so ist $f(t) > \gamma$ für alle $t \in \bar{0}$.

Folgende sehr allgemeine Behauptung wird uns noch gute Dienste leisten:

E. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}(R^n)$ kompakt. Zu jedem $a \in \mathfrak{A}$ soll es gewisse $b_a \in \mathfrak{B}$ mit $b_a \subset a$ und zu jedem $b \in \mathfrak{B}$ gewisse $a \in \mathfrak{A}$ mit $b = b_a$ geben. Man kann zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, ein $a_0 \in \mathfrak{A}$ und ein $b_0 \subset a_0$ finden, so daß es für alle $a \in U_{\mathfrak{R}}(a_0, \delta)$ ein b_a mit $b_a \in U_{\mathfrak{R}}(b_0, \varepsilon)$ gibt. Wir machen an dieser Stelle darauf aufmerksam, daß der Index an einer Umgebung auf den Raum hinweisen soll, relativ zu dem sie genommen wird. Das gleiche gilt für die Bezeichnung $Rd_A M$, welche besagt, daß es sich um den Rand der Menge M relativ zu einem sie enthaltenden Raum A handelt. Den Index A werden wir weglassen, wenn dadurch keine Unklarheiten entstehen können.

Beweis: Wir nehmen ein festes $a_0 \in \mathfrak{A}$ und ein festes $b_0 \subset a_0$ und betrachten die Menge L_0 aller der a, für die es ein $b_a \in U_{\mathfrak{R}}(b_0, \frac{\varepsilon}{2})$ gibt. Es gibt in $\mathfrak{B}$ endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_N$, so daß $\bigcup U_{\mathfrak{R}}(b_i, \frac{\varepsilon}{2}) \supset \mathfrak{B}$. Es gibt zu jedem b_i ein a_i mit $b_i \subset a_i$ und es gilt $\bigcup L_i = \mathfrak{A}$, denn es kann kein a geben, welches nicht ein $b_a \in U_{\mathfrak{R}}(b_i, \frac{\varepsilon}{2})$ enthält. Es gibt also ein L_K, welches irgendwo in $\mathfrak{A}$ dicht liegt. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{B}$ ist alles gezeigt.

Wir konstruieren folgende Funktion, die für alle Kompakten des R^n erklärt ist und die wir im wesentlichen aus [7] entnehmen: Für ganzzahliges nicht negatives q ist $\alpha^q(\varphi)$ das Infimum aller der $\varepsilon > 0$, für welche es eine ε-Verschiebung von φ in eine Dimension $\leqq q$ gibt. Es ist

$$\alpha^q(\varphi) = \begin{cases} 0 \text{ für } \varphi = \theta \\ 1 \text{ für } \varphi \neq \theta \end{cases} \text{für } q \leqq -1.$$

Mit Hilfe des Alexandrowschen Überführungssatzes [1], des Tietzeschen Fortsetzungssatzes [5] und des Borsukschen Retraktionssatzes [5] beweist man, daß α^q eine dimensionelle Funktion ist. Nachdem wir eine dimensionelle Funktion haben, können wir uns leicht auf folgende Weise neue verschaffen:

F. Mit f_q, g_q sind auch $f_q + g_q$, $f_p g_q$, $\max(f_q, g_q)$ und für eine Zahl $\alpha > 0$ auch αf_q dimensionelle Funktionen.

Der Beweis läßt sich sofort aus der Definition einer dimensionellen Funktion ablesen. Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, daß folgender Satz, der aus Satz 1a und aus dem Beweis von Satz 2b folgt, Anlaß zur Definition einer dimensionellen Funktion gibt:

G. Ist $\dim \varphi = r$, so gibt es eine Zahl $\gamma > 0$, einen Zyklus z^{n-r}, so daß $\bar{z}_1^{n-r} \cap \varphi \neq \theta$ ist für alle $z_1^{n-r} \sim z^{n-r}$ in $U_{\mathfrak{R}}(\bar{z}^{n-r}, \gamma)$; für beliebiges $\varepsilon > 0$ und zu jedem Zyklus $z^k (k < n-r)$ gibt es aber einen Zyklus $z_1^k \sim z^k$ in $U_{\mathfrak{R}}(\bar{z}^k, \varepsilon)$ mit $\bar{z}_1^k \cap \varphi = \theta$. Hierbei löst man zweckmäßigerweise den Kettenbegriff von der in 2 geforderten Bedingung, daß die Körper $\bar{c}_1^p$ der Glieder unserer Limeskette eine Cauchy-Folge durchlaufen. Auch für derartige allgemeine Ketten bleiben Satz 1a und Satz 2b richtig.

2. Kombinatorische Grundbegriffe

Wir nennen Linearformen $c^p = \Sigma a_i \sigma_i^p$ von nicht entarteten orientierten Simplexen des R^n Ketten, wobei die a_i ganze Zahlen sind. Ist im R^n ein

Simplex entartet, so kann man durch beliebig kleine Verschiebungen der Eckpunkte dieses Simplexes erreichen, daß es nicht mehr entartet ist. Als Körper $\bar{c}^p$ einer Kette c^p bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Hüllen aller Simplexe, die mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten in c^p vorkommen. Im allgemeinen werden wir eine unterteilte Kette mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen wie die Ausgangskette. Wir nennen eine Kette *polyedral*, wenn ihre Simplexe auf der Triangulation eines Polyeders liegen. Jede Kette kann durch Unterteilung polyedral gemacht werden.

A. Sei eine polyedrale Kette $c^p = \Sigma\, a_i \sigma_i^p$ im R^n gegeben, so verändern wir sie zu einer Kette $\tilde{c}^p$ durch folgende Konstruktion: Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen ein Simplex σ'^p_i in der ε-Umgebung von ξ_i (Zentrum von σ_i^p). Das Prisma π_i^{p+1} mit der Grundfläche σ_i^p und der Deckfläche σ'^p_i kann durch Orientierung von σ'^p_i als Kette aufgefaßt werden, wenn man durch passende Wahl von σ'^p erreicht, daß $\bar{\pi}_i^{p+1}$ im R^n nicht entartet ist. Ebenfalls kann man durch Wahl von σ'^p_i erreichen, daß $\bar{\pi}_i^{p+1} \cap \bar{\pi}_j^{p+1} = \bar{\sigma}_j^p \cap \bar{\sigma}_i^p\ (i \neq j)$ wird. Wir setzen $\tilde{c}^p = \Sigma(a_i F\, \pi_i^{p+1} - a_i \sigma'^p_i) - c^p$. Die Kette c^p hat nun folgende für uns wichtige Eigenschaft: Es gibt keine Kette c_1^p mit $F c_1^p = F\tilde{c}^p$, so daß alle Simplexe von c_1^p zu c^p gehören (mit evtl. anderen Koeffizienten), aber nicht umgekehrt. Diese Eigenschaft ist unterteilungsinvariant.

Beweis: Jedes Simplex σ^p von $\tilde{c}^p$ gehört zu einem $F\pi^{p+1}$, und zwar insbesondere zu einem Prisma π^p, welches ein Seitensimplex ζ^{p-1} von σ^p mit dem entsprechenden Simplex ζ'^{p-1} von σ'^p aufspannt. Da nun jedes andere Simplex σ_1^p, mit welchem σ^p eine $(p-1)$-dimensionale Seite gemeinsam hat und welches auch zu π^p gehört, den gleichen Koeffizienten wie σ^p hat, müßte man beim Übergang von $\tilde{c}^p$ zu einem evtl. vorhandenen c_1^p auch ein Simplex weglassen, welches mit ζ'^{p-1} inzidiert, was aber wegen $F\tilde{c}^p = F c_1^p$ nicht zulässig ist.

Um die Unterteilungsinvarianz zu beweisen, gehen wir indirekt vor. Unterteilen wir $\tilde{c}^p$, so müßten wir mit jedem neugewonnenen Simplex σ^p, welches wir bei einer evtl. Reduktion weglassen, auch alle die Simplexe wegnehmen, die zu dem gleichen Simplex der Kette $\tilde{c}^p$ vor der Unterteilung gehörten. Dies aber widerspricht der Annahme, daß $\tilde{c}^p$ die Eigenschaft A vor der Unterteilung hatte.

Wir haben die Kette $\tilde{c}^p$ eingeführt, weil sich folgende beiden Behauptungen beweisen lassen:

B. Es gibt zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes c_1^p mit $F\tilde{c}^p = F c_1^p$ und $\bar{c}_1^p \subset U(\bar{\tilde{c}}^p, \delta)$ auch $\bar{\tilde{c}}^p \subset U(\bar{c}_1^p, \varepsilon)$ gilt.

Beweis: Man mache $\varepsilon' < \varepsilon$ so klein, daß sich $U(\bar{\tilde{c}}^p, \delta)$ auf $\bar{\tilde{c}}^p\ \frac{\varepsilon'}{3}$ retrahieren läßt, sodann approximiere man diese Retraktion f feiner als $\frac{\varepsilon'}{3}$ simplizial durch eine Abbildung f_1. Wir können f_1 als Kettenabbildung von c_1^p in $\bar{\tilde{c}}^p$ auffassen. Wegen A ist $\overline{f_1 c_1^p} = \bar{\tilde{c}}^p$ und damit ist aber auch schon unsere Behauptung gezeigt.

Die Behauptung B gilt nicht nur für unser oben konstruiertes $\tilde{c}^p$, sondern darüber hinaus für alle Ketten c^p, die die Eigenschaft haben, daß es keine

Kette c_1^p gibt, deren Simplexe alle auch zu c^p gehören, daß es aber ein Simplex von c^p gibt, welches nicht zu c_1^p gehört, wobei $F c_1^p = F c^p$ ist.

Die Behauptung C geht noch einen Schritt weiter.

C. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $F c_1^p = F \bar{c}^p$ und $\bar{c}_1^p \subset U(\bar{\bar{c}}^p, \delta)$ $c_1^p \sim \bar{c}^p$ in $U(\bar{\bar{c}}^p, \varepsilon)$ folgt.

Beweis: Wir behaupten zunächst, daß $f_1 c_1^p = \bar{c}^p$ ist. Würde nämlich irgendein Simplex von $f_1 c_1^p$ einen anderen Koeffizienten als das entsprechende Simplex in $\bar{c}^p$ haben, so würde dies, wie man sofort aus der Konstruktion erkennt, gegen die Randtreue von f_1 verstoßen. Wir betrachten nun das Prisma von f_1 über c_1^p. Wenn man zuläßt (und wir werden dies stets tun dürfen), daß Eckpunkte von c_1^p beliebig wenig im R^n verschoben werden dürfen, kann man dieses Prisma zu einer polyedralen Kette P^{p+1} mit $F P^{p+1} = c_1^p - f_1 c_1^p = c_1^p - \bar{c}^p$ machen.

Da sich verschiedene Aussagen einfacher schreiben lassen, führen wir den Begriff der L-Kette ein:

Sei $\{c_i^p\}$ eine Folge polyedraler Ketten, deren Körper eine konvergente Folge bilden, dann nennen wir diese Folge eine *Limeskette* und schreiben gelegentlich auch $c^p = \lim c_i^p$. Als Körper dieser Limeskette definieren wir $\lim \bar{c}_i^p$.

Ist die Folge $\{c_i^p\}$ so beschaffen, daß $F c_i^p = z^{p-1}$ für ein polyedrales (evtl. für jedes i zu unterteilendes) z^{p-1} ist, so definieren wir $F\{c_i^p\} = \{F c_i^p\} = z^{p-1}$.

Die Kette z^{p-1} kann trivialerweise als Limeskette aufgefaßt werden. Ein polyedraler Zyklus z^{p-1} heißt *L-berandend*, wenn es eine solche L-Kette $\{c_i^p\}$ gibt. Wenn mit $\{\bar{c}_i^p\}$ zufälligerweise auch $\{\overline{F c_i^p}\}$ eine konvergente Folge ist, dann definieren wir $F\{c_i^p\} = \{F c_i^p\}$. Ist $\{\overline{F c_i^p}\}$ keine konvergente Folge, so kann man aus $\{c_i^p\}$ eine Teilfolge $\{c_{i(k)}^p\}$ auswählen, so daß $\{\overline{F c_{i(k)}^p}\}$ eine konvergente Folge wird. Natürlich kann man viele solcher Auswahlen treffen, die unter Umständen zu verschiedenen Rändern unserer Kette $\{c_i^p\}$ führen, aber da $\lim \bar{c}_i^p = \lim \bar{c}_{i(k)}^p$ ist, soll uns diese Willkür nicht stören. Wir stellen uns also überall da, wo es notwendig ist, irgendeine solche Auswahl vor und bezeichnen diese stillschweigend wieder mit $\{c_i^p\}$. Da es uns vorwiegend auf Eigenschaften von $\bar{c}^p$ ankommt, ist diese Willkür ohne Belang. Es erscheint ferner noch bemerkenswert, daß, wenn $\{\varepsilon_i\}$ eine beliebige Nullfolge reeller positiver Zahlen ist und man c_i^p feiner als ε_i unterteilt, $\bar{c}^p$ das Limeselement einer konvergenten Folge ist, deren i-tes Element die Eckpunktmenge der Kette c_i^p ist.

D. Es sei c^p eine L-Kette und V eine im R^n offene Menge. Wir nehmen alle Simplexe von einem hinreichend fein unterteilten c_i^p, die mit V einen nicht-leeren Durchschnitt haben, mit dem gleichen Koeffizienten wie in c_i^p und nennen die so entstandene Kette ζ_i^p. Es ist $\lim \zeta_i^p = \zeta^p$ eine L-Kette, und wenn $\overline{F c^p} \cap V = 0$ war, so ist $\overline{F \zeta^p} \subset Rd\, V$. Nach obiger Erklärung von $F \zeta^p$ muß man also eine solche Teilfolge $\{c_{i(k)}^p\}$ von $\{c_i^p\}$ nehmen, so daß $\{\overline{F \zeta_i^p}\}$ eine konvergente Folge ist. Für jede solche Auswahl gilt $\overline{F \zeta^p} \subset Rd\, V$. In diesem Sinne werden wir kurz von „dem Teil einer L-Kette c^p" sprechen, „der in einer offenen Menge V liegt". Diese Konstruktion wird besondere Bedeutung bekommen, wenn $V = K^n$ eine Vollkugel ist. Man sieht sofort,

daß, wenn $\overline{Fc^p} \cap V = \theta$ ist, $F\zeta^p$ (genauer: jedes mögliche $F\zeta^p$) auf $Rd\,K^n$ berandet.

Die Einführung der L-Ketten hat folgenden Sinn: Wenn man die Gesamtheit aller Kettenkörper $\bar{c}^p$, deren zugehörige Ketten im R^n zu einer vorgegebenen Kette homolog sind, oder die alle wenigstens den gleichen Rand wie diese haben, betrachtet, dann haben wir zwar eine Teilmenge aus $\mathfrak{R}(R^n)$, aber im allgemeinen kein Kompaktum vor uns. Man müßte also, wenn man Wert darauf legt, mit Kompakten zu arbeiten, von dem Raum aller Kettenkörper und von deren Limeselementen reden, mit anderen Worten, zur abgeschlossenen Hülle der oben erwähnten Teilmenge aus $\mathfrak{R}(R^n)$ übergehen. Die Einführung der L-Ketten erleichtert uns somit ein wenig unsere Formulierungen.

3. Reguläre $(n-1)$-dimensionale Ketten im R^n

Um unsere dimensionstheoretischen Sätze zu beweisen, genügen uns die in 2 dargelegten algebraischen Grundbegriffe allein noch nicht. Wir müssen uns weitergehende Kenntnisse über $(n-1)$-dimensionale Ketten im R^n verschaffen. Zunächst weisen wir auf die Möglichkeit hin, eine Kette $c^{n-1} = \Sigma a_i \sigma_i^{n-1}$ so zu einer Kette c'^{n-1} zu verändern, daß $Fc^{n-1} = Fc'^{n-1}$, $\bar{c}'^{n-1}$ in vorgegebener Nähe von $\bar{c}^{n-1}$ liegt, $\bar{c}'^{n-1} \supset \bar{c}^{n-1}$ ist und daß c'^{n-1} nur Simplexe mit dem Koeffizienten ± 1 hat. Auf σ_i^{n-1} als Grundfläche errichten wir $|a_i| - 1$ n-Simplexe b_j^n, und zwar so, daß sie alle in vorgegebener Nähe von $\bar{\sigma}_i^{n-1}$ liegen und daß $(Rd\,b_j^n - \bar{\sigma}_i^{n-1}) \cap (Rd\,b_k^n - \bar{\sigma}_i^{n-1}) = \theta$ ist für alle $j \neq k$. Außerdem kann man erreichen, daß für alle j $\bar{b}_j^n \cap (\bar{c}^{n-1} - \bar{\sigma}_i^{n-1}) = \theta$ ist. Indem wir nun die Ränder von b_j^n mit Ausnahme von σ_i^{n-1} passend orientieren, erhalten wir die gewünschte Ersetzung.

In 3 und überall da, wo wir die in 3 gewonnenen Resultate anwenden, wollen wir uns diese Ersetzung vorgenommen denken. Wir müssen noch bemerken, daß die Eigenschaft einer Kette, nur Simplexe mit dem Koeffizienten ± 1 zu besitzen, unterteilungsinvariant ist.

Wir kommen nun zur Definition der Regularität:

Eine *polyedrale Kette* c^{n-1} im R^n soll *regulär* heißen, wenn es zwei Ketten o_1^n und o_2^n im R^n gibt, so daß (1) $(\bar{c}^{n-1} - \overline{Fc^{n-1}}) \cap (F(\overline{o_1^n - o_2^n})) = \theta$ ist, (2) $\bar{o}_1^n \cap \bar{o}_2^n = \bar{c}^{n-1}$ ist, und endlich soll gelten: (3) Jedes Simplex von c^{n-1} soll in Fo_1^n und Fo_2^n mit dem gleichen Koeffizienten vorkommen, mit dem es in c^{n-1} vorkommt.

Wir nennen $o^n = o_1^n - o_2^n$, $c^{+n-1} = Fo_1^n - c^{n-1}$ und $c^{-n-1} = Fo_2^n - c^{n-1}$. Es gilt $Fc^+ = Fc^-$ und $\bar{c}^+ \cap \bar{c}^- = \overline{Fc}^{n-1}$.

Die Regularität ist eine unterteilungsinvariante Eigenschaft. Ist c^{n-1} regulär, so kann man insbesondere die Kette o^n in vorgegebener Umgebung von c^{n-1} finden. Es ist leicht, sich eindimensionale Ketten in der Ebene zu konstruieren, die nicht regulär sind.

Die Einführung folgender Begriffe wird für uns sich als sehr bequem erweisen:

Wir nennen $S[a^{n-1}, s^p]$, $0 \leq p < n-2$, wobei c^{n-1} das Simplex a^{n-1} und die Kante s^p von a^{n-1} enthält, die Gesamtheit aller der Simplexe b^{n-1} aus

c^{n-1}, die sich durch die Kette $a^{n-1}, a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \ldots, b^{n-1}$ von Simplexen a_i^{n-1} aus c^{n-1}, die alle die Kante s^p haben, mit a^{n-1} verbinden lassen, wobei je zwei aufeinander folgende Simplexe eine Seite s^{n-2} gemeinsam haben, die nicht zu Fc^{n-1} gehört. Für $p = n - 2$ ist $S[a^{n-1}, s^{n-2}]$ eine Menge, die als Elemente die beiden Simplexe a^{n-1} und b^{n-1} von c^{n-1} enthält, wobei b^{n-1} mit a^{n-1} die Seite s^{n-2} gemeinsam hat, so daß a^{n-1} und b^{n-1} auf s^{n-2} entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Zu einem a^{n-1} und einer Seite s^{n-2} kann es natürlich mehrere $S[a^{n-1}, s^{n-2}]$ geben.

Weiterhin nennen wir $S(a^{n-1}, s^p)$, $0 \leqq p \leqq n - 2$, die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Hüllen aller Simplexe aus $S[a^{n-1}, s^p]$, $R(a^{n-1}, s^p)$ die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Hüllen aller Simplexe t^{n-2}, die Seitensimplexe von Simplexen aus $S[a^{n-1}, s^p]$ sind und nicht die Kante s^p besitzen, und endlich soll mit $s(a^{n-1}, s^p)$ die Teilkette von c^{n-1} bezeichnet werden, die aus allen Simplexen von $S[a^{n-1}, s^p]$ mit der gleichen Orientierung wie in c^{n-1} besteht. Es gilt $\bar{s}^p \subset \overline{Fs(a^{n-1}, s^p)}$.

Diese Definitionen erlauben uns die Formulierung folgender, mit der Regularität in engem Zusammenhang stehender Eigenschaft:

(α^p). Wenn s^p eine Kante von σ^{n-1} und $\sigma_1{}^{n-1}$ aus c^{n-1} ist, aber s^p nicht zu Fc^{n-1} gehört, so gilt $\sigma_1{}^{n-1} \in S[\sigma^{n-1}, s^p]$ (und damit auch $\sigma^{n-1} \in S[\sigma_1{}^{n-1}, s^p]$). Für $p = n - 2$ heißt das, daß mit s^{n-2} genau zwei Simplexe σ^{n-1} und $\sigma_1{}^{n-1}$ inzidieren.

Es gilt sodann folgender Satz:

Satz von der Regularität

Zu jeder polyedralen Kette c^{n-1} und beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kette c'^{n-1} mit $\bar{c}'^{n-1} \in U_{\mathfrak{R}}(\bar{c}^{n-1}, \varepsilon)$ und $Fc^{n-1} = Fc'^{n-1}$, so daß für c'^{n-1} und $0 \leqq p \leqq n - 2$ (α^p) gilt und c'^{n-1} regulär ist.

Beweis: Für $p < n - 2$ wollen wir im folgenden voraussetzen, daß (α^q) ($q \geqq p + 1$) bereits gilt. Wir betrachten in einer festen Triangulation des R^n die Menge T aller n-Simplexe, die die Kante $x = s^p$ haben.

A. Die Kette $s(a^{n-1}, x)$ ist regulär. Es existiert eine Kette y^n, die mod $R\,d\,T$ von $s(a^{n-1}, x)$ berandet wird. Mit a^{n-1} möge das Simplex a_+^n aus y^n inzidieren. Wir betrachten die Menge aller der Simplexe von y^n, die sich mit a_+^n durch eine Folge von Simplexen aus T verbinden lassen, in denen je zwei aufeinander folgende Simplexe eine nicht zu $s(a^{n-1}, x)$ gehörende Seite gemeinsam haben. Jedem derartigen Simplex geben wir die durch a^{n-1} in a_+^n induzierte Orientierung. Die so entstehende Kette nennen wir s_1^n. Da für jedes $b^{n-1} \in S[a^{n-1}, x]$ ein und nur ein mit b^{n-1} inzidierendes n-Simplex zu s_1^n gehört, gilt $Fs_1^n = s(a^{n-1}, x) \bmod R\,d\,T$.

B. Für festes x gibt es zwei $S[a^{n-1}, x]$, so daß $(\bar{s}_1^n - \overline{s(a^{n-1}, x)}) \cap \bar{c}^{n-1} = 0$ ist, wenn nicht c^{n-1} bei $x = s^p$ ohnehin schon (α^p) erfüllte und wenn der R^n nur fein genug unterteilt war. Für $p = n - 2$ ist das klar, für $p < n - 2$ folgt es aus der Gültigkeit von (α^{n-2}). Wir ersetzen $s(a^{n-1}, x)$ durch $Fs_1^n - s(a^{n-1}, x)$, und wenn wir so fortfahren, erreichen wir, wenn wir nur fein genug unterteilt hatten, daß an der Seite x die Bedingung (α^p) erfüllt ist, ohne daß (α^q) woanders neu verletzt wird. Sei nämlich $x_1 = s^l$ eine Kante der neuen Kette $c^{n-1} -$

$-s(a^{n-1}, x) + Fs_1^n$, so hat man sich nur für den Fall zu interessieren, in dem x_1 zu Fs_1^n gehört, und auch hierbei ist der Fall, daß x_1 nicht gleichzeitig zu $c^{n-1} - s(a^{n-1}, x)$ gehört, trivial. In dem verbleibenden Fall, daß x_1 zu Fs_1^n und zu $c^{n-1} - s(a^{n-1}, x)$ gehört, zeigt man zunächst die Verbindbarkeit im Sinne von (α^l) für irgend zwei $(n-1)$-Simplexe aus Fs_1^n, die die Kante x_1 haben, und führt den allgemeinen Fall auf diesen zurück.

C. Man kann insbesondere erreichen, daß bei $x = s^p$ ein vorgegebenes $S[a^{n-1}, x]$ nicht verändert wird.

D. Aus (α^p), $0 \leq p \leq n-2$, folgt die Regularität von c^{n-1}.

Beweis: Wir unterteilen c^{n-1} so, daß jedes Simplex eine Ecke hat, die nicht zu Fc^{n-1} gehört. Sodann geben wir dem R^n eine feste Orientierung w. Für jede Ecke x $(\notin \overline{Fc^{n-1}})$ bilden wir das nunmehr eindeutig bestimmte $s(a^{n-1}, x)$ und nennen s_1^n die zugehörige Kette, in der alle Simplexe die Orientierung w haben. Wir bilden die Summe aller Simplexe von allen s_1^n und erhalten eine Kette o_1^n. Ebenso bilden die Simplexe von allen s_2^n eine Kette o_2^n. Wenn der R^n nur hinreichend fein unterteilt war, so erfüllen wegen (α^1) o_1^n und o_2^n die an sie gestellten Forderungen.

E. Wir zählen nun einige Eigenschaften von regulären Ketten auf:

(1) Ist c^{n-1} regulär und c_1^{n-1} eine Teilkette, in der alle Simplexe den gleichen Koeffizienten wie in c^{n-1} haben, so ist auch c_1^{n-1} regulär und $o_1^n\,[o_2^n]$ für c_1^{n-1} kann als Teilkette von $o_1^n\,[o_2^n]$ für c^{n-1} gewählt werden.

(2) Man kann insbesondere o_1^n, o_2^n so konstruieren, daß jedes Simplex von o_1^n, o_2^n mindestens eine Ecke mit c^{n-1} gemeinsam hat und so, daß alle Simplexe von o_1^n die gleiche, zu der aller Simplexe von o_2^n entgegengesetzte Orientierung haben.

(3) Es liege folgender Sachverhalt vor: Die Kette c^{n-1} sei regulär und genüge außerdem (α^p), $0 \leq p \leq n-2$. Es sei c_1^{n-1} eine ebenfalls reguläre Kette, deren Körper ganz im Innern von o_1^n für c^{n-1} liegt mit Ausnahme einer Teilkette $c_1'^{\,n-1}$ von c_1^{n-1} und von c^{n-1}, in der jedes Simplex von c_1^{n-1} den gleichen Koeffizienten hat, den es als Simplex von c^{n-1} hat. Man kann für c_1^{n-1} die Kette $o_1^n = u_1^n$ so finden, daß $\overline{(c_1^+)^{n-1}} - \overline{F(c^+)^{n-1}}$ ganz im Innern von o_1^n liegt (o_1^n hierbei natürlich für die Kette c^{n-1}).

Beweis: Wir benutzen (2) und nennen u_1^n die Kette, in der alle Simplexe die gleiche Orientierung wie die Simplexe von o_1^n (für c^{n-1}) haben. Gäbe es in o_2^n ein Simplex σ_1^n von u_1^n, so hat es eine Ecke x mit $c_1'^{\,n-1}$ gemeinsam, und wir können wegen (α^p) eine Folge $\sigma_1^n, \ldots, \sigma_k^n$ von Simplexen finden, die alle die Ecke x haben und in der je zwei aufeinanderfolgende Simplexe eine Seite gemeinsam haben, die nicht zu c^{n-1} oder c_1^{n-1} gehört, in der aber σ_k^n eine Seite σ^{n-1} aus $c_1'^{\,n-1}$ und damit auch aus c^{n-1} hat. Da σ^{n-1} als Simplex von c^{n-1} die gleiche Orientierung hat wie als Simplex von c_1^{n-1}, induziert es in σ_k^n und damit in σ^n die gleiche Orientierung, gleichgültig ob σ_1^n als Simplex von o_2^n oder als Simplex von u_1^n aufgefaßt wird. Das aber widerspricht der Annahme, daß σ_1^n in u_1^n die Orientierung von o_1^n und als Simplex von o_2^n die entgegengesetzte Orientierung haben sollte. Erfüllt unser u_1^n noch nicht die Behauptung (3), so braucht man es nur noch einmal baryzentrisch zu unterteilen. Der

Grund dafür, daß wir nicht direkt eine Kette c^{n-1}, die die Forderungen (α^p) für alle p erfüllt, regulär genannt haben, liegt darin, daß gerade die Eigenschaft der „Zweiseitigkeit", wie sie von einer regulären Kette gefordert wird, bei Zugrundelegung eines anderen Koeffizientenbereiches verletzt sein kann, obwohl alle (α^p) gelten.

4. Ein dimensionstheoretischer Rechtfertigungssatz (I. Teil)

In diesem und in den beiden folgenden Abschnitten werden wir die in 1—3 gewonnenen Erkenntnisse auf die Dimensionstheorie anwenden. Wie schon aus der Einleitung ersichtlich ist, müssen wir zur Charakterisierung der Dimension von Kompakten im R^n zwei Teilbehauptungen beweisen, von denen die eine sich mit dem Fall befaßt, daß dim $\varphi \leqq r$, und die andere mit dem Fall, daß dim $\varphi \geqq r$ ist. In diesem Abschnitt zeigen wir, was man für ein $\leqq r$-dimensionales Kompaktum aussagen kann. Unser Satz lautet:

Satz 1. *Sei φ ein $\leqq r$-dimensionales Kompaktum des R^n, c^p eine beliebige polyedrale Kette mit $\overline{Fc^p} \cap \varphi = 0$, f_{r+p-n} irgendeine dimensionelle Funktion und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so kann man eine Kette $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$ mit $f_{r+p-n}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) < \varepsilon$ finden.* $c^p \sim c_1^p$ im R^n heißt, daß es eine polyedrale Kette x^{p+1} gibt, so daß $F x^{p+1} = c^p - c_1^p$ ist. Zwei Ketten sollen also nur dann homolog sein, wenn $Fc^p = Fc_1^p$ ist.

Wir wollen Satz 1 nicht unmittelbar beweisen, sondern ihn aus einem schärferen Satz herleiten:

Satz 1a. *Sei $\mathfrak{N}$ eine $\leqq r$-dimensionale Teilmenge des R^n, c^p eine L-Kette, von der wir voraussetzen wollen, daß auch $\{\overline{Fc_i^p}\}$ eine konvergente Folge ist mit* $\dim \overline{Fc^p} \cap \mathfrak{N} \leqq r + p - n$, *so gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine L-Kette $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$ mit* $\dim \bar{c}_1^p \cap \mathfrak{N} \leqq r + p - n$. Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie Satz 1 aus Satz 1a folgt, wenn man beachtet, daß φ kompakt und f halbstetig vorausgesetzt werden.

Wir wollen, ehe wir zum Beweis des Satzes übergehen, noch daran erinnern, daß „$c^p \sim c_1^p$" für zwei Limesketten genauer folgendes heißt: Es gibt eine Limeskette $x^{p+1} = \{x_i^{p+1}\}$, so daß für alle i gilt: $F x_i^{p+1} = c_i^p - c_{1i}^p$. Gemäß unserer in 2 getroffenen Verabredung werden wir eine Kette $\{c_{i(k)}^p\}$, wobei die $\{i(k)\}$ eine Teilfolge in der Folge der $\{i\}$ sind, mit dem gleichen Buchstaben c^p bezeichnen wie die Ausgangskette. Die Körper und die Körper der Ränder stimmen bei beiden Ketten überein.

Wir wollen die Behauptung in Satz 1a etwas verschärfen und fordern nicht mehr „$c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$", sondern „$c_1^p \sim c^p$ in einer Menge $\boldsymbol{O}$", wobei O als offener Kern von $\boldsymbol{O}$ eine vorgegebene offene Menge des R^n ist, für welche $O \supset \bar{c}^p - \overline{Fc^p}$ gilt.

Zum Beweis dieser verschärften Behauptung führen wir vollständige Induktion nach r. Für $r = -1$ ist unsere Behauptung trivial, denn wir können $c_1^p = c^p$ setzen. Für $r - 1$ und alle p sei die Behauptung richtig. Um jeden Punkt $x \in \bar{c}^p - \overline{Fc^p}$ finden wir eine so kleine Umgebung $V'(x) \subset O$ (rel. R^n), so daß $d(V'(x)) < 1/4\, \varrho(x, \overline{Fc^p})$, $\dim (Rd_{R^n} V') \cap \mathfrak{N} \leqq r - 1$ ist. ([5] III 2). Man kann eine Menge $\mathfrak{M} = \{x_i\}$ aus abzählbar vielen Punkten aus $\bar{c}^p - \overline{Fc^p}$

finden, so daß alle x_i isoliert liegen und alle Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ zu $\overline{Fc^p}$ gehören. Ferner soll $\bigcup V'(x_i) \supset \bar{c}^p - \overline{Fc^p}$ sein. Diese Überdeckung ist sternendlich, d. h. mit jedem $V'(x_i)$ haben nur endlich viele $V'(x_k)$ einen gemeinsamen Durchschnitt. Wir zerlegen $V'(x_i)$ in den Teil, der mit keinem $V'(x_k)$ einen gemeinsamen Durchschnitt hat, dann nehmen wir für ein festes k den Teil von $V'(x_i) \cap V'(x_k)$, der mit keinem $V'(x_j)$ $(j \neq i, k)$ einen gemeinsamen Durchschnitt hat. Wenn wir in dieser Weise fortfahren, können wir also $\overline{V'(x_i)}$ als Vereinigungsmenge von abgeschlossenen Hüllen von offenen Mengen V_j schreiben, so daß keine zwei V_j einen gemeinsamen Durchschnitt haben und daß für irgendein $V'(x_k)$ entweder $V_j \subset V'(x_k)$ oder aber $V_j \cap V'(x_k) = \theta$ ist. Auf diese Weise wird $\bigcup \overline{V}_i$ eine sternendliche abgeschlossene Überdeckung von $\bar{c}^p - \overline{Fc^p}$, welche so beschaffen ist, daß $V_i \cap V_j = \theta$ für $i \neq j$ und daß $\bigcup Rd\ V_i = \bigcup Rd\ V'(x_k)$ ist. Wir behaupten, daß $\dim((\bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}) \leqq \leqq r-1$ ist. Dazu verwenden wir den Summensatz der Dimensionstheorie [5]. Es ist $\dim Rd\ V_i \cap \mathfrak{N} \leqq r-1$. Da aber $(Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}$ in $(\bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}$ abgeschlossen ist, gilt in der Tat $\dim (\bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N} \leqq r-1$. Zu der Menge $V'(x_i)$ finden wir eine Menge O mit $\bar{c}^p - \overline{Fc^p} \subset O \subset \bigcup V'(x_i)$ und $Rd\ O \supseteq Fc^p$, wobei O offen rel. R^n ist. Da $\overline{Fc^p} \cap (\mathfrak{N} \cap \bigcup Rd\ V_i) = \theta$ ist, können wir unsere Induktionsvoraussetzung für die Kette c^p, die Menge $(\bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}$ und die offene Menge O anwenden, und wir finden eine Kette, die wir wieder c^p nennen wollen, mit der Eigenschaft: $\dim \bar{c}^p \cap (\mathfrak{N} \cap \bigcup Rd\ V_i) \leqq r+p-n-1$.

Zu jedem V_i finden wir eine offene Vollkugel K_i^n, so daß $\overline{V}_i \subset K_i^n$, $d(K_i^n) < < 1/2\, \varrho(\overline{Fc^p}, V_i)$ und $\overline{K_i^n} \subset O$ ist. Wir nehmen den Teil von c^p, der in K_i^n enthalten ist, und wir nennen ihn $c_{(i)}^p$. Er berandet gemeinsam mit einer L-Kette ζ^p auf $Rd\ K_i^n$ mit $F\zeta^p = Fc_{(i)}^p$ eine L-Kette $\xi'^{p+1}_{(i)}$ in K_i^n. Wir verwenden nun wieder unsere Induktionsvoraussetzung für die Kette $\xi'^{p+1}_{(i)}$, die Menge $Rd\ V_i \cap \mathfrak{N}$ und für die offene Menge $O = K_i^n$.

Für die dabei entstehende neue Kette, die wir wieder $\xi'^{p+1}_{(i)}$ nennen, gilt: $\dim \bar{\xi}'^{p+1}_{(i)} \cap (Rd\ V_i \cap \mathfrak{N}) \leqq r+p-n$. Wenn wir den Teil von $\xi'^{p+1}_{(i)}$, der in V_i liegt, $\xi^{p+1} = \{\xi_{ij}^{p+1}\}$ und den Teil von c^p, der in V_i liegt, $c_i'^p = \{c_{ij}'^p\}$ nennen, so gilt: $F\bar{\xi}_i^{p+1} \cap F\bar{\xi}_j^{p+1} \subset Rd\ V_i \cap Rd\ V_j$ für $i \neq j$, wegen der Voraussetzung, daß $V_i \cap V_j = \theta$ ist. Die Kette, deren Existenz im Satz behauptet wird, ist $c_1^p = \lim_{j\to\infty} (c_j^p - \sum_{i=1}^{j} F\xi_{ij}^{p+1})$, wobei $\{c_i^p\} = c^p$ unsere Ausgangskette war. Man rechnet leicht nach, daß $\lim \sum_{i=1}^{j} \xi_{ij}^{p+1} = \xi^{p+1}$ eine L-Kette ist, mit $F\xi^{p+1} = c^p - c_1^p$, für deren Körper $\bar{\xi}^{p+1} \subset \overline{\bigcup \xi_{(i)}^{p+1}}$ gilt. Außerdem ist aber $\bar{\xi}^{p+1} \subset O$. Auf Grund unserer Konstruktion ist auch $\bar{c}_1^p - Fc^p \subset \bar{\xi}^{p+1} \cap \bigcup Rd\ V_i$, und der Summensatz der Dimensionstheorie liefert auch $\dim \bar{c}_1^p \cap \mathfrak{N} \leqq r+p-n$, da $(\bar{\xi}^{p+1} \cap \bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N} \subset (\bigcup \bar{\xi}_{(i)}^{p+1} \cap \bigcup Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N} = \bigcup_{i,j} (\bar{\xi}_{(i)}^{p+1} \cap Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}$, und wegen $Rd\ V_j \cap \bar{\xi}_{(i)}^{p+1} \subset \bar{\xi}_{(i)}^{p+1} \cap Rd\ V_i$ ist dies gleich $\bigcup_i (\bar{\xi}_{(i)}^{p+1} \cap Rd\ V_i) \cap \mathfrak{N}$. Die in 2 getroffenen Verabredungen garantieren uns, daß $F\xi^{p+1}$ und c_1^p tatsächlich Limesketten sind, wenn wir an den entsprechenden Stellen nur zu Teilfolgen von $\{\xi_{ij}^{p+1}\}$ und damit verbunden zu Teilfolgen von $c^p = \{c_i^p\}$ übergehen.

Aus der Art unseres Beweises geht unmittelbar hervor, daß wir im Grunde etwas mehr bewiesen haben und darum den Satz auch so formulieren könnten:

Satz 1b. *Satz* 1a *bleibt auch dann noch richtig, wenn wir von c^p fordern, daß $\bar{c}_1^p$ in $U_{\mathfrak{R}}(c^p, \varepsilon)$ liegt.*

5. Ein dimensionstheoretischer Rechtfertigungssatz (II. Teil)

Zu Satz 1 gehört, wenn man eine vollständige Charakterisierung der Dimension von Kompakten durch ihre Lageeigenschaften im R^n haben will, ein Gegenstück, welches folgendermaßen lautet:

Satz 2. *Ist φ ein $\geqq r$-dimensionales Kompaktum des R^n, f eine beliebige dimensionelle Funktion, so gibt es eine Zahl $\gamma > 0$, eine polyedrale Kette c^p, $(\overline{Fc^p} \cap \varphi = \Theta)$ $(p \geqq n - r)$, so daß $f_{r+p-n-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ ist für alle $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \gamma)$.*

Wir wollen folgende Behauptungen formulieren, von denen die erste von selbständigem Interesse ist, während die zweite nur beweistechnischen Charakter hat.

Satz 2a. *Ist φ ein $\geqq r$-dimensionales Kompaktum im R^n, so gibt es eine Zahl $\gamma > 0$, eine Kette c^p mit $\overline{Fc^p} \cap \varphi = \Theta$, so daß $f_{r+p-n-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ für alle c_1^p mit $Fc_1^p = Fc^p$ und $\bar{c}_1^p \subset U(\bar{c}^p, \gamma)$.*

Satz 2b. *Enthält φ keine im R^n offene Menge, so gibt es unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 2a eine Zahl $\gamma > 0$, eine Kette c^p, so daß $f_{r+p-n-1}$ $(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ für alle c_1^p mit $Fc_1^p = Fc^p$, $\bar{c}_1^p \in U_{\mathfrak{R}}(\bar{c}^p, \gamma)$ ist.*

Offenbar folgt Satz 2b aus Satz 2a. Wir zeigen umgekehrt:

(α) Aus Satz 2b folgt Satz 2a. Sei zunächst φ ein Kompaktum, welches keine im R^n offene Menge enthält, so gehen wir von der Kette c^p in Satz 2b zu der Kette $\bar{c}^p$ (2 A) über, und zwar können wir das so machen, daß $\bar{\sigma}_i'^p \cap \varphi = \Theta$ ist. Jede Kette c_1^p mit $Fc_1^p = F\bar{c}^p$ läßt sich zu einer Kette $c_1'^p$ ergänzen, so daß $Fc_1'^p = Fc^p$ und $\bar{c}_1{}^p \cap \varphi = \bar{c}_1'^p \cap \varphi$ ist. Die Behauptung (2 B) liefert die Existenz einer passenden Zahl $\gamma > 0$.

Um nun Satz 2a für ein φ zu beweisen, welches eine Vollkugel K^n enthält, nehmen wir ein Simplex σ^p, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt von K^n zusammenfällt und für welches $(\bar{\sigma}^p - \sigma^p) \cap \varphi = \Theta$ gilt, orientieren dieses Simplex und erhalten so eine Kette c^p mit $\overline{Fc^p} \cap \varphi = \Theta$. Offenbar gilt $c^p = \bar{c}^p$. Sei je[t]zt $\varepsilon_1 > 0$ so beschaffen, daß der Rand $F\zeta_1^p$ des Teiles ζ_1^p von c_1^p, der in K^n liegt, für alle $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon_1)$ nicht in $U(\overline{F\zeta_1^p}, \varepsilon_1)$ berandet. Da $F\zeta_1^p \sim F\zeta^p$ (= dem Rand von dem Teil von c^p in K^n) in $U(\overline{F\zeta^p}, \varepsilon)$ für alle $c_1^p \sim c^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon)$ ist, gibt es eine solche Zahl $\varepsilon_1 > 0$, denn $F\zeta^p$ selber berandet nicht in jeder Umgebung. Wegen (2 C) kann man eine Zahl $\delta > 0$ finden, so daß, wenn $Fc_1^p = Fc^p$, $\bar{c}_1^p \subset U(\bar{c}^p, \delta)$ ist, $c^p \sim c_1^p$ in $U(\bar{c}^p, \varepsilon_1)$ gilt. Es gilt nun f_{p-1} $(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > 0$ für alle polyedralen Ketten c_1^p mit $Fc_1^p = Fc^p$, $\bar{c}_1^p \subset U(\bar{c}^p, \delta)$, aber auch für alle L-Ketten c_1^p mit dieser Eigenschaft gilt $f_{p-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) > 0$, denn anderenfalls gibt es einen Zyklus z^{p-1}, so daß $z^{p-1} \sim 0$ in $\bar{z}^{p-1}$ und $z^{p-1} \sim F\zeta^p$ in $U(\overline{F\zeta^p}, \varepsilon_1)$, was aber gegen die Bedingung für ε_1 verstößt. Im folgenden stellen wir uns vor, daß alle Ketten c_1^p mit $Fc_1^p = Fc^p$ so reduziert sind, daß es

zu vorgegebenem c_1^p keine Kette $c_1'^p$ gibt, so daß $Fc_1'^p = Fc^p$ und jedes Simplex von $c_1'^p$ zu c_1^p gehört, daß es aber mindestens ein Simplex von c_1^p gibt, welches nicht zu $c_1'^p$ gehört (2 B). Wir verwenden nun 1 D und finden eine Kette x^p, eine Zahl $\gamma > 0$, so daß $f_{p-1}(\bar{x}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ ist für alle x_1^p mit $F x_1^p = F x^p = F c^p$ und $\bar{x}_1^p \in U_{\mathfrak{R}}(\bar{x}^p, \gamma)$, wenn x_1^p in obiger Weise reduziert war. Wegen (2 B) können wir sogar die Zahl $\gamma > 0$ so finden, daß $f_{p-1}(\bar{x}_1^p \cap \varphi) > \gamma$ für alle reduzierten $\bar{x}_1^p \subset U(\bar{x}^p, \gamma)$ $(F x_1^p = F x^p)$ und damit sogar für alle x_1^p mit $F x^p = F x_1^p$, denn wenn wir x_1^p reduzieren, so liegt es erst recht in $U(\bar{x}^p, \gamma)$.

Jetzt wenden wir uns dem Beweis von Satz 2b zu. Dazu müssen wir eine ganze Reihe von Vorbemerkungen machen:

A. Sei $\mathfrak{t}$ eine kompakte Teilmenge des R^n, U eine beliebige rel. R^n offene Menge, so kann man eine offene Menge $O \subset U(Rd\, U, \varepsilon)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ finden, so daß jeder Punkt aus $(Rd(U - \bar{O})) \cap \mathfrak{t}$ Häufungspunkt von Punkten aus $U \cap \mathfrak{t}$ ist. Für $Rd\, U$ soll dabei gelten: $Rd\, U \in U_{\mathfrak{R}}(Rd(U - \bar{O}), \varepsilon)$.

Beweis: Sei $x \in (Rd\, U) \cap \mathfrak{t}$ ein „uneigentlicher Randpunkt", d. h. ein solcher, der nicht Häufungspunkt von $U \cap \mathfrak{t}$ ist. Es gibt also eine Zahl $\varepsilon_x > 0$, so daß $V(x, 2\varepsilon_x) \cap U \cap \mathfrak{t} = 0$ ist. Ferner gibt es Punkte x_i, so daß jeder Häufungspunkt der x_i auch ein Häufungspunkt von $U \cap \mathfrak{t}$ ist und so daß jeder „uneigentliche Randpunkt" aus $\bigcup V(x_i, \varepsilon_{x_i}) = O$ ist. Es sei $y \in Rd\, O$ und außerdem $y \in \bigcup Rd\, V(x_i, \varepsilon_{x_i})$, sodann gilt $\varrho(y, U \cap \mathfrak{t}) > 0$. Ist aber $y \notin \bigcup Rd\, V(x_i, \varepsilon_{x_i})$, so muß y ein Häufungspunkt von $U \cap \mathfrak{t}$ sein.

B. Sei $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(R^n)$ kompakt, und es möge $f_q(\mathfrak{t} \cap \varphi) > 0$ für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ gelten. Es gibt sodann zu jedem $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ mindestens eine kompakte Menge $R_{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{t}$ und eine Zahl $\gamma_{\mathfrak{t}} > 0$, so daß $f_{q-1}(\varphi \cap Rd_{\mathfrak{t}}(V_{\mathfrak{t}}(R_{\mathfrak{t}}))) > \gamma_{\mathfrak{t}}$ ist für alle $V(R_{\mathfrak{t}}) \subset \subset U(R_{\mathfrak{t}}, \gamma_{\mathfrak{t}})$.

Beweis: Da $f_q(\mathfrak{t} \cap \varphi) > 0$, gibt es ein $x \in \mathfrak{t}$, eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $f_{q-1}(\mathfrak{t} \cap \cap \varphi \cap Rd\, U'(x)) > 0$ ist, für alle $U(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U'(x) \subset U(x, \varepsilon)$. Ist R Limeselement einer Cauchy-Folge von derartigen Umgebungsrändern rel. R^n, so ist auch $f_{q-1}(R \cap \mathfrak{t} \cap \varphi) > 0$, da der offene Kern des Limeselementes der abgeschlossenen Hüllen der Umgebungen, denen die Ränder in der Cauchy-Folge entsprechen, eine Umgebung ist, deren Rand ganz zu R gehört. Wegen 1 D gibt es also ein $U^{\mathfrak{t}}(x)$ und eine Zahl $\gamma_{\mathfrak{t}} > 0$, so daß $f_{q-1}(Rd\, V(x) \cap \varphi \cap \mathfrak{t}) > \gamma_{\mathfrak{t}}$ ist, für alle $V(x)$ mit $Rd\, V(x) \in U_{\mathfrak{R}}(Rd\, U^{\mathfrak{t}}(x), \gamma_{\mathfrak{t}})$. Wir können annehmen, daß $U^{\mathfrak{t}}$ die Eigenschaft hat, die für $U - \bar{O}$ in A erreicht wurde, daß also gilt: $Rd_{\mathfrak{t}}(U^{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \cap Rd_{R^n} U^{\mathfrak{t}}$. Wir setzen $R_{\mathfrak{t}} = Rd_{\mathfrak{t}}(U^{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{t})$ und $R = Rd\, U^{\mathfrak{t}}$. Sei nun $V(R) \subset V(R, \gamma_{\mathfrak{t}})$ gegeben. Wir zeigen, daß $f_{q-1}(\varphi \cap Rd\, V(R) \cap \mathfrak{t}) > \gamma_{\mathfrak{t}}$ ist. Zunächst finden wir eine Zahl $\gamma_{\mathfrak{t}}' > 0$, so daß, wenn $V(R) \subset V(R, \gamma_{\mathfrak{t}}')$, $R \subset U(Rd\, V, \gamma_{\mathfrak{t}})$, denn die Folge $\{Rd\, V^i\}$ mit $V^i \subset V(R, \varepsilon_i)$, wobei $\{\varepsilon_i\}$ eine Nullfolge von positiven Zahlen ist, konvergiert in $\mathfrak{R}(R^n)$ gegen R. Wir finden, daß $Rd\, V(R) \in U_{\mathfrak{R}}(R, \gamma_{\mathfrak{t}})$, wenn $V(R) \subset V(R, \gamma_{\mathfrak{t}}')$. Nun ist $W = U^{\mathfrak{t}} \cup V(R) - - Rd\, V(R)$ eine Umgebung von x mit $Rd\, W = Rd\, V$ und daher $f_{q-1}(Rd\, V \cap \cap \varphi \cap \mathfrak{t}) > \gamma_{\mathfrak{t}}$. Ist nun $V_{\mathfrak{t}}(R_{\mathfrak{t}})$ eine Umgebung von $R_{\mathfrak{t}}$ mit $V_{\mathfrak{t}}(R_{\mathfrak{t}}) \subset U(R_{\mathfrak{t}}, \gamma_{\mathfrak{t}})$, so kann man wegen A eine Umgebung $V(R)$ finden, so daß $V(R) \subset U(R, \gamma_{\mathfrak{t}})$ und $(Rd\, V(R)) \cap \mathfrak{t} = Rd_{\mathfrak{t}} V_{\mathfrak{t}}$. Damit aber ist $f_{q-1}(Rd_{\mathfrak{t}} V_{\mathfrak{t}}(R_{\mathfrak{t}}) \cap \varphi) = f_{q-1}$ $f_{q-1}(Rd_{R^n} V(R) \cap \mathfrak{t} \cap \varphi) > \gamma_{\mathfrak{t}}$ bewiesen.

C. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in B kann man ein $\mathfrak{t}_0$, eine Zahl $\gamma > 0$ und ein $\delta > 0$ finden, so daß $R_\mathfrak{t} \in U(R_{\mathfrak{t}_0}, \frac{\gamma}{8})$ und $\gamma_\mathfrak{t} \geqq \gamma$ für alle $\mathfrak{t} \in U_\mathfrak{R}(\mathfrak{t}_0, \delta)$ ist.

Beweis: Zunächst können wir wegen 1 D eine Zahl $\gamma > 0$ finden, so daß $\gamma \leqq \gamma_\mathfrak{t}$ für eine in einer offenen Menge O dichten Menge J (rel. $\mathfrak{T}$). Sei $\mathfrak{t} \in \bar{O} - J$. Es gibt eine Cauchy-Folge $\{\mathfrak{t}_i\}$ mit $\lim \mathfrak{t}_i = \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_i \in J$. Wir setzen $\lim R_{\mathfrak{t}_i} = R_\mathfrak{t}$ (dieses Limeselement ist, wenn man eine passende Teilfolge der $\{\mathfrak{t}_i\}$ nimmt, so daß für diese immer noch $\lim \mathfrak{t}_i = \mathfrak{t}$ ist, in $\mathfrak{R}(R^n)$ vorhanden) und behaupten, daß $f_{q-1}(\varphi \cap Rd_\mathfrak{t} U_\mathfrak{t}(R_i)) > \gamma$ ist für alle $U(R_\mathfrak{t}) \subset U(R_\mathfrak{t}, \gamma)$.

Wir können voraussetzen, daß $U(R_\mathfrak{t})$ eine solche Umgebung rel. R^n von $R_\mathfrak{t}$ ist, welche alle Eigenschaften der in A konstruierten Menge $U - \bar{O}$ hat. Es ist also $(Rd_{R^n} U) \cap \mathfrak{t} = Rd_\mathfrak{t}(U \cap \mathfrak{t})$. Nun aber gilt, wenn wir k groß genug machen, $f_{q-1}(\varphi \cap \mathfrak{t}_i \cap Rd_{R^n} U(R_\mathfrak{t})) > \gamma$ für alle $i > k$ und wegen A darum auch $f_{q-1}(\varphi \cap Rd_\mathfrak{t}(U_\mathfrak{t}(R_\mathfrak{t}))) > \gamma$. Wenn wir nun in 1 E $\mathfrak{A} = \bar{O}$, $\mathfrak{B} = \overline{\{R_\mathfrak{t} | \mathfrak{t} \in \bar{O}\}}$, $\varepsilon = \frac{\gamma}{8}$ setzen, finden wir die Zahl $\delta > 0$ und das Element $\mathfrak{t}_0$. Den Satz selber beweisen wir durch vollständige Induktion nach $s = n - p$. Für $s = 0$ ist der Satz trivial, denn wir brauchen nur eine polyedrale Umgebung P von φ zu nehmen, diese machen wir durch Orientierung des R^n zu einer Kette c^n. Für jede polyedrale Kette c_1^n, die den gleichen Rand wie c^n hat, gilt $\bar{c}_1^n = \bar{P}$. Damit ist der Fall $s = 0$ erledigt. Wir nehmen an, der Satz sei für $s - 1$ bereits bewiesen. Wir finden also eine polyedrale Kette c^{p+1} und eine Zahl $\gamma > 0$, die alle die im Satz geforderten Eigenschaften haben. Wenn wir C für $q = p + r - n$ anwenden, finden wir eine Kette c_0^{p+1}, (die wir ohne weiteres als polyedral annehmen können) welche alle die Eigenschaften hat, die in C für $\mathfrak{t}_0 = \bar{c}_0^{p+1}$ bewiesen werden. Unser weiterer Beweis verläuft nun so, daß wir um $R_{\mathfrak{t}_0}$ eine polyedrale $\frac{\gamma}{4}$-Umgebung nehmen und den Teil x_1^{p+1} betrachten, der von dieser Umgebung aus c_0^{p+1} ausgeschnitten wird. Natürlich kann auch x_1^{p+1} als polyedrale Kette angenommen werden. Es ist $z^p = F x_1^{p+1}$ ein Zyklus, von dem wir folgendes behaupten:

Es gibt einen Zyklus $z'^p \sim z^p$ und eine Zahl $\gamma' > 0$, so daß $f_{r+p-n-1}(\varphi \cap \cap \bar{z}_1^p) > \gamma'$ ist für alle $z_1^p \sim z'^p$ in $U_\mathfrak{R}(\bar{z}'^p, \gamma')$. Genauer soll $z^p \sim z_1^p$ in $U_\mathfrak{R}(\bar{z}^p, \varepsilon)$ heißen: Es existiert eine Kette x^{p+1} mit $F x^{p+1} = z^p - z_1^p$ und $\bar{x}^{p+1} \in U_\mathfrak{R}(\bar{z}_1^p, \varepsilon) \cap \cap U_\mathfrak{R}(\bar{z}^p, \varepsilon)$. Wir konstruieren eine Menge L von Zyklenkörpern, die eine solche Teilmenge enthält. Da wir in unserem Beweis drei Fälle zu unterscheiden haben, und zwar die Fälle $s = 1$, $s = 2$ und $s \geqq 3$, müssen wir drei solcher Mengen L konstruieren.

$s = 1$: Wir setzen $L = \{\bar{z}_1^p \mid z^p \sim z_1^p \text{ in } U_\mathfrak{R}(\bar{z}^p, \frac{\gamma}{4})\}$ und finden eine Kette x^{p+1} mit $F x^{p+1} = z^p - z_1^p$ und $\bar{x}^{p+1} \subset U(\bar{z}^p, \frac{\gamma}{4})$. Hier besteht $\mathfrak{T}$ nur aus einem einzigen Element, und $\overline{x^n - x_1^n}$ ist eine polyedrale Umgebung von R, auf deren Rand nur Punkte von $\bar{z}_1^{n-1}$ liegen. Es ist also in der Tat $f_{r-2}(\varphi \cap \bar{z}_1^{n-1}) > \gamma$.

$s = 2$: Wir setzen c_0^{n-1} als den Forderungen (α^p) $(0 \leqq p \leqq n-2)$ genügend voraus. Außerdem können wir von x_1^{n-1} verlangen, daß auch dann, wenn eine Kante zu z^{n-2} gehört, (α^p) gelten soll $(0 \leqq p \leqq n-2)$. Nun betrachten wir die Menge

$$L = \{\bar{z}_1^{n-2} \mid z^{n-2} \sim z_1^{n-2} \text{ in } U_\mathfrak{R}(\bar{z}^{n-2}, \min(\tfrac{\gamma}{8}, \tfrac{\delta}{8})); \bar{x}^{n-1} \cap (\overline{R^n - \bar{\mathfrak{r}}^n}) = \bar{z}^{n-2}\},$$

wobei $\mathfrak{x}^n$ die Kette o_1^n für c_0^{n-1} sein soll. Wegen 3 C kann man sich $x^{n-1} - x_1^{n-1}$ so aufgeschnitten denken, daß kein Simplex von x_1^{n-1} verändert wird und $\bar{x}^{n-1} - \bar{z}^{n-2}$ ganz im Innern von $\bar{\mathfrak{x}}^n$ verbleibt. Nun benutzen wir 3 E (3), und zwar setzen wir $c_0^{n-1} = c^{n-1}$, $x^{n-1} - x_1^{n-1} = - c_1^{n-1}$ und $c_1'^{n-1} = x_1^{n-1}$ und finden eine Kette $(x^{n-1} - x_1^{n-1})^+$, so daß $(\overline{x^{n-1} - x_1^{n-1}})^+ - \bar{z}$ ganz im Innern von $\bar{\mathfrak{x}}^n$ liegt. Es ist $c'^{n-1} = c_0^{n-1} - x_1^{n-1} + x^{n-1} + (x - x_1)^+$ eine Kette, auf deren Körper $\overline{F(x - x_1)^+} = \bar{z}_1^{n-2}$ eine solche Umgebung von $R_{\bar{c}'}$ berandet, daß $f_{r+p-n-1}(\bar{z}_1^{n-2} \cap \varphi) > \gamma$ gilt.

$s \geqq 3$: Hier ist $L = \{\bar{z}_1^p \mid z^p \sim z_1^p$ in $U_{\mathfrak{R}}(\bar{z}^p, \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\gamma}{8}))\}$. Wir nennen $\zeta^{p+1} = c_0^{p+1} + x^{p+1} - x_1^{p+1}$, und es ist $F\zeta^{p+1} = Fc_0^{p+1} - z_1^p$. Wegen Satz 1 b kann man eine Limeskette $\zeta'^{p+1} = \{\zeta'^{p+1}\}$ finden, so daß $\dim \bar{\zeta}'^{p+1} \cap (\varphi - \varphi \cap \bar{z}_1^p) \leqq r + p - n + 1$ ist. Auch auf $x^{p+1} - x_1^{p+1}$ kann man diesen Satz anwenden und findet eine Kette $v^{p+1} = \{v_i^{p+1}\}$ mit $\dim \bar{v}^{p+1} \cap \bar{\zeta}'^{p+1} \cap (\varphi - \varphi \cap \bar{z}_1^p) \leqq r + p - n - 1$. Wir bemerken, daß obige Operation auch auf jede Kette aus L anwendbar ist, also x^{p+1} und x_1^{p+1} durchaus nicht polyédral zu sein brauchen. Haben wir die beiden Ketten ζ'^{p+1} und v^{p+1} nur in genügend kleiner Umgebung von $\bar{\zeta}^{p+1}$ bzw. $\overline{x^{p+1} - x_1^{p+1}}$ gehalten, so ist $c'^{p+1} = \lim(\zeta_i'^{p+1} - v_i^{p+1})$ eine L-Kette, die in passender Umgebung von c_0^{p+1} liegt und den gleichen Rand wie diese hat. Es ist ferner $\bar{v}^{p+1}$ abgeschlossene Hülle einer Umgebung (rel. $\bar{c}'^{p+1}$) von $R_{c'}$, für welche $Rd_{\bar{c}'}\, \bar{v}^{p+1} \subset \bar{z}_1^p \cup (\bar{v}^{p+1} \cap \bar{\zeta}'^{p+1})$ gilt. Da aber $f_{r+p-n-1}(Rd_{\bar{c}'} \bar{v}^{p+1} \cap \varphi) > \gamma$ ist, muß mindestens $f_{r+p-n-1}(\bar{z}_1^p \cap \varphi) > 0$ sein, denn wenn $\dim \bar{z}_1^p \cap \varphi \leqq r + p - n - 1$ wäre, so hätte man sogar $\dim \bar{v}^{p+1} \cap \bar{\zeta}'^{p+1} \cap \varphi \leqq r + p - n - 1$ erreichen können, und damit wäre $\dim Rd_{\bar{c}'}\, \bar{v}^{p+1} \cap \varphi \leqq r + p - n - 1$, was aber der Tatsache widerspricht, daß $\gamma > 0$ ist. Wegen 1 D können wir nun aber wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar $f_{r+p-n-1}(\bar{z}_1^p \cap \varphi) > \gamma' > 0$ für alle $\bar{z}_1^p \in L$ annehmen.

Nun müssen wir uns noch von der Bedingung, daß die z_1^p miteinander homolog sein sollen, befreien. In allen drei Fällen können wir den Zyklus z'^p finden, der oben gesucht worden ist. Von z'^p gehen wir zu $z_1'^p = \tilde{z}'^p + \Sigma\, a_i \sigma_i'^p$ über (2 A), und da φ keine im R^n offene Menge enthält, können wir die $\sigma_i'^p$ so wählen, daß $\bar{\sigma}_i'^p \cap \varphi = \theta$. Es ist $z_1'^p \sim z'^p$ in $U_{\mathfrak{R}}(\bar{z}'^p, \gamma')$, und daher und wegen 2 C und 2 B ist $c^p = \tilde{z}'^p$ eine Kette, die alles das tut, was wir in Satz 2 b von ihr verlangen. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet. Wir haben eine vollständige Charakterisierung der Dimension von Kompakten, die im R^n liegen, durch ihre Lageeigenschaften und durch dimensionelle Funktionen erhalten. Die Frage, wie unser Satz abzuändern ist, wenn wir von Kompakten zu allgemeinen Mengen übergehen, soll hier nicht behandelt werden.

Wir können Satz 2 ohne weiteres auch für Mannigfaltigkeiten an Stelle des R^n formulieren. Sein anschaulicher Charakter wird dadurch besonders unterstrichen, daß nur von polyedralen Ketten die Rede ist und die L-Ketten nur ein Hilfsmittel zu seinem Beweis sind. Leider ändert sich diese Situation sofort, wenn man zu allgemeineren Mengen übergeht.

6. Folgerungen

Wir wollen noch zwei Sätze beweisen, die aus Satz 1 und Satz 2 folgen. Zunächst befassen wir uns mit dem berühmten Alexandrowschen Rechtfertigungssatz [2].

Satz 3. *Es ist für kompaktes* φ $\dim \varphi = r \leqq n-1$ *dann und nur dann, wenn es eine Zahl* $\gamma > 0$ *gibt, so daß für beliebiges* $\varepsilon > 0$ *ein Zyklus* z^{n-r-1} *existiert,* $\bar z^{n-r-1} \subset R^n - \varphi$, *der in* $U(\bar z^{n-r-1}, \varepsilon)$ *berandet, der aber in* $U(\bar z^{n-r-1}, \gamma) - \varphi$ *nicht berandet, und wenn jeder Zyklus* $z^p (p < n-r-1)$ *in* $R^n - \varphi$, *der in* $U(\bar z^p, \varepsilon)$ *berandet, dies auch in* $U(\bar z^p, \varepsilon)$ *tut.*

Beweis: In Satz 2a setzen wir $p = n - r$. Wir nehmen den Teil ζ^{n-r} von c^{n-r}, der in $U(\varphi, \frac{\varepsilon}{2})$ liegt (2 D). Wegen Satz 1a kann man voraussetzen, daß ζ^{n-r} eine Limeskette mit $\dim \zeta^{n-r} \cap \varphi = 0$ ist. Um jeden Punkt von $\bar\zeta^{n-r}$ nehmen wir eine $\frac{\varepsilon}{4}$-Kugel. Endlich viele dieser Kugeln überdecken $\bar\zeta^{n-r}$. Da φ in $\bar\zeta^{n-r}$ nirgends dicht liegt, kann man in jeder dieser Kugeln eine Teilkette von $\bar\zeta^{n-r}$ finden, deren Körper zu φ fremd ist. Der Rest von ζ^{n-r}, der nach Wegnahme dieser Teilketten entsteht, möge ξ^{n-r} heißen. Man kann, wie wir das schon des öfteren bei L-Ketten gemacht haben, erreichen, daß $F\,\xi^{n-r}$ ein L-Zyklus ist, der dann auch allen Anforderungen des Satzes genügt.

Wenn wir an Stelle von $\xi^{n-r} = \{\xi_i^{n-r}\}$ ein ξ_k^{n-r} für genügend großes k setzen, so finden wir in $F\xi_k^{n-r}$ sogar einen polyedralen Zyklus, der das Verlangte tut. Der zweite Teil folgt sofort aus Satz 1.

Nachdem wir Satz 1a in der vorliegenden Arbeit bewiesen haben, wollen wir noch einmal unser Prinzip, nur Dimensionstheorie der Kompakten zu betreiben, durchbrechen und folgenden Satz beweisen:

Satz 3a. *Wenn man zuläßt, daß* z^{n-r-1} *auch ein L-Zyklus sein darf, bleibt Satz 3 auch dann noch richtig, wenn* φ *eine r-dimensionale Menge ist, die ein r-dimensionales Teilkompaktum* φ' *enthält.*

Beweis: Wir verwenden Satz 3 für φ' und wenden auf den dabei gefundenen Zyklus (dessen Körper ja von sich aus nicht unbedingt zu $\varphi - \varphi'$ fremd ist), Satz 1a an.

Dieser Satz findet sich zum ersten Male in einer Arbeit [3] von Alexandrow, wo er aber mit ganz anderen Mitteln bewiesen wird. Durch die Herleitung von Satz 3 haben wir den Anschluß an die Alexandrowsche Dimensionstheorie gewonnen. Alexandrow benutzt diesen Satz, um die wesentlichen Sätze der Dimensionstheorie aus ihm herzuleiten.

Literatur

[1] Alexandrow, P. S.: Kombinatorische Topologie L.-M. 1947. — [2] Alexandrow, P. S.: Über die Dimension abgeschlossener Mengen. Usp. Math. Nauk 6 (1950). — [3] Alexandrow, P. S.: Zur kombinatorischen Topologie nicht abgeschlossener Mengen. Math. Sb. 33, 2 (1953). — [4] Alexandrow, P. S., u. H. Hopf: Topologie. Berlin 1935. — [5] Hurewicz, W., u. H. Wallman: Dimension Theory. Princ. Univ. Press 1948. — [6] Lefschetz, S.: Algebraic Topology. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. 27, 1948. — [7] Sitnikow, K.: Über Homologieumgürtungen von Kompakten im euklidischen Raum. Dokl. Akad. Nauk 81, 2 (1951).

(Eingegangen am 22. Januar 1956)

HEINZ, E.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 411—428 (1956)

Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung

Von
ERHARD HEINZ in Göttingen

Einleitung

Bei vielen Fragen in der Differentialgeometrie stößt man auf Systeme von partiellen Differentialgleichungen der folgenden Gestalt:

$$(S)\quad \begin{cases} x_{uu}+x_{vv}=a(x,y)(x_u^2+x_v^2)+b(x,y)(x_u y_u+x_v y_v)+ \\ \qquad +c(x,y)(y_u^2+y_v^2)+d(x,y)(x_u y_v-x_v y_u), \\ y_{uu}+y_{vv}=\tilde{a}(x,y)(x_u^2+x_v^2)+\tilde{b}(x,y)(x_u y_u+x_v y_v)+ \\ \qquad +\tilde{c}(x,y)(y_u^2+y_v^2)+\tilde{d}(x,y)(x_u y_v-x_v y_u). \end{cases}$$

Ein bekanntes Beispiel hierfür sind die Darbouxschen Differentialgleichungen[1]), denen die krummlinigen Koordinaten x, y einer Fläche als Funktionen der isotherm-konjugierten Parameter u, v genügen. In diesem Falle hängen die Koeffizienten $a(x,y), \ldots, \tilde{d}(x,y)$ nur von der ersten Fundamentalform der Fläche ab. Wie H. LEWY [8] gezeigt hat, haben eineindeutige Abbildungen, welche einem System der Form (S) mit reellen analytischen Koeffizienten genügen, mit den schlichten Abbildungen der komplexen Funktionentheorie die fundamentale Eigenschaft gemeinsam, daß die Funktionaldeterminante von Null verschieden ausfällt. Durch dieses Ergebnis wird die Frage nahegelegt, ob die Eineindeutigkeit einer solchen Abbildung im großen quantitative Abschätzungen für den Ausdruck $|x_u y_v - x_v y_u|$ nach sich zieht, falls gewisse Normierungsbedingungen zugrunde gelegt werden.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst hinreichende Bedingungen angegeben, welche die Existenz einer positiven unteren Grenze für den Ausdruck $|x_u y_v - x_v y_u|$ garantieren. Diese sind:

(1) Die Abbildungsfunktionen $x(u,v)$ und $y(u,v)$ seien für $u^2+v^2<1$ zweimal stetig differenzierbar und genügen dem System (S), wobei die Koeffizienten $a(x,y), \ldots, \tilde{d}(x,y)$ für $x^2+y^2 \leq 1$ einmal stetig differenzierbar sind und dort Ungleichungen der Form

$$|a(x,y)| \leq \frac{1}{200}, \ldots, |\tilde{d}(x,y)| \leq \frac{1}{200};$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \leq M < \infty, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde{d}}{\partial y}\right| \leq M < \infty$$

erfüllen.

[1]) Vgl. DARBOUX [2], § 725. Dort werden an Stelle der isotherm-konjugierten Parameter der Fläche Asymptotenlinienparameter zugrunde gelegt.

(2) Die Funktionen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ bilden die Kreisscheibe $u^2 + v^2 \leqq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq 1$ ab, und es gelte $x(0,0) = y(0,0) = 0$.

(3) Es sei $\iint\limits_{u^2+v^2<1} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)\, du\, dv \leqq N < \infty$.

Unter diesen Voraussetzungen wird gezeigt (Satz 3), daß für $u^2 + v^2 \leqq R^2 < 1$ eine Ungleichung der Form

$$|x_u y_v - x_v y_u| \geqq \lambda(R, M, N) > 0$$

besteht. Wie einfache Beispiele zeigen, sind die Bedingungen (1) und (2) allein dafür nicht ausreichend. Ein wesentliches Hilfsmittel zum Beweis von Satz 3 ist die Gewinnung von A-Priori-Schranken für die Lösungen von (S) (Satz 2).

Satz 2 und Satz 3 werden in § 4 benutzt, um A-Priori-Abschätzungen für eine Klasse Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen vom elliptischen Typus im Innern eines Gebietes zu erhalten. Diese Klasse läßt sich folgendermaßen beschreiben:

Es sei $z = z(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$F \equiv A r + 2 B s + C t + r t - s^2 - E = 0$$

mit $A = A(x, y, z, p, q), \ldots, E = E(x, y, z, p, q)$; $\Delta = A C - B^2 + E > 0$.

Führt man an Stelle von x, y neue Variable u, v ein, welche isotherm in bezug auf die charakteristische Differentialform

$$\Phi \equiv F_t d x^2 - F_s d x d y + F_r d y^2$$

sind, so genügen bekanntlich die Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ einem System von partiellen Differentialgleichungen der Form:

$$(\mathrm{S}') \begin{cases} x_{uu} + x_{vv} = h_1(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x_u y_u + x_v y_v) + h_3(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x_u y_v - x_v y_u) \\ y_{uu} + y_{vv} = \tilde{h}_1(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x_u y_u + x_v y_v) + \tilde{h}_3(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x_u y_v - x_v y_u), \end{cases}$$

wobei die Größen $h_1, \ldots, \tilde{h}_4$ gewisse partielle Differentialausdrücke erster Ordnung in den Koeffizienten $A, \ldots, E$ sind (vgl. Hilfssatz 5). Die in Rede stehende Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen wird dann durch die Bedingung charakterisiert, daß die Koeffizienten $h_1, \ldots, \tilde{h}_4$ nur von den Variabeln x, y abhängen. In diesem Falle reduziert sich das System (S′) auf ein System der Form (S), und die in § 1, § 2 und § 3 bewiesenen Resultate liefern unmittelbar A-Priori-Abschätzungen für die zweiten und dritten Ableitungen der Lösungen solcher Monge-Ampèrescher Gleichungen (Satz 4 und Satz 4′). Diese Sätze stellen Erweiterungen der von H. Lewy [9] für analytische Monge-Ampèresche Gleichungen bewiesenen Resultate auf den Fall zweimal stetig differenzierbarer Koeffizienten $A(x, y, z, p, q), \ldots, E(x, y, z, p, q)$ dar.

Die eben beschriebene Kategorie von Differentialgleichungen umfaßt bekanntlich die beim Minkowskischen Problem[2]) und beim Weylschen Ein-

[2]) Zusammenfassende Darstellungen bei Lewy [11] und Nirenberg [14].

bettungsproblem[3]) auftretenden Monge-Ampèreschen Gleichungen[4]). Beim Minkowskischen Problem ist dies unmittelbar evident, da die Koeffizienten der zu untersuchenden Gleichung, nämlich $rt - s^2 = f(x, y)$, nur von den Variabeln x, y abhängen. Im Falle des Weylschen Problems folgt dies aus der Bemerkung, daß die charakteristische Form Φ der dort vorkommenden Darbouxschen Gleichung[5]) der zweiten Fundamentalform der Fläche proportional ist. Die charakteristischen Parameter u, v fallen dann mit den isotherm-konjugierten Parametern der Fläche zusammen, und die Gleichungen (S′) sind mit dem am Anfang der Einleitung erwähnten Darbouxschen System identisch.

Es sei bemerkt, daß sich A-Priori-Schranken für die dritten Ableitungen auch aus allgemeinen Resultaten von Nirenberg [13] und Pogorelow [15] gewinnen lassen, welche für beliebige nichtlineare elliptische Differentialgleichungen in zwei Variabeln gültig sind. A-Priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen der Lösungen der Monge-Ampèreschen Gleichungen, welche beim Weylschen Einbettungsproblem und beim Minkowskischen Problem auftreten, sind von Weyl und Miranda[6]) und kürzlich von Pogorelow [15] und [16] mit anderen Methoden gegeben worden. Bezüglich Randwertprobleme Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen sei auf Leray [7a], Kap. IV, verwiesen.

Hinsichtlich der Art der in der vorliegenden Arbeit erzielten Resultate sei noch folgendes erwähnt: Während in § 2 explizite A-Priori-Schranken für die Lösungen von (S) hergeleitet werden (Satz 2), beruht die Abschätzung der Funktionaldeterminante (Satz 3) auch auf indirekten Methoden, nämlich auf den Ergebnissen von § 1. Daher kann, wie überdies auch bei H. Lewy [9], nur die Existenz endlicher A-Priori-Schranken für die Lösungen der betreffenden Monge-Ampèreschen Gleichungen behauptet werden[6a]).

§ 1. Lokales Verhalten

Hauptziel dieses Paragraphen ist die Übertragung des in der Einleitung erwähnten Satzes von H. Lewy [8] auf den Fall nichtanalytischer Koeffizienten. Die Überlegungen beruhen einerseits auf den von H. Lewy [8] verwendeten Schlußweisen, andererseits auf Sätzen von P. Hartman und A. Wintner [4] über das lokale Verhalten der Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten, welche Verschärfungen bekannter Carlemanscher Resultate darstellen. Unser erstes Ziel besteht darin, asymptotische Darstellungen für die Lösungen obiger Systeme (S) zu gewinnen. Zunächst gilt

---

[3]) Zusammenfassende Darstellungen bei Lewy [10], Nirenberg [14] und Pogorelow [15], ein zusammenfassender Bericht bei Efimow [3].

[4]) Diese Tatsache wurde von H. Lewy [10] und [11] bei der Lösung des Weylschen und Minkowskischen Problems für den Fall analytischer Daten benutzt.

[5]) Vgl. Darboux [2], § 707. Eine einfache Herleitung bei Nirenberg [14], § 3.

[6]) Zusammenfassende Darstellung der Abschätzungen von Weyl und Miranda bei Nirenberg [14], § 10 und § 16.

[6a]) Zusatz bei der Korrektur vom 25. 6. 56: Ein neuer direkter Beweis von Satz 3 soll in einer späteren Arbeit gegeben werden.

Hilfssatz 1. *Es seien $x(u,v)$ und $y(u,v)$ zwei in einer Umgebung von $u=v=0$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichungen*

$$\Delta x = a(x,y)(x_u^2+x_v^2) + b(x,y)(x_u y_u + x_v y_v) + \\ + c(x,y)(y_u^2+y_v^2) + d(x,y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

$$\Delta y = \tilde a(x,y)(x_u^2+x_v^2) + \tilde b(x,y)(x_u y_u + x_v y_v) + \\ + \tilde c(x,y)(y_u^2+y_v^2) + \tilde d(x,y)(x_u y_v - x_v y_u).$$

Es gelte $x(0,0) = y(0,0) = 0$, und außerdem genügen die Funktionen $a(x,y), \ldots, \tilde d(x,y)$ einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung von $x=y=0$. Dann gibt es eine Abbildung der Form

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \varphi(x,y) \\ \\ Y &= y + \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit } \varphi, \psi \in C'' \text{ in einer Umgebung von} \\ &x = y = 0 \quad ; \ \varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0; \\ &\varphi_x(0,0) = \cdots = \psi_y(0,0) = 0, \end{aligned}$$

so daß die Funktionen $X(u,v) = x(u,v) + \varphi(x(u,v), y(u,v))$ und $Y(u,v) = y(u,v) + \psi(x(u,v), y(u,v))$ den folgenden Gleichungen genügen:

$$\Delta X = A(X,Y)(X_u^2+X_v^2) + B(X,Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + C(X,Y)(Y_u^2+Y_v^2) + D(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u),$$

$$\Delta Y = \tilde A(X,Y)(X_u^2+X_v^2) + \tilde B(X,Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + \tilde C(X,Y)(Y_u^2+Y_v^2) + \tilde D(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u).$$

Dabei erfüllen die Funktionen $A(X,Y), \ldots, \tilde D(X,Y)$ eine Lipschitzbedingung in einer Umgebung von $X = Y = 0$, und es gilt $C(0,Y) = \tilde A(X,0) = 0$.

Beweis. Man setze

$$\left.\begin{aligned} x &= X + f(Y) \\ \\ y &= Y + g(X) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit } f, g \in C'' \text{ in einer Umgebung von } X = Y = 0; \\ &f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dann hat die inverse Abbildung $(x,y) \to (X,Y)$ die Form

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \varphi(x,y) \\ \\ Y &= y + \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit } \varphi, \psi \in C'' \text{ in einer Umgebung von } x = y = 0; \\ &\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0; \\ &\varphi_x(0,0) = \cdots = \psi_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Die so definierten Funktionen $X(u,v) = x(u,v) + \varphi(x(u,v), y(u,v))$ und $Y(u,v) = y(u,v) + \psi(x(u,v), y(u,v))$ genügen Gleichungen der Form

$$\Delta X = A(X,Y)(X_u^2+X_v^2) + B(X,Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + C(X,Y)(Y_u^2+Y_v^2) + D(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u),$$

$$\Delta Y = \tilde A(X,Y)(X_u^2+X_v^2) + \tilde B(X,Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + \tilde C(X,Y)(Y_u^2+Y_v^2) + \tilde D(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u).$$

Dabei ist

$$C(X,Y) = (1 - f'(Y)g'(X))^{-1}\{-f''(Y) + a(X+f(Y), Y+g(X))f'(Y)^2 + \\ + b(X+f(Y), Y+g(X))f'(Y) + c(X+f(Y), Y+g(X)) \\ - f'(Y)[\tilde a(X+f(Y), Y+g(X))f'(Y)^2 + \tilde b(X+f(Y), Y+g(X))f'(Y) + \\ + \tilde c(X+f(Y), Y+g(X))]\},$$

$$\tilde{A}(X,Y) = (1 - f'(Y)\,g'(X))^{-1}\{-g''(X) + \tilde{a}(X + f(Y),\, Y + g(X)) +$$
$$+ \tilde{b}(X + f(Y),\, Y + g(X))\,g'(X) + \tilde{c}(X + f(Y),\, Y + g(X))\,g'(X)^2$$
$$- g'(X)\,[a(X + f(Y),\, Y + g(X)) + b(X + f(Y),\, Y + g(X))\,g'(X) +$$
$$+ c(X + f(Y),\, Y + g(X))\,g'(X)^2]\},$$

und die übrigen Funktionen $A(X,Y), \ldots, \tilde{D}(X,Y)$ erfüllen wieder eine Lipschitzbedingung in einer Umgebung von $X = Y = 0$. Unterwirft man die Funktionen $f(Y)$ und $g(X)$ den Differentialgleichungen

$$f''(Y) = a(f(Y),Y)\,f'(Y)^2 + b(f(Y),Y)\,f'(Y) + c(f(Y),Y)$$
$$- f'(Y)\,[\tilde{a}(f(Y),Y)\,f'(Y)^2 + \tilde{b}(f(Y),Y)\,f'(Y) + \tilde{c}(f(Y),Y)]$$

und

$$g''(X) = \tilde{a}(X, g(X)) + \tilde{b}(X, g(X))\,g'(X) + \tilde{c}(X, g(X))\,g'(X)^2$$
$$- g'(X)\,[a(X, g(X)) + b(X, g(X))\,g'(X) + c(X, g(X))\,g'(X)^2]$$

mit den Anfangsbedingungen $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0$, so genügen alle Funktionen $A(X,Y), \ldots, \tilde{D}(X,Y)$ einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung von $X = Y = 0$, und es gilt $\tilde{A}(X,0) = C(0,Y) = 0$, womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Außerdem verschwinde die Funktionaldeterminante $x_u y_v - x_v y_u$ in keiner Umgebung von $u = v = 0$ identisch. Dann gibt es eine Abbildung der Form*

$$\left.\begin{aligned} X &= F(x,y) \\ Y &= G(x,y) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit } F, G \in C'' \text{ in einer Umgebung von } x = y = 0;\ F(0,0) = G(0,0) = 0 \text{ und } \left[\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\right]_{x=y=0} \neq 0,$$

so daß die Funktionen $X(u,v) = F(x(u,v), y(u,v))$ und $Y(u,v) = G(x(u,v), y(u,v))$ für $r \to 0$ ($u = r\cos\varphi$, $v = v \sin\varphi$) eine der folgenden asymptotischen Darstellungen besitzen:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} X(u,v) = r^k(\alpha\cos k\varphi + \beta\sin k\varphi) + o(r^k) \\ Y(u,v) = r^l(\gamma\cos l\varphi + \delta\sin l\varphi) + o(r^l) \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\{r^k(\alpha\cos k\varphi + \beta\sin k\varphi)\} + o(r^{k-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v}\{r^l(\gamma\cos l\varphi + \delta\sin l\varphi)\} + o(r^{l-1}) \end{cases}$$

(*k, l ganz-positiv*; $k \neq l$; $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$),

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X(u,v) = r^k\cos k\varphi + o(r^k) \\ Y(u,v) = r^k\sin k\varphi + o(r^k) \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}(r^k\cos k\varphi) + o(r^{k-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v}(r^k\sin k\varphi) + o(r^{k-1}) \end{cases}$$

(*k ganz-positiv*).

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gibt es eine Abbildung der Form

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \varphi(x, y) \\ Y &= y + \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit } \varphi, \psi \in C'' \text{ in einer Umgebung von } x = y = 0; \\ &\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0;\ \varphi_x(0,0) = \cdots = \psi_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

so daß die Funktionen $X(u, v) = x(u, v) + \varphi(x(u, v), y(u, v))$ und $Y(u, v) = y(u, v) + \psi(x(u, v), y(u, v))$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \Delta X &= A(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + B(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ &\quad + C(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + D(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u), \\ \Delta Y &= \tilde{A}(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + \tilde{B}(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ &\quad + \tilde{C}(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + \tilde{D}(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u). \end{aligned}$$

Dabei genügen die Funktionen $A(X, Y), \ldots, \tilde{D}(X, Y)$ einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung von $X = Y = 0$, und es gilt außerdem $\tilde{A}(X, 0) = C(0, Y) = 0$. Daraus folgen Ungleichungen der Form

$$|\Delta X| \leqq K(|X| + |X_u| + |X_v|)$$

und

$$|\Delta Y| \leqq K(|Y| + |Y_u| + |Y_v|)$$

in einer Umgebung von $u = v = 0$ mit einer festen positiven Zahl K. Wegen $\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right]_{x=y=0} = 1$ und $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \not\equiv 0$ ist $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \not\equiv 0$; also können die Funktionen $X(u, v)$ und $Y(u, v)$ in keiner Umgebung von $u = v = 0$ identisch verschwinden. Hieraus entnimmt man für $r \to 0$ $(u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi)$ die asymptotischen Darstellungen[7])

$$(\mathrm{I'}) \quad \left\{\begin{aligned} X(u, v) &= r^k(\alpha\cos k\varphi + \beta\sin k\varphi) + o(r^k) \\ Y(u, v) &= r^l(\gamma\cos l\varphi + \delta\sin l\varphi) + o(r^l) \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\{r^k(\alpha\cos k\varphi + \beta\sin k\varphi)\} + o(r^{k-1}) \\ &\ \vdots \\ \frac{\partial Y}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\{r^l(\gamma\cos l\varphi + \delta\sin l\varphi)\} + o(r^{l-1}) \end{aligned}\right.$$

(k, l ganz-positiv; $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$).

Im Falle $k \neq l$ ist (I′) mit (I) identisch. Ist $k = l$ und $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, so hat man $\gamma = \lambda\alpha$ und $\delta = \lambda\beta$. Setzt man

$$X_1(u, v) = X(u, v) \quad \text{und} \quad Y_1(u, v) = Y(u, v) - \lambda X(u, v),$$

so ist

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= A_1(X_1, Y_1)\left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)^2\right) + B_1(X_1, Y_1)\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial u} + \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial Y_1}{\partial v}\right) + \\ &\quad + C_1(X_1, Y_1)\left(\left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v}\right)^2\right) + D_1(X_1, Y_1)\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= \tilde{A}_1(X_1, Y_1)\left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)^2\right) + \tilde{B}_1(X_1, Y_1)\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial u} + \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial Y_1}{\partial v}\right) + \\ &\quad + \tilde{C}_1(X_1, Y_1)\left(\left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v}\right)^2\right) + \tilde{D}_1(X_1, Y_1)\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

[7]) Vgl. P. HARTMAN und A. WINTNER [4], Theorem I und II.

wobei die Funktionen $A_1(X_1, Y_1) = \cdots = \tilde{D}_1(X_1, Y_1)$ in einer Umgebung von $X_1 = Y_1 = 0$ einer Lipschitzbedingung genügen. Außerdem verschwindet $\frac{\partial(X_1, Y_1)}{\partial(u,v)}$ in keiner Umgebung von $u = v = 0$ identisch. Daher gibt es eine Abbildung der Form

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X_1 + \varphi_1(X_1, Y_1) \\ Y_2 &= Y_1 + \psi_1(X_1, Y_1) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{mit } \varphi_1, \psi_1 \in C'' \text{ in einer Umgebung von } X_1 = Y_1 = 0; \\ &\varphi_1(0,0) = \psi_1(0,0) = 0; \\ &\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1}\right)_{X_1 = Y_1 = 0} = \cdots = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial Y_1}\right)_{X_1 = Y_1 = 0} = 0, \end{aligned}$$

so daß die Funktionen $X_2(u, v) = X_1(u, v) + \varphi_1(X_1(u, v), Y_1(u, v))$ und $Y_2(u, v) = Y_1(u, v) + \psi_1(X_1(u, v), Y_1(u, v))$ für $r \to 0$ ($u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$) die folgenden asymptotischen Darstellungen besitzen:

$$(\mathrm{I}'') \quad \left\{\begin{aligned} X_2(u, v) &= r^{\tilde{k}}(\tilde{\alpha}\cos\tilde{k}\,\varphi + \tilde{\beta}\sin\tilde{k}\,\varphi) + o(r^{\tilde{k}}) \\ Y_2(u, v) &= r^{\tilde{l}}(\tilde{\gamma}\cos\tilde{l}\,\varphi + \tilde{\delta}\sin\tilde{l}\,\varphi) + o(r^{\tilde{l}}) \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\{r^{\tilde{k}}(\tilde{\alpha}\cos\tilde{k}\,\varphi + \tilde{\beta}\sin\tilde{k}\,\varphi)\} + o(r^{\tilde{k}-1}) \\ &\;\;\vdots \\ \frac{\partial Y_2}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\{r^{\tilde{l}}(\tilde{\gamma}\cos\tilde{l}\,\varphi + \tilde{\delta}\sin\tilde{l}\,\varphi)\} + o(r^{\tilde{l}-1}) \end{aligned}\right.$$

($\tilde{k}, \tilde{l}$ ganz-positiv; $\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 > 0$, $\tilde{\gamma}^2 + \tilde{\delta}^2 > 0$).
Offenbar ist $\tilde{k} = k$, $\tilde{\alpha} = \alpha$ und $\tilde{\beta} = \beta$. Ferner hat man $Y_1(u, v) = o(r^k)$, also auch $Y_2(u, v) = o(r^k)$. Somit ist $\tilde{l} > \tilde{k}$, und (I'') geht in die Darstellung (I) über. Die Abbildung $(x, y) \to (X_2, Y_2)$ hat die Form

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= F(x, y) \\ Y_2 &= G(x, y) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{mit } F, G \in C'' \text{ in einer Umgebung} \\ &\text{von } x = y = 0;\ F(0, 0) = G(0, 0) = 0 \\ &\text{und } \left[\frac{\partial(X_2, Y_2)}{\partial(x, y)}\right]_{x = y = 0} \neq 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Fall $l = k$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ auf den Fall $l \neq k$ zurückgeführt. Ist endlich $l = k$ und $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, so bestimme man die Größen α', β', γ', δ' durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Funktionen $X_3(u, v) = \alpha' X(u, v) + \beta' Y(u, v)$ und $Y_3(u, v) = \gamma' X(u, v) + \delta' Y(u, v)$ eine Darstellung der Form (II), und es ist $\left[\frac{\partial(X_3, Y_3)}{\partial(x, y)}\right]_{x = y = 0} \neq 0$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hieraus folgt

Satz 1. *Voraussetzungen:* (1) *Die Funktionen* $x(u, v)$, $y(u, v)$; $x^{(m)}(u, v)$, $y^{(m)}(u, v)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *seien in einem Gebiet* G *der u-v-Ebene einmal stetig differenzierbar, und es gelten die Relationen*

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)}(u, v) = x(u, v),\ \lim_{m\to\infty} y^{(m)}(u, v) = y(u, v);$$
$$\lim_{m\to\infty} x_u^{(m)} = x_u, \ldots, \lim_{m\to\infty} y_v^{(m)} = y_v$$

gleichmäßig in jedem endlichen Teilbereich von G.

(2) *Die Abbildungen* $(u, v) \to (x^{(m)}(u, v), y^{(m)}(u, v))$ *seien eineindeutig für jedes* $m = 1, 2, \ldots$.

(3) *Die Funktionen* $x(u, v)$ *und* $y(u, v)$ *seien in* G *zweimal stetig differenzierbar und genügen den Differentialgleichungen*

$$\Delta x = a(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + b(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + \\ + c(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + d(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

$$\Delta y = \tilde{a}(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + \\ + \tilde{c}(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{d}(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

wobei die Funktionen $a(x, y), \ldots, \tilde{d}(x, y)$ *in einem die Punktmenge* $\mathfrak{M} = \{x = x(u, v), y = y(u, v); (u, v) \in G\}$ *enthaltenden Gebiet einer Lipschitzbedingung genügen.*

(4) *Es sei* $x_u y_v - x_v y_u = 0$ *in einem Punkt* $(u_0, v_0) \in G$.

Behauptung: Es ist $x_u y_v - x_v y_u \equiv 0$ *für* $(u, v) \in G$.

Beweis: Es sei (u_1, v_1) ein beliebiger Punkt in G mit $(x_u y_v - x_v y_u)_{u=u_1, v=v_1} = 0$ und $\mathfrak{K} = \{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 \leqq R^2\}$ eine in G enthaltene Kreisscheibe. Nach Voraussetzung (2) hat man entweder $x_u^{(m)} y_v^{(m)} - x_v^{(m)} y_u^{(m)} \geqq 0$ oder $x_u^{(m)} y_v^{(m)} - x_v^{(m)} y_u^{(m)} \leqq 0$ für $(u, v) \in \mathfrak{K}$. Hieraus folgt, daß in $\mathfrak{K}$ eine der beiden Ungleichungen $x_u y_v - x_v y_u \geqq 0$ oder $x_u y_v - x_v y_u \leqq 0$ besteht. Angenommen, die Funktionaldeterminante $x_u y_v - x_v y_u$ verschwinde in keiner Umgebung von $u = u_1$, $v = v_1$ identisch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $u_1 = v_1 = 0$, $x(0,0) = y(0,0) = 0$, $x_u^{(m)} y_v^{(m)} - x_v^{(m)} y_u^{(m)} \geqq 0$ und daher auch $x_u y_v - x_v y_u \geqq 0$ für $(u, v) \in \mathfrak{K}$ voraussetzen. Nach Hilfssatz 2 läßt sich eine Abbildung der Form

$$\left.\begin{aligned} X &= F(x, y) \\ Y &= G(x, y) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{mit } F, G \in C'' \text{ in einer Umgebung von } x = y = 0; \\ &F(0,0) = G(0,0) = 0; \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right]_{x=y=0} \neq 0 \end{aligned}$$

so bestimmen, daß die Funktionen $X(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$ und $Y(u, v) = G(x(u, v), y(u, v))$ eine der asymptotischen Darstellungen (I) oder (II) besitzen. Im Falle (I) findet man

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \left\{ k l (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} (\gamma^2 + \delta^2)^{1/2} r^{k+l-2} \cos[(k - l)\varphi - \varphi_0] + o(r^{k+l-2}) \right\}$$

für $r \to 0$, wobei φ_0 eine feste reelle Zahl bedeutet. Wegen $k \neq l$ steht dies im Widerspruch zu $x_u y_v - x_v y_u \geqq 0$. Im Falle (II) hat man zunächst $k \geqq 2$ (wegen $(x_u y_v - x_v y_u)_{u=v=0} = 0$). Ferner läßt sich eine positive Zahl r so bestimmen, daß $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 > 0$ für $u^2 + v^2 = r^2$ ausfällt und die Gleichung

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{u^2 + v^2 = r^2} d \arg(x(u, v) + i\, y(u, v)) = \pm k$$

besteht. Setzt man

$$j_m = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{u^2 + v^2 = r^2} d \arg\left[(x^{(m)}(u, v) - x^{(m)}(0,0)) + i(y^{(m)}(u, v) - y^{(m)}(0,0))\right],$$

so gilt wegen Voraussetzung (2) und $x_u^{(m)} y_v^{(m)} - x_v^{(m)} y_u^{(m)} \geqq 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Gleichung $j_m = +1$. Aus Voraussetzung (1) folgt daher $j_m = j$ für $m \geqq N$, also $k = +1$, was ein Widerspruch ist. Damit ist gezeigt: Wenn $x_u y_v - x_v y_u$ für $u = u_1$, $v = v_1$ verschwindet, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für $(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 < \varepsilon^2$ die Gleichung $x_u y_v - x_v y_u = 0$ besteht. Hieraus folgt aber wegen $(x_u y_v - x_v y_u)_{u=u_0, v=v_0} = 0$, daß die Funktionaldeterminante identisch in G verschwindet, womit Satz 1 bewiesen ist.

Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar der oben erwähnte Satz von H. Lewy [8] für den Fall, daß die Koeffizienten $a(x, y), \ldots, \tilde{d}(x, y)$ eine Lipschitzbedingung erfüllen, nämlich

Satz 1'. *Es seien $x(u, v)$ und $y(u, v)$ zwei in einem Gebiet G zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichungen*

$$\Delta x = a(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + b(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + c(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + \\ + d(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

$$\Delta y = \tilde{a}(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + \tilde{c}(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + \\ + \tilde{d}(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

wobei die Funktionen $a(x, y), \ldots, \tilde{d}(x, y)$ in einem die Punktmenge $\mathfrak{M} = \{x = x(u, v),\ y = y(u, v);\ (u, v) \in G\}$ enthaltenden Gebiete einer Lipschitzbedingung genügen. Außerdem sei die Abbildung $(u, v) \to (x(u, v),\ y(u, v))$ eineindeutig. Dann ist $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ in G.

§ 2. A-Priori-Abschätzungen

In diesem Paragraphen sollen A-Priori-Abschätzungen für die Lösungen von Systemen der Form (S) gewonnen werden. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei in der Abschätzung der ersten Ableitungen der Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$. Die Beweise schließen sich eng an eine Arbeit des Verf. [5] sowie von Nagumo [12] an und beruhen auf einer Verfeinerung der von E. Hopf [6] und J. Schauder [17] bei linearen elliptischen Differentialgleichungen angewandten Methoden. Zunächst gilt

Hilfssatz 3. *Es seien $x(u, v)$ und $y(u, v)$ zwei in einem Gebiet G der u-v-Ebene zweimal stetig differenzierbare reelle Funktionen, die den Differentialungleichungen*

$$|\Delta x| \leqq \frac{1}{100}(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2) \quad \text{und} \quad |\Delta y| \leqq \frac{1}{100}(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)$$

genügen, und es sei $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 \leqq 1$ für $(u, v) \in G$. Dann besteht für $(u, v) \in G$ die Ungleichung

$$x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 \leqq \frac{400}{\delta(u, v)^2},$$

wobei $\delta(u, v)$ den Abstand des Punktes (u, v) vom Rande von G bedeutet.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß G mit der Kreisscheibe $u^2 + v^2 < R^2$ zusammenfällt und die Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$ für $u^2 + v^2 \leqq R^2$ zweimal stetig differenzierbar sind. Man setze $w = u + i v$[8]) und $M = \underset{|w| \leqq R}{\operatorname{Max}} (R - |w|) (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)^{1/2}$. Dann gibt es ein w_0 mit $|w_0| < R$ und

$$[(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)^{1/2}]_{w = w_0} = \frac{M}{R - |w_0|}.$$

Für $0 < r \leqq r_0 = R - |w_0|$ gelten die Identitäten

$$[x_u - i x_v]_{w = w_0}$$

$$= \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{|w - w_0| = r} \frac{x(u, v)}{(w - w_0)^2} dw - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|w - w_0| \leqq r} (\overline{w} - \overline{w}_0) \left(\frac{1}{|w - w_0|^2} - \frac{1}{r^2}\right) \Delta x \, du \, dv$$

und

$$[y_u - i y_v]_{w = w_0}$$

$$= \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{|w - w_0| = r} \frac{y(u, v)}{(w - w_0)^2} dw - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|w - w_0| \leqq r} (\overline{w} - \overline{w}_0) \left(\frac{1}{|w - w_0|^2} - \frac{1}{r^2}\right) \Delta y \, du \, dv.$$

Daraus folgt

$$[(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)^{1/2}]_{w = w_0} \leqq \frac{1}{\pi r^2} \oint\limits_{|w - w_0| = r} [x(u, v)^2 + y(u, v)^2]^{1/2} |dw| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|w - w_0| \leqq r} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}}{|w - w_0|} du \, dv.$$

Nach Voraussetzung hat man die Ungleichung

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2} \leqq |\Delta x| + |\Delta y| \leqq \frac{1}{50} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2).$$

Setzt man jetzt $r = \vartheta r_0$ mit $0 < \vartheta < 1$ und beachtet die für $|w - w_0| \leqq r$ gültige Ungleichung

$$x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 \leqq \frac{M^2}{r_0^2 (1 - \vartheta)^2},$$

so entsteht

$$\frac{M}{r_0} \leqq \frac{2}{r_0 \vartheta} + \frac{M^2 \vartheta}{50 r_0 (1 - \vartheta)^2}$$

oder

$$M \leqq \frac{2}{\vartheta} + \frac{M^2 \vartheta}{50 (1 - \vartheta)^2}$$

für $0 < \vartheta < 1$. Angenommen, es sei $M > 20$. Dann setze man $\vartheta = \frac{10}{M}$. Es wird $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ und $M \leqq \frac{M}{5}\left(1 + \frac{1}{(1 - \vartheta)^2}\right) < M$, was ein Widerspruch ist. Also hat man $M \leqq 20$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus diesem Ergebnis erhält man A-Priori-Schranken für die Lösungen von Systemen der Form (S), nämlich

[8]) Die komplexe Schreibweise $w = u + iv$ wird auch im folgenden gelegentlich benutzt.

Satz 2. *Voraussetzungen:* (1) *Es seien $x(u, v)$ und $y(u, v)$ zwei Funktionen, welche in einem Gebiet G zweimal stetig differenzierbar sind und dort den Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \Delta\, x &= a(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + b(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ &\quad + c(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + d(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u)\,, \\ \Delta\, y &= \tilde{a}(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ &\quad + \tilde{c}(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{d}(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{aligned}$$

genügen.

(2) *Die Funktionen $a(x, y), \ldots, \tilde{d}(x, y)$ seien für $x^2 + y^2 \leq 1$ einmal stetig differenzierbar, und es gelten die Ungleichungen*

$$\left.\begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \frac{1}{200}, \ldots, |\tilde{d}(x, y)| \leq \frac{1}{200}\,; \\ \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| &\leq M, \ldots, \quad \left|\frac{\partial \tilde{d}}{\partial y}\right| \leq M, \end{aligned}\right\}\quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

wobei M eine feste positive Zahl bedeutet.

(3) *Es sei $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 \leq 1$ für $(u, v) \in G$.*

(4) *Es sei R eine positive Zahl und G_R die Menge aller Punkte $w \in G$, deren Abstand vom Rande von G größer als R ist.*

Behauptung: Es gelten Ungleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} |x_u| &\leq K_1(R), \ldots, & |y_v| &\leq K_1(R); \\ |x_{uu}| &\leq K_2(R, M), \ldots, & |y_{vv}| &\leq K_2(R, M) \end{aligned}\right\}\ \text{für } w \in G_R$$

und

$$\left.\begin{aligned} |(x_{uu})_{w=w_1} - (x_{uu})_{w=w_2}| &\leq K_3(R, M, \mu)\,|w_1 - w_2|^\mu \\ &\vdots \\ |(y_{vv})_{w=w_1} - (y_{vv})_{w=w_2}| &\leq K_3(R, M, \mu)\,|w_1 - w_2|^\mu \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &\text{für } w_1, w_2 \in G_R \\ &\text{und } 0 < \mu < 1, \end{aligned}$$

wobei K_1, K_2, K_3 endliche positive Größen bedeuten.

Der Beweis beruht auf Hilfssatz 3 und wohlbekannten potentialtheoretischen Sätzen und kann übergangen werden.

§ 3. Abschätzung der Funktionaldeterminante

Wir gehen jetzt dazu über, für die Funktionaldeterminante $|x_u y_v - x_v y_u|$ quantitative Abschätzungen nach unten zu gewinnen (Satz 3). Zu diesem Zweck benötigen wir folgende Lemma[9]), welches im wesentlichen von LEBESGUE herrührt[10]) und das wir in folgender Form aussprechen:

Hilfssatz 4. *Voraussetzungen:* (1) *Es sei $z(u, v) = x(u, v) + i\, y(u, v)$ eine für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbare Funktion, für welche*

$$\iint\limits_{|w|<1} (|z_u|^2 + |z_v|^2)\, du\, dv \leq N < \infty$$

ausfällt.

[9]) Es ist eine direkte Folge aus Lemma 3.1 von COURANT [1].

[10]) Vgl. H. LEBESGUE [7], insbesondere S. 388.

(2) *Die Funktion $z = z(u, v)$ bilde die Kreisscheibe $|w| \leq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|z| \leq 1$ ab, und es gelte $z(0,0) = 0$.*

Behauptung: Für $|w| \leq 1$, $|w_0| = 1$ und $|w - w_0| \leq \delta < 1$ gilt die Ungleichung

$$|z(u, v) - z(u_0, v_0)| \leq (2 + \pi) \sqrt{\frac{\pi N}{\log \frac{1}{\delta}}}.$$

Satz 3. *Voraussetzungen: (1) Es seien $X(u, v)$ und $Y(u, v)$ zwei für $|w| < 1$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen, welche den Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \Delta X &= A(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + B(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ &+ C(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + D(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u), \\ \Delta Y &= \tilde{A}(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + \tilde{B}(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ &+ \tilde{C}(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + \tilde{D}(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u) \end{aligned}$$

genügen, wobei die Funktionen $A(X, Y), \ldots, \tilde{D}(X, Y)$ für $X^2 + Y^2 \leq 1$ einmal stetig differenzierbar sind und die Ungleichungen

$$|A(X, Y)| \leq \frac{1}{200}, \ldots, |\tilde{D}(X, Y)| \leq \frac{1}{200};$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial X}\right| \leq M < \infty, \ldots, \quad \left|\frac{\partial \tilde{D}}{\partial Y}\right| \leq M < \infty$$

erfüllen.

(2) *Die Funktionen $X = X(u, v)$ und $Y = Y(u, v)$ bilden die Kreisscheibe $u^2 + v^2 \leq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $X^2 + Y^2 \leq 1$ ab, und es gelte $X(0, 0) = Y(0, 0) = 0$.*

(3) *Es sei*

$$\iint\limits_{u^2 + v^2 < 1} (X_u^2 + X_v^2 + Y_u^2 + Y_v^2)\, du\, dv \leq N < \infty.$$

Behauptung: Für $|w| \leq R < 1$ gilt eine Ungleichung der Form

$$|X_u Y_v - X_v Y_u| \geq \lambda(R, M, N) > 0,$$

wobei $\lambda(R, M, N)$ eine nur von R, M, N abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis[11]). (I) Nach Satz 1' ist $X_u Y_v - X_v Y_u \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $X_u Y_v - X_v Y_u > 0$ voraussetzen. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge von Funktionenpaaren $\{X_k(u, v), Y_k(u, v)\}$, die den Voraussetzungen von Satz 2 genügen, und eine Punktfolge $\{w_k\}$ mit $|w_k| \leq R$, so daß

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{\partial(X_k, Y_k)}{\partial(u, v)}\right]_{w = w_k} = 0$$

gilt.

[11]) Ich folge hier einer Beweisanordnung, die Herr P. W. Berg in einer demnächst in den Transactions of the American Mathematical Society erscheinenden Arbeit gegeben hat, um unter geeigneten Normierungsbedingungen den Ausdruck $X_u^2 + X_v^2 + Y_u^2 + Y_v^2$ nach unten abzuschätzen, wenn die Funktionen $X(u,v)$ und $Y(u,v)$ einem linearen elliptischen System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen.

Aus Satz 2 entnimmt man die Existenz einer Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen, so daß die Funktionen $X_{k_\nu}(u, v)$ und $Y_{k_\nu}(u, v)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung gleichmäßig in jeder Kreisscheibe $|w| \leqq R' < 1$ gegen zwei in $|w| < 1$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen $X(u, v)$ und $Y(u, v)$ konvergieren und die Gleichung $\lim_{\nu \to \infty} w_{k_\nu} = w^*$ mit $|w^*| \leqq R$ besteht. Die Grenzfunktionen $X(u, v)$ und $Y(u, v)$ genügen Differentialgleichungen der Form

$$\Delta X = A(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + B(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + C(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + D(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u),$$

$$\Delta Y = \tilde{A}(X, Y)(X_u^2 + X_v^2) + \tilde{B}(X, Y)(X_u Y_u + X_v Y_v) + \\ + \tilde{C}(X, Y)(Y_u^2 + Y_v^2) + \tilde{D}(X, Y)(X_u Y_v - X_v Y_u),$$

wobei die Funktionen $A(X, Y), \ldots, \tilde{D}(X, Y)$ für $X^2 + Y^2 \leqq 1$ die Ungleichungen

$$|A(X, Y)| \leqq \frac{1}{200}, \ldots, |\tilde{D}(X, Y)| \leqq \frac{1}{200}$$

erfüllen und dort einer Lipschitzbedingung genügen. Ferner ist

$$X(u, v)^2 + Y(u, v)^2 \leqq 1 \text{ und } X(0,0) = Y(0,0) = 0 \text{ für } |w| < 1;$$

und wegen Satz 2 hat man die Gleichung $[X_u Y_v - X_v Y_u]_{w = w^*} = 0$. Offenbar ist $\Delta(X^2 + Y^2) = 2(X_u^2 + X_v^2 + Y_u^2 + Y_v^2) + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y \geqq 0$, d. h. die Funktion $X(u, v)^2 + Y(u, v)^2$ ist subharmonisch für $|w| < 1$. Also hat man für $|w| < 1$ die Ungleichung $X(u, v)^2 + Y(u, v)^2 < 1$. Da außerdem für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ die Abbildung $(u, v) \to (X_{k_\nu}(u, v), Y_{k_\nu}(u, v))$ eineindeutig ist, so sind alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, und es ergibt sich $X_u Y_v - X_v Y_u = 0$ für $|w| < 1$.

(II) Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Man setze $Z_{k_\nu}(u, v) = X_{k_\nu}(u, v) + i\, Y_{k_\nu}(u, v)$. Die Abbildung $w \to Z_{k_\nu}(u, v)$ erfüllt für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 4. Ist daher δ eine reelle Zahl mit $0 < \delta < 1$ und $(2 + \pi)\sqrt{\dfrac{\pi N}{\log \frac{1}{\delta}}} \leqq {}^1/_2$, so hat man für $|w| \geqq 1 - \delta = r$ und $\nu = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung $|Z_{k_\nu}(u, v)| \geqq {}^1/_2$. Daraus schließt man, daß die Funktionen $X_{k_\nu}(u, v)$ und $Y_{k_\nu}(u, v)$ die Kreisscheibe $|w| \leqq r$ auf ein Gebiet D_ν eineindeutig und stetig abbilden, welches die Kreisscheibe $X^2 + Y^2 \leqq {}^1/_4$ enthält. Es folgt

$$\iint_{|w| \leqq r} \frac{\partial(X_{k_\nu}, Y_{k_\nu})}{\partial(u, v)}\, du\, dv = \iint_{D_\nu} dX\, dY \geqq \iint_{X^2 + Y^2 \leqq 1/4} dX\, dY = \frac{\pi}{4}.$$

Durch Grenzübergang ($\nu \to \infty$) erhält man

$$\iint_{|w| \leqq r} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv \geqq \frac{\pi}{4},$$

was mit der Relation $X_u Y_v - X_v Y_u \equiv 0$ im Widerspruch steht. Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4. Monge-Ampèresche Differentialgleichungen vom elliptischen Typus

Wir wollen nun die bisher gefundenen Resultate benutzen, um die in der Finleitung angekündigten A-Priori-Abschätzungen für eine Klasse Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen vom elliptischen Typus zu gewinnen. Die Beweise stützen sich dabei auf den fundamentalen Zusammenhang der Monge-Ampèreschen Gleichungen mit elliptischen Systemen der bisher betrachteten Art. Die für die Gewinnung der A-Priori-Schranken erforderlichen Tatsachen sollen in dem folgenden Hilfssatz ohne Beweis zusammengestellt werden.

Hilfssatz 5. *Es sei $z(x, y)$ eine in einem Gebiet G dreimal stetig differenzierbare Funktion, deren dritte Ableitungen in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von G eine Hölderbedingung erfüllen. Ferner genüge die Funktion $z = z(x, y)$ der Differentialgleichung*

$$F \equiv Ar + 2\,Bs + Ct + rt - s^2 - E = 0\,,$$

wobei die Koeffizienten $A = A(x, y, z, p, q), \ldots, E = E(x, y, z, p, q)$ als Funktionen der Variabeln x, y, z, p, q in einer Umgebung eines jeden Punktes der Punktmenge

$$\mathfrak{P} = \{(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y));\ (x, y) \in G\}$$

zweimal stetig differenzierbar sind und dort die Ungleichung $A\,C - B^2 + E > 0$ erfüllen[12]*). Dann gibt es zu jeder in G enthaltenen Kreisscheibe $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq R^2$ ein reelles Funktionenpaar $\{u(x, y), v(x, y)\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Die Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ bilden die Kreisscheibe $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq R^2$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $u^2 + v^2 \leq 1$ ab, und es gilt*

$$u(x_1, y_1) = v(x_1, y_1) = 0\,.$$

(2) *Die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind für $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < R^2$ zweimal stetig differenzierbar und genügen den zur charakteristischen Differentialform $\Phi \equiv F_t\,d\,x^2 - F_s\,d\,x\,d\,y + F_r\,d\,y^2$ gehörigen Beltramischen Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{(B - s)\,v_x + (C + r)\,v_y}{\Delta^{1/2}} \\ u_y &= \frac{-(A + t)\,v_x - (B - s)\,v_y}{\Delta^{1/2}} \end{aligned}\right\}\ \Delta = A\,C - B^2 + E\,.$$

(3) *Für $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < R^2$ gilt $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$.*

(4) *Die Umkehrfunktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ genügen für $u^2 + v^2 < 1$ einem elliptischen System von Differentialgleichungen der Form:*

$$\begin{aligned} x_{uu} + x_{vv} &= h_1(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x_u y_u + x_v y_v) + h_3(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x_u y_v - x_v y_u)\,, \\ y_{uu} + y_{vv} &= \tilde{h}_1(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x_u y_u + x_v y_v) + \tilde{h}_3(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x_u y_v - x_v y_u) \end{aligned}$$

[12]) Auf Grund allgemeiner Differenzierbarkeitssätze von E. HOPF [6] und L. NIRENBERG [13] kann die Voraussetzung, daß die dritten Ableitungen der Funktion $z(x, y)$ existieren und hölderstetig sind, durch die schwächere ersetzt werden, daß $z(x, y)$ in G zweimal stetig differenzierbar ist.

mit

$$h_1 = B_q - \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta_x + p\,\Delta_z - C\,\Delta_p + B\,\Delta_q),$$
$$h_2 = -B_p - A_q - \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta_y + q\,\Delta_z + B\,\Delta_p - A\,\Delta_q),$$
$$h_3 = A_p,$$
$$h_4 = \Delta^{-1/2}(A_x + B_y + p\,A_z + q\,B_z - C\,A_p + B\,B_p - \tfrac{1}{2}\Delta_p + B\,A_q - A\,B_q);$$
$$\tilde h_1 = C_q,$$
$$\tilde h_2 = -C_p - B_q - \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta_x + p\,\Delta_z - C\,\Delta_p + B\,\Delta_q),$$
$$\tilde h_3 = B_p - \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}(\Delta_y + q\,\Delta_z + B\,\Delta_p - A\,\Delta_q),$$
$$\tilde h_4 = \Delta^{-1/2}(B_x + C_y + p\,B_z + q\,C_z - C\,B_p + B\,C_p - A\,C_q + B\,B_q - \tfrac{1}{2}\Delta_q).$$

(5) *Es gelten die Darstellungen:*

$$\frac{A+t}{\Delta^{1/2}} = \frac{x_u^2 + x_v^2}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad \frac{B-s}{\Delta^{1/2}} = \frac{x_u y_u + x_v y_v}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad \frac{C+v}{\Delta^{1/2}} = \frac{y_u^2 + y_v^2}{x_u y_v - x_v y_u}.$$

Hieraus erhält man A-Priori-Abschätzungen der Lösungen Monge-Ampèrescher Gleichungen für den Fall, daß die Funktionen $h_1, \ldots, \tilde h_4$ nur von x, y abhängen, nämlich

Satz 4. *Voraussetzungen:* (1) *Es sei $z(x, y)$ eine in einem Gebiet G dreimal stetig differenzierbare Funktion, deren dritte Ableitungen in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von G eine Hölderbedingung erfüllen. Die Funktion $z = z(x, y)$ genüge für $(x, y) \in G$ der Differentialgleichung*

$$A r + 2 B s + C t + r t - s^2 = E,$$

wobei die Koeffizienten $A = A(x, y, z, p, q), \ldots, E = E(x, y, z, p, q)$ in einer Umgebung eines jeden Punktes $(x, y, z, p, q) \in \mathfrak{P}$ zweimal stetig differenzierbar sind.

(2) *Die Koeffizienten A, B, C, E genügen für $(x, y, z, p, q) \in \mathfrak{P}$ den Ungleichungen*

$$|A| \leq \alpha, \ldots, \quad |E| \leq \alpha;$$
$$|A_x| \leq \alpha, \ldots, \quad |E_q| \leq \alpha;$$
$$|A_{xx}| \leq \alpha, \ldots, |E_{qq}| \leq \alpha$$

und $\Delta = A\,C - B^2 + E \geq \alpha^{-1}$ mit einer positiven Zahl α[13]).

(3) *Die in Hilfssatz 5 erklärten Funktionen $h_1, \ldots, \tilde h_4$ seien von z, p und q unabhängig und erfüllen Ungleichungen der Form*

$$\left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right| \leq \beta < \infty, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde h_4}{\partial y}\right| \leq \beta < \infty \quad \text{für } (x, y) \in G.$$

(4) *Für $(x, y) \in G$ sei $|p| \leq \gamma < \infty$ und $|q| \leq \gamma < \infty$.*

(5) *Es sei G_d die Menge aller Punkte $(x, y) \in G$, deren Abstand vom Rande von G größer als eine positive Zahl d ist, und μ eine reelle Zahl mit $0 < \mu < 1$.*

[13]) Vgl. die Fußnote auf S. 424.

Behauptung: Es gelten Ungleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} |r| \leqq Q_1(\alpha, \beta, \gamma, d) < \infty, \ldots, |t| \leqq Q_1(\alpha, \beta, \gamma, d) < \infty \\ |r_x| \leqq Q_2(\alpha, \beta, \gamma, d) < \infty, \ldots, |t_y| \leqq Q_2(\alpha, \beta, \gamma, d) < \infty \end{array}\right\} \textit{für } (x, y) \in G_d$$

und

$$|r_x(x_1, y_1) - r_x(x_2, y_2)| \leqq Q_3(\alpha, \beta, \gamma, d, \mu)\,[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\mu/2}$$

$$\vdots$$

$$|t_y(x_1, y_1) - t_y(x_2, y_2)| \leqq Q_3(\alpha, \beta, \gamma, d, \mu)\,[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\mu/2}$$

mit $Q_3(\alpha, \beta, \gamma, d, \mu) < \infty$ *für* $(x_1, y_1) \in G_d$ *und* $(x_2, y_2) \in G_d$.

Beweis: Wegen (2) hat man Ungleichungen der Form

$$|h_1| \leqq \alpha^*(\alpha, \gamma), \ldots, |\tilde{h}_4| \leqq \alpha^*(\alpha, \gamma)$$

mit $0 < \alpha^*(\alpha, \gamma) < \infty$ für $(x, y) \in G$. Es sei $(x_1, y_1) \in G_d$ und

$$\delta = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{200\,\alpha^*}, d\right).$$

Gemäß Hilfssatz 5 gibt es eine eineindeutige und stetige Abbildung $x = x(u,v)$, $y = y(u, v)$ der Einheitskreisscheibe $u^2 + v^2 \leqq 1$ auf die Kreisscheibe $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqq \delta^2$ mit $x(0,0) = x_1$ und $y(0,0) = y_1$, so daß die Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ für $u^2 + v^2 < 1$ den Differentialgleichungen

$$x_{uu} + x_{vv} = h_1(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x_u y_u + x_v y_v) + h_3(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x_u y_v - x_v y_u),$$
$$y_{uu} + y_{vv} = \tilde{h}_1(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x_u y_u + x_v y_v) + \tilde{h}_3(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x_u y_v - x_v y_u)$$

genügen und die Darstellungen

$$\frac{A + t}{\Delta^{1/2}} = \frac{x_u^2 + x_v^2}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad \frac{B - s}{\Delta^{1/2}} = \frac{x_u y_u + x_v y_v}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad \frac{C + r}{\Delta^{1/2}} = \frac{y_u^2 + y_v^2}{x_u y_v - x_v y_u}$$

gelten. Es sei ϱ eine reelle Zahl mit $0 < \varrho < 1$. Dann gibt es eine reelle Zahl δ_1 mit $0 < \delta_1 < \delta$, so daß das Bildgebiet $\mathfrak{B}$ der Kreisscheibe $\mathfrak{K} = \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < \delta_1^2\}$ bei der Abbildung $(x, y) \to (u, v)$ die Kreisscheibe $u^2 + v^2 \leqq \varrho^2$ enthält. Es folgt

$$\iint\limits_{u^2 + v^2 \leqq \varrho^2} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)\,du\,dv \leqq \iint\limits_{\mathfrak{B}} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)\,du\,dv$$

$$= \left|\iint\limits_{\mathfrak{K}} \frac{A + C + r + t}{\Delta^{1/2}}\,dx\,dy\right| \leqq \alpha^{1/2}\left|\iint\limits_{\mathfrak{K}} (A + C + r + t)\,dx\,dy\right|$$

$$\leqq \alpha^{1/2}\left\{\iint\limits_{\mathfrak{K}} (|A| + |C|)\,dx\,dy + \left|\oint\limits_{\mathfrak{K}'} (-q\,dx + p\,dy)\right|\right\}$$

$$\leqq \alpha^{1/2}\{2\pi\alpha\delta_1^2 + 4\pi\gamma\delta_1\} \leqq 2\pi\alpha^{3/2}\delta^2 + 4\pi\alpha^{1/2}\gamma\delta$$

für $0 < \varrho < 1$ und somit

$$\iint\limits_{u^2 + v^2 < 1} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2)\,du\,dv \leqq 2\pi\alpha^{3/2}\delta^2 + 4\pi\alpha^{1/2}\gamma\delta.$$

Setzt man also

$$X(u, v) = \frac{x(u, v) - x_1}{\delta} \text{ und } Y(u, v) = \frac{y(u, v) - y_1}{\delta},$$

ferner

$$H_1(X, Y) = \delta\, h_1(x_1 + \delta X, y_1 + \delta Y), \ldots, \tilde{H}_4(X, Y) = \delta\, \tilde{h}_4(x_1 + \delta X, y_1 + \delta Y),$$

so erfüllen die Funktionen $X(u, v)$, $Y(u, v)$; $H_1(X, Y), \ldots, \tilde{H}_4(X, Y)$ alle Voraussetzungen von Satz 2 und Satz 3 mit

$$M = \delta^2 \beta \text{ und } N = 2\pi\, \alpha^{1/2} + 4\pi\, \alpha^{1/2} \gamma\, \delta^{-1};$$

und man erhält für $u^2 + v^2 \leqq R^2 < 1$ eine Abschätzung der Form

$$|X_u Y_v - X_v Y_u| \geqq \lambda(R, M, N) = \lambda_1(R, \alpha, \beta, \gamma, d) > 0.$$

Daraus sowie aus den Darstellungen

$$\left.\begin{aligned} r &= -C + \Delta^{1/2} \frac{Y_u^2 + Y_v^2}{X_u Y_v - X_v Y_u} \\ s &= B - \Delta^{1/2} \frac{X_u Y_u + X_v Y_v}{X_u Y_v - X_v Y_u} \\ t &= -A + \Delta^{1/2} \frac{X_u^2 + X_v^2}{X_u Y_v - X_v Y_u} \end{aligned}\right\} (u^2 + u^2 < 1),$$

erhält man durch Anwendung von Satz 2 die Behauptung.

In dem Falle, wo die Koeffizienten A, B, C, E nur von den Variabeln x, y abhängen, gelten offenbar Abschätzungen der Form

$$\left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right| \leqq \beta(\alpha) < \infty, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde{h}_4}{\partial y}\right| \leqq \beta(\alpha) < \infty.$$

Ferner lassen sich in diesem Falle auf Grund einfacher Konvexitätsbetrachtungen leicht A-Priori-Abschätzungen für die Ableitungen p, q angeben, falls man eine Schranke für $|z|$ kennt. Man erhält so den

Satz 4'[14]. *Voraussetzungen:* (1) *Es sei $z(x, y)$ eine in einem Gebiet G dreimal stetig differenzierbare Funktion, deren dritte Ableitungen in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von G eine Hölderbedingung erfüllen. Die Funktion $z = z(x, y)$ genüge der Differentialgleichung*

$$A r + 2 B s + C t + r t - s^2 = E,$$

wobei die Koeffizienten $A = A(x, y), \ldots, E = E(x, y)$ für $(x, y) \in G$ zweimal stetig differenzierbar sind.

(2) *Die Koeffizienten A, B, C, E genügen für $(x, y) \in G$ Ungleichungen der Form*

$$|A| \leqq \alpha, \ldots, \quad |E| \leqq \alpha;$$
$$|A_x| \leqq \alpha, \ldots, \quad |E_y| \leqq \alpha;$$
$$|A_{xx}| \leqq \alpha, \ldots, |E_{yy}| \leqq \alpha;$$

$\Delta = A C - B^2 + E \geqq \alpha^{-1}$ *mit einer positiven Zahl* α[15]).

---

[14]) Vgl. dazu H. Lewy [9], Theorem 2'.

[15]) Vgl. die Fußnote auf S. 424.

(3) Für $(x, y) \in G$ *sei* $|z(x, y)| \leqq \beta < \infty$.

(4) *Es sei* G_d *die Menge aller Punkte* $(x, y) \in G$, *deren Abstand vom Rande von* G *größer als eine positive Zahl* d *ist, und* μ *eine reelle Zahl mit* $0 < \mu < 1$.

Behauptung: Es gelten Ungleichungen der Form

$$|p| \leqq W_1(\alpha, \beta, d), \quad |q| \leqq W_1(\alpha, \beta, d)$$
$$|r| \leqq W_2(\alpha, \beta, d), \ldots, |t| \leqq W_2(\alpha, \beta, d),$$
$$|r_x| \leqq W_3(\alpha, \beta, d), \ldots, |t_y| \leqq W_3(\alpha, \beta, d)$$

für $(x, y) \in G_d$ *mit* $W_1 < \infty$, $W_2 < \infty$ *und* $W_3 < \infty$, *und*

$$|r_x(x_1, y_1) - r_x(x_2, y_2)| \leqq W_4(\alpha, \beta, d, \mu) \, [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\mu/2}$$
$$\vdots$$
$$|t_y(x_1, y_1) - t_y(x_2, y_2)| \leqq W_4(\alpha, \beta, d, \mu) \, [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\mu/2}$$

für $(x_1, y_1) \in G_d$, $(x_2, y_2) \in G_d$ *mit* $W_4 < \infty$.

Literatur

[1] COURANT, R.: Dirichlet's Principle. New York 1950. — [2] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, Bd. 3. Paris 1894. — [3] EFIMOW, N. V.: Qualitative Problems of the Theory of Deformation of Surfaces. Uspehi Mat. Nauk (N. S.), No. 2 (24), 47—158 (1948). (Amer. Math. Soc. Translation Number 37). — [4] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449—476 (1953). — [5] HEINZ, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. **127**, 258—287 (1954). [6] HOPF, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1932). — [7] LEBESGUE, H.: Sur le Problème de Dirichlet. Rend. del Circ. Mat. di Palermo **24**, 371—402 (1907). — [7a] LERAY, J.: Discussion d'un problème de Dirichlet. Journal de Mathematiques pures et appliquées **18**, 249—284 (1939). — [8] LEWY, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 689—692 (1936). — [9] LEWY, H.: A Priori Limitations for Solutions of Monge Ampère Equations, II. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 365—374 (1937). — [10] LEWY, H.: On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24**, No. 2, 104—106 (1938). — [11] LEWY, H.: On Differential Geometry in the Large, I (Minkowski's Problem). Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 258—270 (1938). — [12] NAGUMO, M.: On principally linear elliptic differential equations of second order. Osaka Math. J. **6**, 207—229 (1954). — [13] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure a. Appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [14] NIRENBERG, L.: The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large. Comm. Pure a. Appl. Math. **6**, 337—394 (1953). — [15] POGORELOW, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Moskau-Leningrad 1951 (russ.). — [16] POGORELOW, A. W.: Die Regularität einer konvexen Fläche mit gegebener Gaußscher Krümmung. Mat. Sbornik, S. 88—103 (1952), (russ.). — [17] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934).

(Eingegangen am 28. Januar 1956)

LANDSBERG, M.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 429—434 (1956)

Der Durchschnittsgrad hypercharakteristischer Filter

Von

MAX LANDSBERG in Dresden

Einleitung und Ergebnisse

Die Begriffe Filter, Ultrafilter verstehen wir im Sinne von BOURBAKI [4]. Die Mächtigkeit einer Menge A wird mit $\bar{\bar{A}}$ bezeichnet.

Einige Bezeichnungen entnehmen wir einer Arbeit von J. SCHMIDT [10] und dem Buch von NÖBELING [9] über analytische Topologie. Φ sei ein Filter auf der Menge A, $\mathfrak{m}$ sei eine transfinite Kardinalzahl. Φ wird prinzipal genannt, wenn es eine nicht leere Teilmenge M von A gibt, so daß Φ aus allen $X \subset A$ mit $M \subset X$ besteht. Man bezeichnet Φ als einen $\mathfrak{m}$-Filter, wenn für jede Familie $(F_j)_{j \in J}$ von Filterelementen mit $\bar{\bar{J}} \leqq \mathfrak{m}$ auch $\bigcap_{j \in J} F_j$ ein Element von Φ ist. Ist insbesondere $\bar{\bar{A}} \geqq \aleph_0$, so bilden alle $X \subset A$ mit $\overline{\overline{A - X}} < \aleph_0$ den sog. charakteristischen Filter Φ_A von A; ein Filter auf A, der feiner als Φ_A ist, wird hypercharakteristisch (hyperch.) genannt.

Wesentlich für die weiteren Angaben ist nun die folgende

Definition. Es sei Φ ein hyperch. Filter auf der (unendlichen) Menge A und $\mathfrak{d}(\Phi)$ die kleinste Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, für die Φ kein $\mathfrak{m}$-Filter ist. Wir wollen $\mathfrak{d}(\Phi)$ den Durchschnittsgrad von Φ nennen.

Offensichtlich ist $\aleph_0 \leqq \mathfrak{d}(\Phi) \leqq \bar{\bar{A}}$, und $\aleph_0$ ist der Durchschnittsgrad des charakteristischen Filters von A. Existiert auf der (unendlichen) Menge A auch ein hyperch. Filter Φ mit $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$? Es ergibt sich die folgende Antwort. Auf A existiert genau dann ein hyperch. Filter mit dem Durchschnittsgrad $\bar{\bar{A}}$, wenn $\bar{\bar{A}}$ nicht mit einer erreichbaren Grenzzahl zusammenfällt. Hierbei soll eine transfinite Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ erreichbar heißen, wenn $\sum_{j \in J} \mathfrak{m}_j \geqq \mathfrak{m}$ ist für eine gewisse Menge J mit $\bar{\bar{J}} < \mathfrak{m}$ und eine gewisse Familie $(\mathfrak{m}_j)_{j \in J}$ von Kardinalzahlen mit $\mathfrak{m}_j < \mathfrak{m}\,(j \in J)$.

Das sind alles noch recht einfache Verhältnisse. Schwierig wird die Sachlage, wenn man sich mit dem Durchschnittsgrad hyperch. Ultrafilter beschäftigt Hierbei kommt man sofort in die den Grundlagen der Mengenlehre anhaftende Problematik hinein. Einerseits läßt sich mit Hilfe des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems die Existenz hyperch. Ultrafilter, deren Durchschnittsgrad größer als $\aleph_0$ ist, nicht feststellen; das folgt aus bekannten Untersuchungen über die Axiomatik der Mengenlehre und aus dem weiter unten bewiesenen Satz, daß der Durchschnittsgrad eines hyperch. Ultrafilters stets eine Kuratowskische Kardinalzahl sein muß. Andererseits ist es bisher nicht gelungen, die Nichtexistenz hyperch. Ultrafilter, deren Durchschnittsgrad größer als $\aleph_0$ ist, zu beweisen.

Um eine diesen Verhältnissen entspringende Alternative kurz formulieren zu können, führen wir noch die folgende Bezeichnung ein. Wir wollen eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ prinzipal nennen, falls eine Menge A mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$ existiert, so daß alle Ultrafilter auf A, die zugleich $\varkappa_0$-Filter sind, prinzipal sind. Selbstverständlich sind alle endlichen Kardinalzahlen prinzipal; eine unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ ist offenbar genau dann prinzipal, wenn es eine Menge A mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$ gibt, so daß jeder hyperch. Ultrafilter auf A den Durchschnittsgrad $\varkappa_0$ besitzt.

Die angekündigte Alternative besagt nun folgendes. Entweder sind alle Kardinalzahlen prinzipal oder die prinzipalen Kardinalzahlen bilden einen Abschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{t}}$ der (wohlgeordneten) Klasse $\mathfrak{K}$ aller Kardinalzahlen, wobei $\mathfrak{t}$ eine ganz bestimmte Tarskische Zahl mit $\mathfrak{t} > \varkappa_0$ ist. Ist im zweiten Fall A eine Menge mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{t}$ und Φ ein hyperch. Ultrafilter auf A, so ist entweder $\mathfrak{d}(\Phi) = \varkappa_0$ oder $\mathfrak{d}(\Phi) = \mathfrak{t}$.

Auf die engen Beziehungen, die sich zwischen den letzten Aussagen und gewissen maßtheoretischen Betrachtungen (BANACH [2]; ULAM [11]) und einer damit wiederum zusammenhängenden funktionalanalytischen Problemstellung (MACKEY [7] und [8], S. 180/181; DONOGHUE-SMITH [6], S. 3?/; BOURBAKI [3], S. 11 und [5], S. 15, Fußnote) herstellen lassen, gehen wir in dieser Note nicht ein.

Der Durchschnittsgrad hypercharakteristischer Filter

Satz 1. Genau dann existiert auf der unendlichen Menge A ein hyperch. Filter mit dem Durchschnittsgrad $\bar{\bar{A}}$, wenn $\bar{\bar{A}}$ nicht mit einer erreichbaren Grenzzahl zusammenfällt.

Hilfssatz 1. Ist Φ ein hyperch. Filter auf der Menge A, so ist $\bar{\bar{F}} \geqq \mathfrak{d}(\Phi)$ für jedes Filterelement F. Ist M eine Teilmenge von A mit $\bar{\bar{M}} < \mathfrak{d}(\Phi)$, so ist $A - M$ ein Element des Filters Φ.

Beweis von Hilfssatz 1. Nur der zweite Teil des Hilfssatzes ist zu beweisen. Für jedes $y \in M$ gehört $F_y = A - \{y\}$ zu Φ; dasselbe gilt wegen $\bar{\bar{M}} < \mathfrak{d}(\Phi)$ auch für $\bigcap\limits_{y \in M} F_y$. Wegen $\bigcap\limits_{y \in M} F_y = \bigcap\limits_{y \in M} (A - \{y\}) = A - M$ ist alles gezeigt.

Beweis von Satz 1. (I) Φ sei ein hyperch. Filter auf der (unendlichen) Menge A mit $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$. Wir nehmen an, daß $\bar{\bar{A}}$ eine erreichbare Grenzzahl ist; es ist also $\sum\limits_{j \in J} \mathfrak{m}_j = \bar{\bar{A}}$ für eine gewisse Menge J mit $\bar{\bar{J}} < \bar{\bar{A}}$ und für eine Familie $(\mathfrak{m}_j)_{j \in J}$ von Kardinalzahlen mit $\mathfrak{m}_j < \bar{\bar{A}}$ $(j \in J)$. Es gibt somit eine Zerlegung $A = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$ von A in ein System von Teilmengen $A_j \subset A$ mit $\bar{\bar{A}}_j < \bar{\bar{A}} = \mathfrak{d}(\Phi)$ $(j \in J)$. Nach Hilfssatz 1 ist $A - A_j \in \Phi$ für jedes $j \in J$. Daher gehört auch $\bigcap\limits_{j \in J} (A - A_j)$ zu Φ. Andererseits ist aber $\bigcap\limits_{j \in J} (A - A_j)$ leer wegen $\bigcup\limits_{j \in J} A_j = A$. Widerspruch. (II) $\bar{\bar{A}}$ falle nicht mit einer erreichbaren Grenzzahl zusammen. (II$_a$) $\bar{\bar{A}}$ sei eine nicht erreichbare Grenzzahl, d. h. eine Kuratowskische Zahl. Alle $X \subset A$ mit $\overline{\overline{A - X}} < \bar{\bar{A}}$ bilden einen hyperch. Filter Φ.

Für $\bar{\bar{A}} = \aleph_0$ ist Φ mit dem charakteristischen Filter Φ_A identisch, und es ist $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$. Es sei nun $\bar{\bar{A}} \neq \aleph_0$, $\mathfrak{m}$ eine transfinite Kardinalzahl mit $\mathfrak{m} < \bar{\bar{A}}$, $(F_k)_{k \in K}$ eine Familie von Elementen des Filters Φ mit $\bar{\bar{K}} \leq \mathfrak{m}$. Aus $\bigcap\limits_{k \in K} F_k = F$ folgt $\bigcup\limits_{k \in K} (A - F_k) = A - F$ und hieraus wieder $\overline{\overline{A - F}} \leq \sum\limits_{k \in K} \overline{\overline{A - F_k}} < \bar{\bar{A}}$. F gehört also zum Filter, Φ ist somit $\mathfrak{m}$ — Filter für jedes (transfinite) $\mathfrak{m} < \bar{\bar{A}}$. Daher ist auch jetzt wieder $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$. ($\mathrm{II}_b$) $\bar{\bar{A}}$ sei keine Grenzzahl, $\mathfrak{n}$ sei die unmittelbar vor $\bar{\bar{A}}$ stehende Kardinalzahl. Alle $X \subset A$ mit $\overline{\overline{A - X}} \leq \mathfrak{n}$ bilden einen hyperch. Filter Φ. Es sei $(F_k)_{k \in K}$ eine Familie von Filtermengen mit $\bar{\bar{K}} \leq \mathfrak{n}$ und $F = \bigcap\limits_{k \in K} F_k$. Aus $\bigcup\limits_{k \in K} (A - F_k) = A - F$ folgt $\overline{\overline{A - F}} \leq \sum\limits_{k \in K} \overline{\overline{A - F_k}} \leq \bar{\bar{K}} \cdot \mathfrak{n}$, also $\overline{\overline{A - F}} \leq \mathfrak{n}$. F gehört daher zu Φ, Φ ist ein $\mathfrak{n}$-Filter, es ist somit $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$.

Der Durchschnittsgrad hypercharakteristischer Ultrafilter

Satz 2. Φ sei ein hyperch. Ultrafilter auf der Menge A. Außerdem sei $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$. Dann ist $\bar{\bar{A}}$ eine Grenzzahl.

Zum Beweis ziehen wir zwei Hilfssätze heran.

Hilfssatz 2. Φ sei ein hyperch. Ultrafilter auf der Menge A, F sei ein Element von Φ und $F = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$ eine Zerlegung von F mit $\bar{\bar{J}} < \mathfrak{d}(\Phi)$. Dann gehört mindestens ein A_j zu Φ.

Beweis von Hilfssatz 2. Wir nehmen an, daß kein A_j zu Φ gehört. Da Φ ein Ultrafilter ist, gilt dann $F - A_j \in \Phi$ für jedes $j \in J$. Wegen $\bar{\bar{J}} < \mathfrak{d}(\Phi)$ gehört einerseits $\bigcap\limits_{j \in J} (F - A_j)$ zu Φ, andererseits ist aber dieser Durchschnitt leer. Widerspruch.

Hilfssatz 3 (vgl. Ulam [11], S. 143). M sei eine unendliche Menge, $\bar{\bar{M}}$ sei keine Grenzzahl, $\mathfrak{n}$ sei die unmittelbar vor $\bar{\bar{M}}$ stehende Kardinalzahl, L sei eine Teilmenge von M mit $\bar{\bar{L}} = \mathfrak{n}$. Dann existiert eine Matrix $(A_{xy})_{(x,y) \in L \times M}$, deren Elemente Teilmengen von M sind und die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Für jedes $x \in L$ ist die Familie $(A_{xy})_{y \in M}$ disjunkt.
2. Für jedes $y \in M$ ist $M - \bigcup\limits_{x \in L} A_{xy} = R_y$ eine Teilmenge von M mit $\bar{\bar{R}}_y \leq \mathfrak{n}$.

Beweis von Hilfssatz 3. M sei wohlgeordnet durch $\subsetneq$. Wir können annehmen, daß für jedes $y \in M$ die Menge $M_y = \{z \in M : z \subsetneq y\}$ eine Mächtigkeit $\bar{\bar{M}}_y \leq \mathfrak{n} = \bar{\bar{L}}$ hat. Mit Hilfe des Auswahlaxioms ergibt sich auf der Menge aller (y, z) $(y \in M, z \in M_y)$ die Existenz einer Funktion φ, deren Werte Elemente von L sind und für die bei festem y aus $z, z' \in M_y$, $z \neq z'$ stets $\varphi(y, z) \neq \varphi(y, z')$ folgt. Für jedes $(x, y) \in L \times M$ sei nun A_{xy} die Menge aller $z \supsetneq y$ mit $\varphi(z, y) = x$. Dann gilt:

a) Für $y \neq y'$ ist $A_{xy} \cap A_{xy'}$ leer; denn aus $z \in A_{xy}$, $z \in A_{xy'}$ würde $\varphi(z, y) = \varphi(z, y')$ folgen, was wegen $y \neq y'$ nach unseren Voraussetzungen über die Funktion φ nicht möglich ist. Damit ist 1. gezeigt.

b) Es sei y aus M gegeben und $z \gtreqless y$. Ist $\varphi(z, y) = u$, so gehört z zu A_{uy}. Also enthält $\bigcup_{x \in L} A_{xy}$ alle $z \in M$ mit $z \gtreqless y$. Also ist $R_y = M - \bigcup_{x \in L} A_{xy}$ eine Teilmenge von M_y. Wegen $\overline{R}_y \leq \overline{M}_y \leq \mathfrak{n}$ ist damit auch 2. gezeigt.

Beweis von Satz 2. Wir nehmen an, daß $\bar{\bar{A}}$ keine Grenzzahl ist. $\mathfrak{n}$ sei die unmittelbar vor $\bar{\bar{A}}$ stehende Kardinalzahl. Wir machen nun vom Hilfssatz 3 mit $M = A$ Gebrauch. In jeder Spalte der Matrix $(A_{xy})_{(x,y) \in L \times A}$ gibt es dann mindestens ein Element, das zu Φ gehört. Denn ist $y \in A$ gegeben, so gehört R_y wegen $\overline{R}_y \leq \mathfrak{n} < \bar{\bar{A}} = \mathfrak{d}(\Phi)$ nach Hilfssatz 1 nicht zu Φ; wegen $R_y \cup \left(\bigcup_{x \in L} A_{xy}\right) = A$ und $\overline{L} = \mathfrak{n} < \bar{\bar{A}} = \mathfrak{d}(\Phi)$ gehört nach Hilfssatz 2 mindestens ein A_{xy} zu Φ. Wegen $\overline{L} < \bar{\bar{A}}$ muß es mindestens eine Zeile in der Matrix $(A_{xy})_{(x,y) \in L \times A}$ geben, in der sich mindestens 2 Filtermengen befinden. Das ist aber nicht möglich, da in der Matrix nach Hilfssatz 3 in jeder Zeile nur disjunkte Elemente stehen.

Satz 3. Φ sei ein hyperch. Ultrafilter auf der Menge A mit $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{A}}$. Dann ist $\bar{\bar{A}}$ eine Kuratowskische Zahl.

Beweis. Nach Satz 2 ist $\bar{\bar{A}}$ eine Grenzzahl, die nach Satz 1 nicht erreichbar ist.

Satz 4. Φ sei ein hyperch. Ultrafilter auf der Menge A. Dann ist $\mathfrak{d}(\Phi)$ eine Kuratowskische Zahl.

Das folgt aus Satz 3 und aus dem

Hilfssatz 4. Φ sei ein hyperch. Ultrafilter auf der Menge A. Dann existiert eine Menge M mit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{d}(\Phi)$ und ein hyperch. Ultrafilter Ψ auf M mit $\mathfrak{d}(\Psi) = \overline{\overline{M}}$.

Beweis von Hilfssatz 4. Es gibt eine Familie $(F_k)_{k \in K}$ von Filtermengen mit $\overline{\overline{K}} = \mathfrak{d}(\Phi)$, wo $H = \bigcap_{k \in K} F_k$ nicht zu Φ gehört. Da Φ ein Ultrafilter ist, muß $F = A - H = \bigcup_{k \in K} (A - F_k)$ ein Filterelement sein. Es gibt also auch eine Teilung $F = \bigcup_{k \in K} G_k$ von F, d. h. eine disjunkte Zerlegung in nicht leere Teilmengen, bei der kein G_k zu Φ gehört. Die G_k bilden eine Teilmenge M der Potenzmenge von A mit $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{K}} = \mathfrak{d}(\Phi)$. Die Teilfamilien $(G_s)_{s \in S}$ von $(G_k)_{k \in K}$, für die $\bigcup_{s \in S} G_s \in \Phi$ gilt, sind dann die Elemente eines hyperch. Ultrafilters Ψ auf M. Weiter zeigt eine einfache Überlegung, daß der Durchschnittsgrad von Ψ mit $\mathfrak{d}(\Phi) = \overline{\overline{M}}$ zusammenfallen muß.

Anmerkung. Es ist nicht möglich, die Existenz hyperch. Ultrafilter mit einem Durchschnittsgrad größer als $\aleph_0$ mit dem üblichen (Zermelo-Fraenkelschen) Axiomensystem der Mengenlehre festzustellen. Denn sonst würde sich aus diesem Axiomensystem nach Satz 4 auch die Existenz von Kuratowskischen Zahlen, die größer als $\aleph_0$ sind, ergeben, was nach bekannten Untersuchungen (s. BACHMANN [1], S. 186) nicht der Fall sein kann.

Wir hatten in der Einleitung eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ prinzipal genannt, wenn für eine gewisse Menge A mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$ alle Ultrafilter auf A, die zugleich $\aleph_0$-Filter sind, prinzipal sind. Wir kommen nun zu der schon in der Einleitung angegebenen Alternative.

Satz 5. Entweder sind alle Kardinalzahlen prinzipal oder die prinzipalen Kardinalzahlen bilden einen Abschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{t}}$ der (wohlgeordneten) Klasse $\mathfrak{K}$ aller Kardinalzahlen, wobei $\mathfrak{t}$ eine von $\aleph_0$ verschiedene Tarskische Zahl (Bachmann [1], S. 182) ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem nächsten Satz und aus den beiden ihm folgenden Hilfssätzen.

Satz 6. Nicht alle Kardinalzahlen seien prinzipal, $\mathfrak{t}$ sei die kleinste nicht prinzipale Kardinalzahl. Ist A eine Menge mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{t}$ und Φ ein hyperch. Ultrafilter auf A, dann ist entweder $\mathfrak{d}(\Phi) = \aleph_0$ oder $\mathfrak{d}(\Phi) = \mathfrak{t}$.

Beweis von Satz 6. Es sei $\mathfrak{d}(\Phi) > \aleph_0$. Nach Hilfssatz 4 existiert auf einer gewissen Menge M mit $\bar{\bar{M}} = \mathfrak{d}(\Phi)$ ein hyperch. Ultrafilter mit dem Durchschnittsgrad $\bar{\bar{M}}$. Wegen $\bar{\bar{M}} = \mathfrak{d}(\Phi) > \aleph_0$ ist $\bar{\bar{M}}$ nicht prinzipal, also ist $\mathfrak{t} \leqq \bar{\bar{M}}$. Da aber auch $\bar{\bar{M}} = \mathfrak{d}(\Phi) \leqq \bar{\bar{A}} = \mathfrak{t}$ ist, muß $\mathfrak{d}(\Phi) = \bar{\bar{M}} = \mathfrak{t}$ sein.

Hilfssatz 5. $\mathfrak{n}$ sei eine nicht prinzipale Kardinalzahl, $\mathfrak{m}$ sei größer als $\mathfrak{n}$. Dann ist auch $\mathfrak{m}$ nicht prinzipal.

Beweis von Hilfssatz 5. A sei eine Menge mit $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$, B eine Teilmenge von A mit $\bar{\bar{B}} = \mathfrak{n}$. Nach Voraussetzung existiert auf B ein hyperch. Ultrafilter Φ mit $\mathfrak{d}(\Phi) > \aleph_0$. Alle $X \subset A$ mit $X \cap B \in \Phi$ bilden dann einen hyperch. Ultrafilter Ψ auf A, dessen Durchschnittsgrad ebenfalls größer als $\aleph_0$ ist. Also ist auch $= \bar{\bar{A}}\ \mathfrak{m}$ nicht prinzipal.

Hilfssatz 6. $(\mathfrak{m}_j)_{j \in J}$ sei eine Familie von prinzipalen Kardinalzahlen mit ebenfalls prinzipalem $\bar{\bar{J}}$. Dann ist auch das Produkt $\prod\limits_{j \in J} \mathfrak{m}_j$ eine prinzipale Kardinalzahl.

Beweis von Hilfssatz 6. $(M_j)_{j \in J}$ sei eine Familie von Mengen mit $\bar{\bar{M}}_j = \mathfrak{m}_j (j \in J)$. Es ist zu zeigen, daß das Produkt $M = \prod\limits_{j \in J} M_j$ eine prinzipale Mächtigkeit besitzt. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es auf M einen hyperch. Ultrafilter Φ mit $\mathfrak{d}(\Phi) > \aleph_0$. Es sei nun k ein Element von J und u ein Element von M_k. Alle $(z_j)_{j \in J}$ aus M mit $z_k = u$ bilden eine Teilmenge $M(k; u)$ von M, für jedes $k \in J$ ist $\bigcup\limits_{u \in M_k} M(k; u)$ eine Teilung von M. Wegen $\bar{\bar{M}}_k = \mathfrak{m}_k < \mathfrak{d}(\Phi)$ gehört nach Hilfssatz 2 genau ein $M(k; u)$, das mit F_k bezeichnet werden soll, zum Filter Φ. Wegen $\bar{\bar{J}} < \mathfrak{d}(\Phi)$ ist auch $F = \bigcap\limits_{j \in J} F_j$ ein Filterelement, wobei F wegen $\bar{\bar{F}} \geqq \mathfrak{d}(\Phi) > \aleph_0$ sicher keine endliche Menge ist. Andererseits kann aber F, wie man sich leicht überlegt, nur aus einem einzigen Element bestehen. Widerspruch. $\bar{\bar{M}} = \prod\limits_{j \in J} \mathfrak{m}_j$ muß prinzipal sein.

Beweis von Satz 5. Nicht alle Kardinalzahlen sollen prinzipal sein, $\mathfrak{t}$ sei die kleinste nicht prinzipale Kardinalzahl. $\mathfrak{t} > \aleph_0$ ist klar. In der (wohlgeordneten) Klasse $\mathfrak{K}$ aller Kardinalzahlen ist der Abschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{t}}$ nach Hilfssatz 5 mit der Menge aller prinzipalen Kardinalzahlen identisch. Nach Satz 6 und nach Satz 3 ist $\mathfrak{t}$ jedenfalls eine Kuratowskische Zahl, also sicher eine Grenzzahl. Wegen Hilfssatz 6 muß aber $\mathfrak{t}$ sogar eine Tarskische Zahl sein.

Literatur

[1] Bachmann, H.: Transfinite Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [2] Banach, S.: Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen. Fund. Math. 15, 97—101 (1930). — [3] Bourbaki, N.: Sur certains espaces vectoriels topologiques. Ann. Inst. Fourier 2, 5—16 (1950). — [4] Bourbaki, N.: Topologie générale. Chap. I—II. Actual. Sci. Industr. Nr. 858—1142, Paris 1951. — [5] Bourbaki. N.: Espaces vectoriels topologiques. Chap. III—IV—V. Actual. Sci. Industr. Nr. 1229, Paris 1955. — [6] Donoghue, W. F., u. K. T. Smith: On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 73, 321—344 (1952). — [7] Mackey, G. W.: Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. Bull. Amer. Math. Soc. 50, 719—722 (1944). — [8] Mackey, G. W.: On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 57, 155—207 (1945). — [9] Nöbeling, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — [10] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie. I. Math. Nachr. 7, 359—378 (1952). — [11] Ulam, S.: Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math. 16, 140—150 (1930).

(Eingegangen am 13. Februar 1956)

Wegel, H.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 435–462 (1956)

Axiomatische Mengenlehre ohne Elemente von Mengen

Von

Herbert Wegel in Göttingen

Einleitung

Die Axiomatisierungen der Mengenlehre bedienen sich fast ausschließlich der Element-Relation als Grundbegriff, weil sie an die Cantorsche Mengenlehre anschließen und Cantor die Vorstellung einer Zusammenfassung im Sinne einer Abstraktion als Grundlage der Mengenlehre gewählt hat.

In der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes Menge liegt jedoch kein zwingender Grund, gerade auf diese Weise eine Mengenlehre aufzubauen. Es besteht die Möglichkeit, die Zusammenlegung der Teile zu einem Ganzen als Grundvorstellung zu verwenden. Eine nach diesem Gesichtspunkt aufgestellte Theorie, in der auf die Elemente der Menge nicht Bezug genommen wird, wird sich auf die Inklusion stützen müssen. Die kleinsten, d. h. unteilbaren Teile (das sind nach Cantor die Mengen von einem Element) werden weitgehend die Aufgaben der Cantorschen Elemente übernehmen müssen.

Neben der Teiltheorie von Foradori, die die Inklusion als Grundbegriff hat, jedoch keine Mengenlehre sein will (Lit. [4] und [5])[1]), existiert von Schoenflies eine solche nicht-Cantorsche Mengenlehre auf axiomatischer Grundlage (Lit. [15, 16]). Diese Axiomatik führt aber — wie Merzbach behauptet (Lit. [12]) — zu einem Kalkül, der wünschenswerte Sätze der Mengenlehre nicht enthält.

Der Gedanke einer Mengenlehre, in der die Mengen ohne Bezugnahme auf Elemente betrachtet werden, wurde neuerdings von Th. Kaluza sen. wieder aufgegriffen. Ihm verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit. In ihr wird eine Axiomatik angegeben, die die Inklusion als Grundbegriff benutzt und in der die Relation des Elementes zur Menge nicht definierbar ist. Das Ineinanderschachteln von Mengen durch die Elementrelation wird dadurch vermieden*).

Als weiteren Grundbegriff verwende ich eine Art von Funktionen, wie es sich bei der Axiomatisierung durch J. v. Neumann (Lit. [13, 14]), als zweckmäßig erwiesen hat. Der Begriff „System", der bei Bernays (Lit. [1]) Grundbegriff ist, wird hier definiert, jedoch ist die Identifikation von Mengen und Systemen nicht möglich.

---

[1]) Mit (Lit.) werden die Schriften des Literaturverzeichnisses am Ende der Arbeit zitiert.

*) Herrn Prof. P. Bernays bin ich zu großem Dank verpflichtet für eine Anzahl wesentlicher Verbesserungsvorschläge bezüglich der Formulierung der Axiome X und XI und der Durchführung von Kapitel 2, durch die diese Arbeit erheblich klarer und einfacher geworden ist.

Die Axiomatik in dieser Arbeit ist außerordentlich schwach. Das ist ein Vorteil bezüglich der Widerspruchsfreiheit, denn aus der Widerspruchsfreiheit jedes stärkeren oder gleichstarken Systems — z. B. des Fraenkelschen — folgt die Widerspruchsfreiheit auch dieses Systems. Andererseits erfordert die Schwachheit einen ausgiebigen Nachweis der Tragweite des Axiomensystems.

Ich hoffe, durch diese Arbeit gezeigt zu haben, daß die Inklusion als Grundbegriff auch ohne Verwendung der Elementrelation zur Begründung einer genügend weittragenden Mengenlehre ausreicht.

Kapitel 1. Das Axiomensystem

Für die Axiomatik und die daraus erschlossene Theorie dieser Arbeit wird zunächst die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik 1. Stufe für zwei Sorten von Grundgegenständen ohne die Identität und mit der Hilbertschen ι-Regel verwendet. Die Unterscheidung der beiden Individuensorten wird durch Bezeichnung mit verschiedenen Symbolsorten erzielt. Beide Sorten sollen nicht leer sein. In den Axiomen wird die Verwendung von Formelvariablen vermieden, so daß die Axiome in der Terminologie von HILBERT-BERNAYS (Grundlagen der Mathematik, Bd. II, S. 381) eigentlich sind und ein System der 1. Stufe bilden.

Folgende Grundgegenstände werden durch die Axiome geprägt:

1. Mengen als Individuen. Variable Mengen werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

2. Funktionen als Individuen. Variable Funktionen werden mit kleinen griechischen Buchstaben außer π und ι oder mit indizierten oder nichtindizierten „/“ bezeichnet.

3. Die Inklusion $a \subseteq b$ als Relation zwischen zwei Mengen.

4. Ein Prädikat mit sechs Leerstellen, in dem die fünfte Leerstelle für Funktionen, die anderen für Mengen vorgesehen sind. Dies Bindeprädikat wird ohne Prädikatszeichen als Zeichenreihe $abcd\varphi e$ geschrieben.

Bezeichnungsweisen:

$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\overline{\ldots}$	non
$\rightarrow$	folgt
$\equiv$	genau dann, wenn
$Ex:$	es existiert ein x, so daß gilt:
$Vx:$	für alle x gilt:
$\iota_x(F(x))$	dasjenige x, für das $F(x)$ gilt.

Definitionen:

$a = b$	für	$a \subseteq b \wedge b \subseteq a$
$a \nsubseteq b$	für	$\overline{a \subseteq b}$
$a \neq b$	für	$\overline{a = b}$
leer (a)	für	$Vy: a \subseteq y$

$Pr(p)$ für $V y\colon (y \subseteq p \to (\mathrm{leer}(y) \vee y = p)) \wedge \overline{\mathrm{leer}(p)}$

$a\pi b$ für $a \subseteq b \wedge Pr(a)$.

Wenn die erste Unitätsformel $E x : abcd\varphi x$ (Lit. [10], I, S. 383) gilt, so schreibe ich — da die zweite durch Axiom IV stets gesichert ist — $\varphi(a, b, c, d)$ für $\iota_v(abcd\varphi v)$.

$\mathrm{Def}\,(m, \varphi, a, b, c)$ für $V x : (x \subseteq m \to E y : xabc\varphi y)$

$\mathrm{Syst}\,(n, m, a, b, c, \varphi, \psi)$ für $n \subseteq m \wedge \mathrm{Def}\,(m, \varphi, a, b, c) \wedge \mathrm{Def}\,(m, \psi, a, b, c) \wedge$
$\wedge E x : E y : (nabc\varphi x \wedge nabc\psi y \wedge x \subseteq y)$

$abc\varphi e$ für $V x : abcx\varphi e$

$ab\varphi e$ für $V y : V x : abyx\varphi e$

$a\varphi e$ für $V z : V y : V x : azyx\varphi e$

$\mathrm{Index}\,(i, /, m, a, b, c, \varphi, \psi)$ für

$$V x : [\mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, \psi) \to E y : (x/y \wedge y\pi i)] \wedge$$
$$\wedge V y : [y\pi i \to E x : (x/y \wedge \mathrm{Syst}(x, m, a, b, c, \varphi, \psi))] \wedge$$
$$\wedge V x : V y : V z : [(\mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, \psi) \wedge x/z \wedge y/z) \to x = y] \wedge$$
$$\wedge V x : V y : [(\mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, \psi) \wedge x/y \wedge Pr(x)) \to x = y].$$

Axiome:

I $(a \subseteq b \wedge b \subseteq c) \to a \subseteq c$

II $V y : (y\pi a \to y \subseteq b) \to a \subseteq b$

III $(a = f \wedge abcd\varphi e) \to fbcd\varphi e$

IV $abcd\varphi e \to (abcd\varphi f \equiv e = f)$

V $E\varphi : V x : x\varphi m$

VI $E\varphi : V x : x\varphi x$

VII $E\varphi : V x : V y : V z : V u : V v : (xyzu\psi v \equiv yxzu\varphi v)$

VIII $E\varphi : V x : V y : V z : V u : V v : (xyzu\psi v \equiv yzux\varphi v)$

IX $E\varphi : V x : V y : V z : V u : V v : (E w : E r : E s : E t : (xyzu\psi w \wedge xyzu\varkappa r \wedge$
$\wedge xyzu\lambda s \wedge xyzu\mu t \wedge wrstvv) \equiv xyzu\varphi v)$

X $E\varphi : V x : V y : E v : (xy\varphi v \wedge x \subseteq v \wedge y \subseteq v \wedge V z : ((x \subseteq z \wedge y \subseteq z) \to v \subseteq z))$

XI $E\varphi : V z : V u : V v : V w : [(\mathrm{Def}\,(z, \psi, u, v, w) \wedge \mathrm{Def}\,(z, \varkappa, u, v, w)) \to$
$\to E x : (zuvw\varphi x \wedge E/ : \mathrm{Index}\,(x, /, z, u, v, w, \psi, \varkappa))]$

XII $[V x : V y : \{(\mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, d) \wedge \mathrm{Syst}\,(y, m, a, b, c, \varphi, d)) \to$
$\to (V z : (z\pi x \to z \subsetneq y) \vee x = y)\} \wedge V x : \{\mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, d) \to$
$\to \overline{\mathrm{leer}\,(x)}\} \wedge E x : \mathrm{Syst}\,(x, m, a, b, c, \varphi, d)] \to$
$\to E x : V y : [\mathrm{Syst}\,(y, m, a, b, c, \varphi, d) \to E z : \{z\pi x \wedge z \subseteq y \wedge$
$\wedge V u : ((u\pi x \wedge u \subseteq y) \to u = z)\}]$

XIII $E x : E y : E\varphi : (x \subseteq y \wedge x \neq y \wedge V z : (z\pi y \to E u : (u\pi x \wedge u\varphi z)))$.

Ist $a \subseteq b$, so nenne ich a eine Teilmenge von b oder eine Untermenge von b, bzw. b eine Obermenge von a und sage auch: a ist in der Menge b enthalten, bzw. b enthält die Menge a. Für $a = b$ sage ich, a ist gleich b. a heißt leer, wenn leer (a) gilt. p heißt ein Prim, wenn $Pr(p)$ gilt.

Aus der Definition des leer-Prädikates folgt unmittelbar:

Satz 1. *Es gibt höchstens eine leere Menge.*

Satz 2. *Wenn eine Menge leer ist, so enthält sie kein Prim.*

Weiter ergibt sich aus Axiom I:

Satz 3. *Ist a eine Teilmenge von b, so sind alle Prime von a auch Prime von b.*

Schließlich ersieht man aus Axiom II:

Satz 4. *Für alle x gilt $x \subseteq x$.*

Satz 5. *Wenn eine Menge kein Prim enthält, so ist sie leer.*

In dem Bindeprädikat $abcd\varphi e$ nenne ich a, b, c, d die Argumente oder die unabhängigen Veränderlichen der Funktion φ, und e nenne ich den Funktionswert oder die abhängige Veränderliche der Funktion φ. Zwei, drei bzw. vier Argumente in einer bestimmten Anordnung bezeichne ich als Argumentepaar, Argumentetripel bzw. Argumentquadrupel. Außerdem sage ich: φ ordnet den Argumenten den Funktionswert zu oder liefert für die Argumente den Funktionswert.

Bei den oben definierten Prädikaten $abc\varphi e$, $ab\varphi e$ bzw. $a\varphi e$ spreche ich auch von einer Funktion mit drei, zwei bzw. einer Stelle. Die Funktion bleibt also bei dieser Herabsetzung der Stellenzahl dieselbe. Die Bindung der jeweils letzten Argumentvariablen bewirkt die Herabsetzung.

Definition 1. Eine Funktion, die jedem Argumentquadrupel denselben Funktionswert zuordnet, nenne ich eine konstante Funktion.

Definition 2. Eine Funktion, die mit einer Stelle jeder Menge x den Funktionswert x zuordnet, nenne ich eine Identität.

Definition 3. Eine Menge heißt eine Vereinigungsmenge oder eine Vereinigung von a und b, wenn sie a und b enthält und in jeder Menge enthalten ist, die a und b enthält.

Zu je zwei Mengen gibt es höchstens eine Vereinigungsmenge, weil zwei verschiedene sich nach Definition 3 gegenseitig enthalten müßten, was nicht sein kann. Aus Axiom X ergibt sich andererseits: Zu je zwei Mengen a und b existiert stets eine Vereinigung von a und b. Für die Vereinigung von a und b wird das Zeichen $a \cup b$ verwendet.

Definition 4. Ich sage: φ ist bezüglich des ersten Argumentes bei a, b, c als zweitem, drittem, viertem Argument auf m definiert, wenn Def (m, φ, a, b, c) gilt.

Definition 5. Wird das Prädikat $Ex : Ey : (nabc\varphi x \wedge nabc\psi y \wedge x \subseteq y)$ als Prädikat von n aufgefaßt, so nenne ich es eine Aussonderungseigenschaft (kurz AE) mit den Parametern a, b, c. n heißt die Aussonderungsvariable [2]).

Definition 6. Gilt Def (m, φ, a, b, c) und Def (m, ψ, a, b, c), so nenne ich die AE aus Def. 5 eine AE zu m.

Definition 7. Eine Menge m zusammen mit einer AE zur Menge m definieren ein System, das ich kurz folgendermaßen schreibe:

$$m_{\{\varphi(n,a,b,c) \subseteq \psi(n,a,b,c)\}}\,.$$

Außerdem werden Systeme auch mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Ein variables System ist ein System $m_{\{\varphi(n,a,b,c)\subseteq\psi(n,a,b,c)\}}$, bei dem die Bestimmungsstücke $m, a, b, c, \varphi, \psi$ mit der Einschränkung, daß Def $(m\ \varphi, a, b, c)$ und Def (m, ψ, a, b, c) gilt, variabel sind.

Definition 8. Eine Menge n wird ein Element aus dem System $S = m_{\{\varphi(n,a,b,c)\subseteq\psi(n,a,b,c)\}}$ genannt (in Zeichen $n \in S$), wenn n eine Teilmenge von m ist und die AE erfüllt, d. h. wenn Syst $(n, m, a, b, c, \varphi, \psi)$ gilt.

Der Begriff „System" läßt sich bei Verwendung des „Syst"-Prädikates vermeiden. Er ist jedoch zur Veranschaulichung gewissermaßen als „Gesamtheit seiner Elemente" nützlich. Daher sage ich auch: die AE sondert das System aus der Menge aus, mit der zusammen sie das System definiert.

Ein System braucht kein Element zu haben. Wenn z. B. in der AE aus Definition 5 φ und ψ konstante Funktionen mit den Funktionswerten k und l sind und $k \not\subseteq l$ ist, was nach Axiom XIII möglich ist, so hat das System

$$m_{\{\varphi(n,a,b,c)\subseteq\psi(n,a,b,c)\}}$$

kein Element. Ein System ohne Element wird leer genannt.

Definition 9. Ein System S heißt kleiner als ein System T oder ein Teilsystem von T (in Zeichen $S \Subset T$), wenn alle Elemente aus S auch Elemente aus T sind. Zwei Systeme S und T heißen gleich (in Zeichen $S = T$), wenn $S \Subset T$ und $T \Subset S$ ist.

Um Mengenlehre in befriedigendem Umfang betreiben zu können, benötigt man eine Möglichkeit, von Systemen auf Mengen zurückzukommen. Es ist naheliegend, von den Elementen eines Systems auf die Prime einer Menge überzugehen und zu definieren:

Definition 10. Wenn die AE $Ex : Ey : (nabc\varphi x \wedge nabc\psi y \wedge x \subseteq y)$ eine AE zu m ist und $E/$: Index $(i, /, m, a, b, c, \varphi, \psi)$ gilt, heißt i eine Indexmenge des Systems

$$S = m_{\{\varphi(n,a,b,c)\subseteq\psi(n,a,b,c)\}}\,,$$

und / heißt eine /-Funktion von S und i.

Aus Axiom XI folgt dann:

Satz 6. *Jedes System besitzt eine Indexmenge.*

Weil jede /-Funktion von S und einer Indexmenge von S jedem Prim von S das Prim selbst als Funktionswert zuordnet, besitzt ein System von Primen nur eine Indexmenge. Die Indexmenge eines Systems von Primen S bezeichne ich mit $\mathfrak{J}S$. Sie ist nach Axiom II eine Teilmenge der Menge, aus der S ausgesondert ist.

Jede Indexmenge des leeren Systems darf nach der Definition des Index-Prädikates kein Prim enthalten, ist also nach Satz 5 leer. Wegen Satz 1 gibt es genau eine leere Menge, die mit 0 bezeichnet wird. Für die Indexmenge des leeren Systems S wird auch $\mathfrak{J}S$ geschrieben.

Die Gleichheit ist hier nicht als logische Konstante eingeführt, sondern definiert worden. Die Gleichheit zwischen Mengen ist nach der Definition symmetrisch, nach Axiom I transitiv und nach Satz 4 reflexiv. Zwei gleiche Mengen sind wegen der Definition und der Axiome III, IV, VII, VIII in jedem Prädikat dieser Theorie an Leerstellen, die für Mengen vorgesehen sind, ohne Änderung des logischen Wertes des Prädikates durcheinander ersetzbar.

Reflexivität, Transitivität und Symmetrie der Gleichheit zwischen Systemen folgen aus der Definition 9. Sind S und T zwei gleiche Systeme, so ist jede Indexmenge von S auch eine von T; denn auch zwei gleiche Systeme sind überall in dieser Theorie ohne Änderung eines logischen Wertes durcheinander ersetzbar, weil sie das bezüglich der Element-Relation sind.

Die Aufgabe der folgenden beiden Kapitel dieser Arbeit ist nun, handliche Hilfsmittel zu entwickeln und einige wünschenswerte Sätze der Mengenlehre abzuleiten. Dabei habe ich mich in Kapitel 3 an die Arbeit (Lit. [6]) gehalten.

Die Ableitung der Grundbegriffe und einiger charakteristischer Sätze der Lehre von den endlichen, unendlichen und abzählbaren Mengen sowie der Wohlordnungstheorie, der allgemeinen Topologie und der Algebra aus diesen Axiomen ist auch möglich und ist in meiner Dissertation ausgeführt.

Kapitel 2. Konstruktive Prädikate

1) *Definition 11.* Die beiden Prädikate $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ und $\Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ heißen äquivalent bei den Parametern a, b, c in bezug auf die Menge m (in Zeichen: $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \underset{m}{\equiv} \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$), wenn

$$V x : \big(x \subseteq m \rightarrow (\Phi(x, a, b, c) \equiv \Psi(x, a, b, c))\big)$$

gilt.

Definition 12. Wenn zu dem Prädikat $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ zwei Funktionen φ und ψ existieren, so daß für alle Tripel a, b, c, die der Bedingung $A(m, a, b, c)$ genügen, $Ex : Ey : (nabc\,\varphi x \wedge nabc\,\psi y \wedge x \subseteq y)$ eine AE zu m ist und

$$\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \underset{m}{\equiv} \varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \subseteq \psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

gilt, so heißt $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, a, b, c)$.

Ein konstruktives Prädikat zur Menge m mit einer speziellen Wahl der Parameter, die der Bedingung genügt, charakterisiert vermöge der äquivalenten AE ein aus m ausgesondertes System. Ist das Prädikat zwei verschiedenen AE zu m in bezug auf m äquivalent, so sind auch die AE untereinander in bezug auf m äquivalent. Zwei in bezug auf m äquivalente AE zu m sondern aber aus m jeweils das gleiche System aus. Ein konstruktives Prädikat zu m kann also nur ein aus m ausgesondertes System charakterisieren. Dieses schreibe ich mit Hilfe des charakterisierenden konstruktiven Prädikates Φ auch folgendermaßen:

$$m_{\{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)\}}\,.$$

Ausdrücke der Form $\varphi(n, a, b, c)\, o\, \psi(n, a, b, c)$, in denen $\subseteq$, $\subsetneq$, $=$, $\neq$ für o stehen kann, sind keine eigentlichen Prädikate, weil sie nicht für alle Einsetzungen von Mengen erklärt zu sein brauchen. Häufig sind sie jedoch für die interessierenden Einsetzungen von Mengen erklärt. Wenn das der Fall ist, benutze ich im folgenden diese Ausdrücke als Abkürzungen von $Ex : Ey : (nabc\,\varphi x \wedge nabc\,\psi y \wedge xoy)$ und verwende sie wie Prädikate.

Ausdrücke der obigen Form, in denen statt $\varphi(n, a, b, c)$ bzw. $\psi(n, a, b, c)$ nur ein Argument oder eine andere, feste Menge stehen, lassen sich durch Verwendung von identischen und konstanten Funktionen auf Ausdrücke der obigen Form zurückführen.

Nach Axiom XI existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen geschrieben für je zwei Mengen m, n eine Indexmenge von

$$n_{\{m \subseteq x\}}$$

liefert. Sei χ eine solche. Dann gilt $\chi(m, n) \subseteq 0$ genau dann, wenn $m \not\subseteq n$ ist. Wendet man das Schachtelungsaxiom IX an, so ergibt sich:

Satz 7. *Unter der Bedingung, daß* Def (m, φ, a, b, c) *und* Def (m, ψ, a, b, c) *gelten, ist*

$$\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \not\subseteq \psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

konstruktiv zu m.

Nach Axiom XI existiert ebenfalls eine Funktion, die mit zwei Stellen geschrieben für je zwei Mengen m, n eine Indexmenge von

$$m_{\{x \not\subseteq n\}}$$

liefert. Sei λ eine solche. Dann gilt $\lambda(m, n) \subseteq 0$ genau dann, wenn $m \subseteq n$ ist. Wendet man Axiom IX an, so ergibt sich:

Jedes variable System

$$m_{\{\varphi(\mathfrak{n},a,b,c) \subseteq \psi(\mathfrak{n},a,b,c)\}}$$

läßt sich unter voller Erhaltung der Abhängigkeiten von m und den Parametern in der Form

$$m_{\{\mathfrak{n} a b c \mu 0\}}$$

schreiben.

2) Es ist $m \cup n = 0$ genau dann, wenn $m = 0$ und $n = 0$ ist. Durch Anwenden der Axiome X und IX beweist man daraus den Satz:

Satz 8. *Wenn* $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ *konstruktiv zu m unter der Bedingung* $A(m, a, b, c)$ *und* $\Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ *konstruktiv zu m unter der Bedingung* $B(m, a, b, c)$ *ist, so ist*

$$\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \wedge \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, a, b, c) \wedge B(m, a, b, c)$.

Ich sage dann auch: $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ ist konstruktiv zu

$$S = m_{\{\Psi(\mathfrak{n},a,b,c)\}}$$

unter der Bedingung $A(m, a, b, c) \wedge B(m, a, b, c)$ und schreibe das durch die Konjunktion charakterisierte System folgendermaßen:

$$S_{\{\Phi(\mathfrak{n},a,b,c)\}} \quad \text{oder} \quad m_{\left\{\begin{matrix}\Psi(\mathfrak{n},a,b,c)\\ \Phi(\mathfrak{n},a,b,c)\end{matrix}\right\}}.$$

Satz 9. *Wenn* $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ *konstruktiv zu m unter der Bedingung* $A(m, a, b, c)$ *ist, so ist auch* $\overline{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)}$ *konstruktiv zu m unter der Bedingung* $A(m, a, b, c)$.

Beweis. Nach 1) existiert eine Funktion φ, so daß für alle Tripel abc, die $A(m, a, b, c)$ erfüllen, $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \equiv \mathfrak{n} a b c \varphi 0$ gilt. Für dieselben Tripel abc gilt dann auch

$$\overline{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)} \equiv \varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \neq 0.$$

Nach Satz 7 ist $\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \not\subseteq 0$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, a, b, c)$, und wegen der Transitivität der Äquivalenz ist schließlich auch $\overline{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)}$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, a, b, c)$.

Satz 10. *Wenn* $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ *und* $\Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ *jeweils konstruktiv zu* m *unter der Bedingung* $A(m, a, b, c)$ *sind, dann sind auch*

$$\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \to \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

und

$$\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \vee \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

konstruktiv zu m *unter der Bedingung* $A(m, a, b, c)$.

Beweis. Nach den Sätzen 8 und 9 sind die Prädikate

$$\overline{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \wedge \overline{\Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)}} \quad \text{und} \quad \overline{\overline{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)} \wedge \overline{\Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)}},$$

die zu $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \to \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ bzw. $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c) \vee \Psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ äquivalent sind, konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, a, b, c)$.

3) **Satz 11.** *Unter der Bedingung, daß* φ *und* ψ *bei dem zweiten Argument* a, *dem dritten* b *und dem vierten* c *bezüglich der ersten Stelle auf* m *definiert sind, sind*

$$\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) = \psi(\mathfrak{n}, a, b, c) \quad \textit{und} \quad \varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \neq \psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$

konstruktiv zu m.

Beweis. Es ist

$$\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) = \psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$$
$$\equiv (\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) \subseteq \psi(\mathfrak{n}, a, b, c) \wedge \psi(\mathfrak{n}, a, b, c) \subseteq \varphi(\mathfrak{n}, a, b, c)).$$

Mit Satz 8 folgt daraus, daß $\varphi(\mathfrak{n}, a, b, c) = \psi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ konstruktiv zu m ist. Die andere Behauptung folgt dann aus Satz 9.

4) *Definition 13.* Das System $m_{\{\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}\}}$ heißt das Potenzsystem der Menge m und wird mit $\mathfrak{U}m$ bezeichnet. Es ist das System aller Teilmengen von m. Jede Indexmenge des Potenzsystems von m heißt eine Potenzmenge von m.

Nach Axiom XI existiert eine Funktion, die mit einer Stelle geschrieben jeder Menge eine ihrer Potenzmengen zuordnet.

Es ist $V p : \left(Pr(p) \equiv (V x : \overline{x \in p_{\left\{\substack{\mathfrak{n} \subsetneqq 0 \\ p \subsetneqq \mathfrak{n}}\right\}}} \wedge p \subsetneqq 0)\right)$. Nach Axiom XI existiert eine Funktion, die mit einer Stelle geschrieben der Menge p eine Indexmenge des Systems unter dem Negationszeichen als Funktionswert zuordnet. Wenn φ eine solche Funktion ist, gilt auch

$$V p : (Pr(p) \equiv (\varphi(p) \subseteq 0 \wedge p \subsetneqq 0)) \qquad \text{d. h.}$$

Satz 12. $Pr(p)$ *ist konstruktiv zu jeder Menge.*

5) *Definition 14.* Die Menge $\mathfrak{I}a_{\left\{\substack{Pr(\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n} \subseteq b}\right\}}$ heißt die Durchschnittsmenge oder der Durchschnitt von a und b und wird mit $a \cap b$ bezeichnet.

Für den Durchschnitt gilt: $a \cap b \subseteq a \wedge a \cap b \subseteq b \wedge V x : ((x \subseteq a \wedge x \subseteq b) \to \to x \subseteq a \cap b)$, wie sich aus der Definition bei Anwendung von Axiom II ergibt.

Definition 15. Zwei Mengen heißen fremd, wenn sie kein Prim gemeinsam haben.

Aus den Definitionen 14 und 15 folgt: Zwei Mengen sind genau dann fremd, wenn ihr Durchschnitt leer ist.

Nach Axiom XI existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen geschrieben jedem Paar von Mengen seinen Durchschnitt zuordnet.

Definition 16. Die Menge $\mathfrak{I}a_{\left\{\substack{Pr(\mathfrak{n})\\ \mathfrak{n}\subseteq b}\right\}}$ heißt die Differenz von a und b und wird mit $a - b$ bezeichnet. Wie beim Durchschnitt existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen geschrieben je zwei Mengen ihre Differenz zuordnet.

Definition 17. Ist $b \subsetneq a$, so heißt $a - b$ auch das Komplement von b bezüglich a und wird ${}^a\bar{b}$ geschrieben. Durch mehrfache Anwendung von Axiom II ergibt sich für das Komplement:

$${}^a\bar{b} \subsetneq a \wedge b \cup {}^a\bar{b} = a \wedge b \cap {}^a\bar{b} = 0.$$

6) Satz 13: *Sei $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ konstruktiv zu S unter der Bedingung $A(d, a, b, c)$. Dann ist $E y : (y \in S \wedge \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c))$, wofür ich auch*

$$E_{y \in S} \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c)$$

schreibe, konstruktiv zu m unter der Bedingung, daß für alle Teilmengen x von m $A(d, x, b, c)$ gilt.

Beweis: Nach Axiom XI existiert eine Funktion, die für alle Argumentquadrupel $dabc$, die $A(d, a, b, c)$ erfüllen, je einen Funktionswert liefert, der Indexmenge des Systems

$$S_{\{\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)\}}$$

ist. Nach Axiom VII existiert eine Funktion, die denselben Argumenten in der Reihenfolge $adbc$ denselben Funktionswert zuordnet. Wenn ϱ eine solche Funktion ist, so ist $\varrho(\mathfrak{a}, d, b, c) \neq 0$ äquivalent bezüglich m zu $E_{y \in S} \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c)$, falls für alle Teilmengen a von m $A(d, a, b, c)$ gilt. Wegen Satz 7 folgt daraus die Behauptung.

Satz 14. *Sei $\Phi(\mathfrak{n}, a, b, c)$ konstruktiv zu S unter der Bedingung $A(d, a, b, c)$. Dann ist $V y : (y \in S \rightarrow \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c))$, wofür ich auch*

$$V_{y \in S} \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c)$$

schreibe, konstruktiv zu m unter der Bedingung, daß für alle Teilmengen x von m $A(d, x, b, c)$ gilt.

Beweis. Es gilt $V_{y \in S} \Phi(y, \mathfrak{a}, b, c) \equiv \overline{E_{y \in S} \overline{\Phi(y, \mathfrak{a}, b, c)}}$, und das rechte Prädikat ist nach den Sätzen 9 und 13 konstruktiv zu m unter der Bedingung, daß für alle Teilmengen x von m $A(d, x, b, c)$ gilt.

In Satz 13 und Satz 14 tritt $y \in S$ auf. Statt dessen schreibe ich für $y \in m_{\{Pr(\mathfrak{x})\}}$ auch $y \,\pi\, m$ und für $y \in \mathfrak{U} m$ auch $y \subsetneq m$.

7) *Definition 18.* $A(d, b, c)$ bedeute folgendes:

a) $\mathfrak{n} b c \varrho 0$ ist eine AE zu d,

b) die Funktion χ ist mit drei Stellen, bei bc als letzten Argumenten, bezüglich ihres ersten Argumentes auf d definiert,

c) aus $y \in S = d_{\{\mathfrak{n} b c \varrho 0\}}$ folgt $\chi(y, b, c) \subsetneq m$.

Nach Satz 13 ist $E_{y \in S} \mathfrak{a} = \chi(y, b, c)$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(d, b, c)$, und ich schreibe das System

$$m_{\{E_{y \in S} \mathfrak{a} = \chi(y, b, c)\}}$$

auch kurz folgendermaßen

8) *Definition 19.* Für alle Tripel mab, für die $\mathfrak{n}ab\varphi 0$ eine AE zu m ist, kann man das System $S = m_{\{\mathfrak{n}ab\varphi 0\}}$ und dazu das System

$$\mathfrak{S}\, S = m_{\left\{\begin{smallmatrix} E_{y \in S}\, \mathfrak{n} \subseteq y \\ Pr(\mathfrak{n}) \end{smallmatrix}\right\}},$$

das System aller Prime, die in mindestens einer Menge aus S enthalten sind, bilden. Es heißt das Vereinigungssystem des Systems S. $\mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S$ heißt die Vereinigungsmenge oder die Vereinigung von S.

9) *Definition 20.* Ein System, für dessen Elemente als Argumente einer bestimmten Stelle bei einer festen Besetzung der restlichen Stellen eine Funktion φ Funktionswerte liefert, heißt ein Definitionsbereich der Funktion für die bestimmte Stelle bei dieser Besetzung der restlichen Stellen.

Definition 21. Eine Funktion φ heißt ein-eindeutig bezüglich der ersten Stelle bei den weiteren Argumenten abc auf S, wenn bei dieser Besetzung der restlichen Stellen das System S Definitionsbereich von φ für die erste Stelle ist und aus $x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y$ die Beziehung $\varphi(x, a, b, c) \neq \varphi(y, a, b, c)$ folgt.

Definition 22. $A(m\ b)$ bedeute folgendes:

a) $\mathfrak{n} b \varphi 0$ ist eine AE zu m und

b) die Funktion χ mit zwei Stellen ist bezüglich der ersten Stelle — bei dem zweiten Argument b — auf $S = m_{\{\mathfrak{n} b \varphi 0\}}$ eineindeutig und auf m definiert. Es existiert eine Funktion, die allen Argumentetripeln amb, in denen m, b das Prädikat $A(m, b)$ erfüllen, jeweils den Funktionswert

$$\mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S_{\{a = \chi(\mathfrak{n}, b)\}}\ ^{3})$$

zuordnet. Eine solche Funktion heißt eine Umkehrfunktion von χ.

Das in der Definition 22 aus S ausgesonderte System besitzt höchstens ein Element, nämlich die wegen der Ein-eindeutigkeit von χ höchstens eine beim zweiten Argument b zum Funktionswert a gehörige erste Argumentmenge $\mathfrak{n}$. Die übrigen Operationen dienen dazu, aus dem System mit höchstens einem Element das Element selbst zu erhalten.

Eine Umkehrfunktion χ^{-1} von χ liefert mit drei Stellen für jedes Tripel amb aus Definition 22 ein Element aus S oder die leere Menge als Funktionswert.

Insbesondere, wenn φ und χ mit je einer Stelle auf m definiert sind und χ auf $m_{\{\mathfrak{n}\varphi 0\}}$ ein-eindeutig ist, dann existiert eine Umkehrfunktion von χ, die, mit einer Stelle geschrieben, allen Mengen a jeweils den Funktionswert

$$\mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S_{\{a = \chi(\mathfrak{n})\}}$$

zuordnet.

10) Satz 15. *Es existiert eine Funktion χ, die mit drei Stellen geschrieben für alle Tripel abc, für die die Funktionen φ und ψ Funktionswerte liefern und die Prädikate $\Phi(a, b, c)$ und $\Psi(a, b, c)$ je einer AE mit den Parametern a, b, c äquivalent sind und einander ausschließen, jeweils den Funktionswert*

$$\varphi(a, b, c),\ \textit{wenn}\ \Phi(a, b, c)\ \textit{wahr ist, und}$$

$$\psi(a, b, c),\ \textit{wenn}\ \Psi(a, b, c)\ \textit{wahr ist, liefert.}$$

---

[3]) Die AE gehört immer zu dem am weitesten rechts stehenden System, also hier zu S.

Beweis. Nach den Axiomen X und IX existiert eine Funktion, die mit drei Stellen geschrieben allen besagten Tripeln den zugehörigen Funktionswert $\varphi(a, b, c) \cup \psi(a, b, c)$ zuordnet. Sei λ eine solche. Dann existiert wegen Satz 10 eine Funktion, die mit drei Stellen geschrieben allen besagten Tripeln abc jeweils den Funktionswert

$$\lambda(a, b, c)_{\left\{\begin{matrix}\Phi(a,b,c)\to\mathfrak{n}=\varphi(a,b,c)\\ \Psi(a,b,c)\to\mathfrak{n}=\psi(a,b,c)\end{matrix}\right\}}$$

zuordnet. Die Existenz einer solchen Funktion wurde behauptet.

11) *Definition 23.* Sei $\Phi(\mathfrak{n}, b, c)$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, b, c)$. Für alle Tripel mbc, die $A(m, b, c)$ erfüllen, kann man das System $S = m_{\{\Phi(\mathfrak{n}, b, c)\}}$ und dazu nach Satz 14 das System

$$\mathfrak{D}\, S = m_{\left\{\begin{matrix}V_{y \in S}\, \mathfrak{n} \subseteq y\\ Pr(\mathfrak{n})\end{matrix}\right\}}$$

bilden. Das ist das System aller Prime, die in allen Mengen aus S enthalten sind, wenn S nicht leer ist, und das System aller Prime von m, wenn S leer ist. Es heißt das Durchschnittssystem des Systems S, und $\mathfrak{J}\,\mathfrak{D}\, S$ heißt die Durchschnittsmenge oder der Durchschnitt von S.

12) *Definition 24.* Sei $\Phi(\mathfrak{n}, b, c)$ konstruktiv zu m unter der Bedingung $A(m, b, c)$. Wenn das Tripel mbc $A(m, b, c)$ erfüllt und

$$S = m_{\{\Phi(\mathfrak{n}, b, c)\}}$$

nicht leer ist, ist

$$\mathfrak{P}\, S = (\mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S)_{\{V_{y \in S}\, Pr(\mathfrak{n} \cap y)\}}$$

das System der Teilmengen von $\mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S$, die mit allen Mengen aus S genau ein Prim gemeinsam haben. Diese Mengen heißen Auswahlmengen von S. $\mathfrak{P}\, S$ heißt das Produktsystem von S, und eine Indexmenge von $\mathfrak{P}\, S$ heißt eine Produktmenge oder ein Produkt von S.

Definition 25. Nach Axiom X existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen geschrieben zwei Mengen a, b den Funktionswert $a \cup b$ zuordnet. Sei χ eine solche. Dann heißt

$$a \times b = \chi(a, b)_{\left\{\begin{matrix}Pr(\mathfrak{n} \cap a)\\ Pr(\mathfrak{n} \cap b)\end{matrix}\right\}}$$

das Produktsystem von a und b. Jede Indexmenge dieses Systems heißt eine Produktmenge oder ein Produkt von a und b.

Sind a und b fremd, so ist $a \times b$ das System der Mengen mit genau zwei Primen (kurz Paare genannt), die je ein Prim von a und b enthalten.

13) *Definition 26.* Wenn S nicht leer ist und $S_{\{V_{y \in S}\, \mathfrak{n} \subseteq y\}}$ bzw. $S_{\{V_{y \in S}\, y \subseteq \mathfrak{n}\}}$ Elemente besitzen, so nenne ich $\mathrm{Kl}\, S = \mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S_{\{V_{y \in S}\, \mathfrak{n} \subseteq y\}}$ das kleinste Element von S bzw. $\mathrm{Gr}\, S = \mathfrak{J}\,\mathfrak{S}\, S_{\{V_{y \in S}\, y \subseteq \mathfrak{n}\}}$ das größte Element von S.

Nicht jedes System besitzt ein kleinstes und nicht jedes ein größtes Element. Zum Beispiel ein System, das genau zwei Prime als Elemente hat, besitzt weder ein kleinstes noch ein größtes Element, während $\mathfrak{U}\, m$ sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element hat, nämlich 0 und m.

Definition 27. Sei S aus m ausgesondert und sei $S_1 = m_{\{V_{y \in S}\, \mathfrak{n} \subseteq y\}}$ und $S_2 = m_{\{V_{y \in S}\, y \subseteq \mathfrak{n}\}}$. Dann heißt $\underline{\mathrm{fin}}\, S = \mathrm{Gr}\, S_1$ die untere Grenze des Systems S und $\overline{\mathrm{fin}}\, S = \mathrm{Kl}\, S_2$ die obere Grenze des Systems S.

S_1 und S_2 enthalten Elemente. Es ist nämlich jedenfalls $0 \in S_1$ und $m \in S_2$.

Aus den Definitionen 26 und 27 ergibt sich folgender Satz:

Satz 16. *Wenn ein System ein kleinstes (größtes) Element besitzt, so ist dieses Element die untere (obere) Grenze des Systems.*

Satz 17. *Jedes System besitzt eine obere und eine untere Grenze, und es ist* $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}S = \overline{\mathrm{fin}}\, S$ *und* $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S = \underline{\mathrm{fin}}\, S$.

Beweis. a) Zunächst wird vorausgesetzt, daß S nicht leer ist. Für alle Mengen x aus S_2 gilt: x enthält alle Mengen aus S als Teilmengen. Also enthält x auch alle Prime z, die in mindestens einer Menge aus S enthalten sind, und damit nach Axiom II auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}S$. Ferner ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}S$ selbst eine Menge aus S_2, weil sie mit allen Primen, die in mindestens einer Menge aus S enthalten sind, alle Elemente aus S als Teilmengen enthält. Aus diesen beiden Feststellungen folgt:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{S}S = \mathrm{Kl}\, S_2 = \overline{\mathrm{fin}}\, S.$$

b) S sei nicht leer. Dann gilt für alle Mengen x aus S_1: x ist in allen Mengen aus S enthalten, folglich auch in $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S$; denn wäre x nicht in $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S$ enthalten, so müßte x ein Prim enthalten, das nicht in $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S$ enthalten ist. Dieses Prim könnte dann aber auch nicht Teil aller Mengen aus S sein. Also gäbe es ein Element aus S, in dem dieses Prim und damit auch x nicht enthalten wäre. Das ist ein Widerspruch. Andererseits ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S$ selbst eine Menge aus S_1; denn die Menge mit den Primen, die in allen Mengen aus S enthalten sind, ist Teilmenge aller Mengen aus S. Aus diesen beiden Feststellungen folgt:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{D}S = \mathrm{Gr}\, S_1 = \underline{\mathrm{fin}}\, S.$$

c) Für den Fall, daß S leer ist, gilt:

$$\overline{\mathrm{fin}}\, S = 0 \qquad \mathfrak{Z}\mathfrak{S}S = 0$$
$$\underline{\mathrm{fin}}\, S = m \qquad \mathfrak{Z}\mathfrak{D}S = m,$$

wenn S aus m ausgesondert ist. Der Satz ist also auch dann richtig.

14) Satz 18. *Für je drei Mengen* a, b, c *gilt*

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Beweis. Aus der Formel nach Definition 14 folgt unmittelbar:

$$(1) \qquad V x : (x\,\pi\, a \cap b \equiv (x\,\pi\, a \wedge x\,\pi\, b)).$$

Außerdem gilt die entsprechende Formel:

$$(2) \qquad V x : (x\,\pi\, a \cup b \equiv (x\,\pi\, a \vee x\,\pi\, b));$$

denn mit nach links gerichtetem Implikationspfeil folgt sie aus der Definition 3 und mit nach rechts gerichtetem folgendermaßen:

Es ist $a \cup b = \overline{\mathrm{fin}}\, S$ bei $S = (a \cup b)_{\{x = a \vee x = b\}}$, weil die Definitionen übereinstimmen. Ferner war in Satz 17 $\overline{\mathrm{fin}}\, S = \mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ bewiesen. Also ist

$$a \cup b = \mathfrak{J}\mathfrak{S}S = \mathfrak{J}(a \cup b)_{\left\{\begin{smallmatrix} Pr(x) \\ E_{y \in S}\, x \subseteq y \end{smallmatrix}\right\}},$$

woraus

$$V x : (x \,\pi\, a \cup b \rightarrow (x \,\pi\, a \vee x \,\pi\, b))$$

folgt.

Mit (1) und (2) läßt sich nun der Beweis führen. Es ist:

$$V x : \big(x \,\pi\, a \cap (b \cup c) \equiv (x \,\pi\, a \wedge (x \,\pi\, b \vee x \,\pi\, c))\big)$$

$$V x : \big((x \,\pi\, a \wedge (x \,\pi\, b \vee x \,\pi\, c)) \equiv ((x \,\pi\, a \wedge x \,\pi\, b) \vee (x \,\pi\, a \wedge x \,\pi\, c))\big)$$

$$V x : \big(((x \,\pi\, a \wedge x \,\pi\, b) \vee (x \,\pi\, a \wedge x \,\pi\, c)) \equiv x \,\pi\, (a \cap b) \cup (a \cap c)\big),$$

woraus sich

$$V x : (x \,\pi\, a \cap (b \cup c) \equiv x \,\pi\, (a \cap b) \cup (a \cap c))$$

ergibt, was nach Axiom II $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ bedeutet.

Satz 19. *Die Mengen verhalten sich bezüglich der Inklusion als Teilordnungsrelation wie die Elemente eines atomistischen, verallgemeinerten Booleschen Verbandes* (Lit. [11], S. 16).

Beweis. Die Inklusion liefert eine Teilordnung der Mengen, die die Verbandsrelationen $\cup$ und $\cap$ induziert. Es existiert ein Nullelement, nämlich die leere Menge. Die Distributivität gilt wegen Satz 18. Die relative Komplementarität folgt aus der Folgerung nach Definition 17. Wenn man schließlich das Wort „Prim“ durch „Atomelement“ ersetzt, sieht man, daß die Mengen sich wie die Elemente eines atomistischen Verbandes verhalten.

Kapitel 3. Äquivalenztheorie

15) *Definition 28.*

a) Seien m und n fremd.

b) Sei λ eine Funktion, die mit zwei Stellen für m, n eine Indexmenge von $\mathfrak{U}(m \cup n)$ als Funktionswert liefert.

c) Sei $/_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ eine $/$-Funktion von $\mathfrak{U}(m \cup n)$ und $\lambda(m, n)$.

d) Sei $/^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ eine Umkehrfunktion von $/_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$.

e) Sei φ eine Funktion, die mit zwei Stellen für $x y$ mit $x \subseteq l = \mathfrak{J}/_{\mathfrak{U}(m \cup n)}(m \times n)$ und $y \,\pi\, m \cup n$ den Funktionswert

$$\varphi(x, y) = \mathfrak{J}x_{\left\{\begin{smallmatrix} Pr(z) \\ y \subseteq /^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}(z) \end{smallmatrix}\right\}}$$

liefert. Das ist die Indexmenge des Systems der Prime z von x, deren mittels $/^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ als Funktionswerte zugeordnete Paare aus $m \times n$ die Menge y enthalten.

Dann ist

$$A' = l_{\{V_{y \,\pi\, m \cup n}\, Pr(\varphi(x, y))\}}$$

— wenn m und n konstante Mengen, d. h. Funktionswerte konstanter Funktionen sind — das System der Teilmengen x von l, für die $\varphi(x, y)$ für alle y mit $y \,\pi\, m \cup n$ genau ein Prim enthält, d. h. Teilmengen x, in denen es für alle y mit $y \,\pi\, m \cup n$ genau ein Prim gibt, dessen mittels $/^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar das Prim y enthält. m und n heißen äquivalent (in Zeichen $m \sim n$), wenn A' ein Element enthält, d. h. wenn eine Indexmenge von A' existiert, die nicht leer ist.

Satz 20. *Zwei fremde Mengen m und n sind dann und nur dann äquivalent, wenn ein System A existiert mit den Eigenschaften:*

$$\text{(I)} \quad A \in m \times n$$

$$\text{(II)} \quad V_{x \in A} V_{y \in A} (x \cap y = 0 \vee x = y)$$

$$\text{(III)} \quad m \cup n = \mathfrak{J}\mathfrak{S}A.$$

Ein System mit den Eigenschaften (I),(II), (III) nenne ich ein *Abbildungssystem von m und n.*

Beweis. Genugsamkeit: Man betrachte

$$B = /_{\mathfrak{U}(m \cup n)}(A).$$

Dieses ist wegen (I) das System der Prime der Teilmenge $\mathfrak{J}B$ von l, die wegen (I), (II), (III) Element von A' ist. Wegen (I) und (III) gibt es für alle y mit $y \,\pi\, m \cup n$ ein Prim in B, dessen mittels $/^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar aus A das Prim y enthält, und wegen (II) gibt es genau ein solches Prim. Infolgedessen enthält A' ein Element.

Notwendigkeit: A' enthalte ein Element. Sei a' ein Element von A', dann ist bei $A'' = a'_{\{Pr(x)\}}$

$$A = /^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}(A'')$$

ein Abbildungssystem; denn (I) ist erfüllt, weil a' Teilmenge von l ist, (II) und (III) sind erfüllt, weil a' für alle y mit $y \,\pi\, m \cup n$ genau ein Prim hat, dessen mittels $/^{-1}_{\mathfrak{U}(m \cup n)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar das Prim y enthält.

16) Später wird ein Abbildungssystem gebraucht werden, das von m und n abhängt und in dessen AE die Funktionen sich nicht mit m und n ändern, wenn m und n die Elemente je eines Systems durchlaufen. Um die Existenz eines solchen Abbildungssystems nachzuweisen, müssen die Überlegungen aus 15) jetzt etwas verallgemeinert werden.

Satz 21. *Es seien zwei Systeme S und T gegeben, bei denen jede Menge aus S zu jeder aus T fremd ist. x und y seien zwei Mengen aus je einem der beiden Systeme. Sei*

$$\mathfrak{J}\mathfrak{S}S = s \quad \textit{und} \quad \mathfrak{J}\mathfrak{S}T = t$$

und r eine Indexmenge von $\mathfrak{U}(s \cup t)$.

Sei $/_{\mathfrak{U}(s \cup t)}$ eine $/$-Funktion von $\mathfrak{U}(s \cup t)$ und r und $/^{-1}_{\mathfrak{U}(s \cup t)}$ eine Umkehrfunktion von $/_{\mathfrak{U}(s \cup t)}$.

Sei ψ eine Funktion, die mit zwei Stellen für $u\,v$ mit $u \subseteq p = \mathfrak{J}/_{\mathfrak{U}(s \cup t)}(s \times t)$ und $v \,\pi\, s \cup t$ den Funktionswert

$$\psi(u, v) = \mathfrak{J}u_{\left\{ Pr(x) \atop v \subseteq /^{-1}_{\mathfrak{U}(s \cup t)}(x) \right\}}$$

liefert. Das ist die Indexmenge des Systems der Prime von u, deren mittels $/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(s\cup t)}$ als Funktionswerte zugeordnete Paare aus $s\times t$ die Menge v enthalten. Sei schließlich

$$q=\mathfrak{Z}/_{\mathfrak{u}(s\cup t)}(y\times z)$$

und, wenn λ eine Funktion ist, die mit zwei Stellen für yz den Funktionswert q liefert,

$$B'=\lambda(y,z)_{\{V_{v\pi y\cup z}Pr(\psi(u,v))\}}$$

das System der Teilmengen u von q, in denen es für alle Prime v mit $v\,\pi\,y\cup z$ genau ein Prim gibt, dessen mittels $/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(s\cup t)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar das Prim v enthält. Dann existiert eine Funktion β, die mit zwei Stellen für yz eine Indexmenge von B' als Funktionswert liefert, so daß y und z genau dann äquivalent sind, wenn $\beta(y,z)\neq 0$ ist.

Beweis. Genugsamkeit: Wenn $\beta(y,z)\neq 0$ ist, so enthält B' ein Element. Wenn u ein solches ist, setze ich:

$$\begin{aligned} U&=u_{\{Pr(x)\}}\\ U'&=/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(s\cup t)}(U)\\ U''&=/_{\mathfrak{u}(y\cup z)}(U'). \end{aligned}$$

$\mathfrak{Z}U''$ ist dann ein Element aus A'. U' enthält nämlich für alle Prime v von $y\cup z$ genau ein Element, das das Prim v als Teilmenge hat. Man ersetze in der Definitionsgleichung von U' U durch $q_{\{Pr(x)\}}$. U' wird dadurch wegen $u\subseteq q$ nicht kleiner. Es entsteht das System $y\times z$. Also ist $U'\in y\times z$. Damit gilt: In U'' gibt es für alle solche v genau ein Prim, dessen mittels $/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(y\cup z)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar — das folglich in U' liegt — das Prim v enthält. Ferner ist, weil U'' ein System von Primen ist, $\mathfrak{Z}U''\subseteq\mathfrak{Z}/_{\mathfrak{u}(y\cup z)}(y\times z)$. Diese beiden Aussagen sind aber gerade die Bedingungen für die Elemente von A'. Also enthält A' ein Element, und y und z sind äquivalent.

Notwendigkeit: Zum Beweis der Notwendigkeit brauchen wir nur den Gedankengang für den Beweis der Genugsamkeit rückwärts zu durchlaufen. Es habe A' ein Element k. Sei:

$$\begin{aligned} K&=k_{\{Pr(w)\}}\\ K'&=/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(y\cup z)}(K)\\ K''&=/_{\mathfrak{u}(s\cup t)}(K'). \end{aligned}$$

Die Behauptung: $\mathfrak{Z}K''$ ist ein Element von B', läßt sich entsprechend dem ersten Teil des Beweises so beweisen, daß zunächst die Eigenschaften von K' angegeben werden. Wegen $k\in A'$ gibt es in K' zu allen Primen von $y\cup z$ genau ein Element, das dieses Prim enthält. Wegen $K'\in s\times t$ gibt es zu allen Elementen aus K' als Argumente der Funktion $/_{\mathfrak{u}(s\cup t)}$ mit einer Stelle einen Funktionswert. Die obige Eigenschaft von K' überträgt sich auf die folgende von K''. In K'' gibt es zu allen Primen von $y\cup z$ genau ein Element, dessen mittels $/\overset{-1}{\mathfrak{u}}_{(s\cup t)}$ als Funktionswert zugeordnetes Paar — das in K' liegt — dieses Prim enthält. Ferner ist $\mathfrak{Z}K''\subseteq q$, weil, wenn in der Definitionsgleichung von K'' an die Stelle von K' das System $y\times z$ gesetzt wird, zu K''

evtl. Elemente hinzukommen, jedenfalls keine verlorengehen. Die beiden Aussagen sind aber gleichbedeutend mit $\mathfrak{Z} K'' \in B'$. Also enthält B' ein Element. Dann ist $\beta(y, z) \neq 0$.

Ergänzung zu Satz 21:

Sei $C = \mathfrak{U} r$,

sei c eine Indexmenge von C,

sei $/_C$ eine $/$-Funktion von C und c

und sei $b' = \mathfrak{Z} /_C (B')$.

Dies ist möglich, weil alle Elemente u von B' Teilmengen von r sind und daher $B' \in \mathfrak{U} r = C$ ist. B' hat genau dann mindestens ein Element, wenn b' nicht leer ist. Außerdem existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen für alle yz mit $y \in S$ und $z \in T$ den Funktionswert b' liefert. Diese Funktion existiert zunächst unter Voraussetzung der diversen in 15) und 16) über Indexmengen und Funktionen gemachten Annahmen. Da aber in allen Fällen die Existenz der Indexmengen bzw. Funktionen gesichert ist, existiert die letztgenannte Funktion, wenn S und T Systeme sind, in denen jede Menge aus S zu jeder aus T fremd ist. Sei β' eine solche Funktion.

Hier tritt nun als Vorteil auf, daß alle $\beta'(y, z)$ für $y \in S$ und $z \in T$ Teilmengen von c sind. Sei S aus s' und T aus t' ausgesondert. Dann ist $\beta'(y, z)$ nicht notwendig bezüglich y auf s' und bezüglich z auf t' definiert. Aber man kann S und T auch aus s und t mit denselben AEen aussondern, und $\beta'(y, z)$ ist bezüglich y auf s und bezüglich z auf t definiert. Daher läßt sich

$$D = c_{\{E_{y \in S} E_{z \in T}\, \mathrm{x} = \beta'(y, z)\}},$$

das System aller $\beta'(y, z)$ mit $y \in S$ und $z \in T$ bilden.

$$D' = D_{\{\mathrm{x} \neq 0\}}$$

ist dann ein System, das die leere Menge nicht enthält. Außerdem sind die Elemente von D' untereinander fremd, weil die B' keine Elemente gemeinsam haben. Also existiert nach dem Auswahlaxiom, falls D' nicht leer ist, eine Menge d, die mit allen Elementen von D' genau ein Prim gemeinsam hat. Wenn D' nicht leer ist, d eine solche Auswahlmenge ist und wenn $\beta'(y, z) \neq 0$ ist, dann ist

$$B'' = \left(/_C^{-1}(\beta'(y, z) \cap d)\right)_{\{Pr(\mathrm{x})\}}$$

das System der Prime eines Elementes u von B'. Hieraus folgt, wie im Beweis für die Notwendigkeit zu Satz 20, daß

$$A = /_{\mathfrak{U}(s \cup t)}^{-1}(B'')$$

ein Abbildungssystem von y und z ist. Benutzt man für die Definition von B'' statt $\beta'(y, z) \cap d$ eine Funktion, die mit zwei Stellen für yz den Funktionswert

$$\begin{array}{ll} \beta'(y, z) \cap d & \text{für} \quad \beta'(y, z) \neq 0 \\ /_C(0) & \text{für} \quad \beta'(y, z) = 0 \end{array}$$

liefert (eine solche Funktion existiert nach Satz 15), dann ist A ein System, das für $\beta'(y, z) \neq 0$ nach wie vor ein Abbildungssystem von y und z ist und das sonst leer ist.

Ergebnis: Es seien zwei Systeme S und T gegeben, bei denen jede Menge aus S zu jeder aus T fremd ist. Dann existiert ein System, in dessen AE die Funktionen nicht von y und z abhängen, deren AE jedoch die Parameter y und z hat, und das für $y \sim z$ ein Abbildungssystem von y und z und sonst leer ist.

17) *Definition 29.* Eine Funktion heißt bezüglich einer Stelle bei einer Besetzung der restlichen Stellen eine Abbildung von S auf T, wenn sie bezüglich dieser Stelle bei der besagten Besetzung der restlichen Stellen auf S ein-eindeutig ist (Definition 21), wenn die Funktion für alle Elemente aus S als Argumentwerte dieser Stelle bei der besagten Besetzung der restlichen Stellen je ein Element aus T als Funktionswert liefert und wenn zu allen Elementen aus T je ein Element aus S existiert, dem die Funktion als Argument dieser Stelle bei der besagten Besetzung der restlichen Stellen das Element aus T als Funktionswert zuordnet.

Satz 22. *Zwei fremde Mengen m und n sind dann und nur dann äquivalent, wenn eine Funktion existiert, die mit einer Stelle eine Abbildung der Prime von m auf die Prime von n ist.*

Beweis. Notwendigkeit: Wenn die Mengen m und n äquivalent sind, existiert nach Satz 20 ein Abbildungssystem A von m und n. Weiter existiert eine Funktion α, die mit einer Stelle für x den Funktionswert

(1) $$\alpha(x) = \mathfrak{Z}(m \cup n)_{\left\{\begin{smallmatrix} E_{y \in A}\, z = y - x \\ Pr(z) \end{smallmatrix}\right\}}$$

liefert. Ist x ein Prim von m oder n, so existiert, weil nach (III) $\mathfrak{Z} \mathfrak{S} A$ alle Prime von m und n enthält, ein Element y aus A, in dem x gelegen ist, und wegen $y \cap v = 0$ für alle $v \in A$ mit $v \neq y$ nach (II) auch nur ein solches y. z ist das andere Prim des Paares, das x enthält. Wenn α eine solche Funktion ist, so ordnet sie allen Primen von m je ein Prim von n und allen Primen von n je ein Prim von m zu. Ferner ist bei $x \subseteq y \in A : y - (y - x) = x$ und damit für $x \,\pi\, m \cup n : \alpha(\alpha(x)) = x$. Dafür sage ich: α ist involutorisch. Folglich ist α eine ein-eindeutige Funktion der Prime von m, und zu allen Primen von n gibt es je ein Prim von m, dessen Funktionswert das Prim von n ist. Eine solche Funktion α werde ich in Zukunft eine α-Funktion von m und n nennen.

Genugsamkeit. Sei β eine Abbildung der Prime von m auf die von n[4]. Dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für x den Funktionswert

$(x \cap m)$	für	$x \cap m \,\pi\, m$
h	sonst	(wobei h ein Prim von m ist)

liefert. Man bilde mit einer solchen Funktion γ:

(2) $$A = m \times n_{\{\beta(\gamma(x)) \subseteq x\}}.$$

Es ist das System von den Paaren, die mit einem Prim von m auch das mit β ein-eindeutig zugeordnete Prim von n enthalten. Die drei Eigenschaften des

[4]) Wenn ich nur von einer Abbildung ohne Erwähnung der Stellen spreche, so soll die Funktion mit einer Stelle eine Abbildung sein.

Abbildungssystems von m und n sind für dieses System erfüllt. Wegen der Ein-eindeutigkeit von β ist (II) erfüllt, und, weil alle Prime von n als Funktionswerte der Funktion β zu Argumenten aus $m_{\{Pr(x)\}}$ vorkommen, ist (III) erfüllt.

Ergänzung zu Satz 22.

a) Seien S und T zwei Systeme, bei denen jede Menge aus S zu jeder Menge aus T fremd ist.

b) Seien φ und ψ zwei Funktionen, die mit einer Stelle für s Funktionswerte liefern, die Elemente von S bzw. T sind. Dann existiert nach dem Ergebnis aus 16) ein System mit den dort genannten Eigenschaften. Wenn A ein solches System ist, existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen für alle xs mit $x \,\pi\, \varphi(s) \cup \psi(s)$ und s, die b) erfüllen, den Funktionswert

$$\mathfrak{J}(\varphi(s) \cup \psi(s))_{\left\{\begin{smallmatrix} E_{y \in A}\, z = y - x \\ Pr(z) \end{smallmatrix}\right\}}$$

liefert. Das ist eine Funktion, die für $\varphi(s) \sim \psi(s)$ bei dem zweiten Argument s bezüglich der ersten Stelle eine Abbildung der Prime von $\varphi(s)$ auf die von $\psi(s)$ ist.

18) Satz 23. *Wenn zwei fremde Mengen m und n äquivalent sind, existiert eine Abbildung der Teilmengen von m auf die Teilmengen von n, so daß zusammengehörige Teilmengen von m und n einander äquivalent sind.*

Beweis. Sei α eine α-Funktion von m und n. In (1) aus Satz 22 ist das aus $m \cup n$ ausgesonderte System ein System von Primen von n, wenn $x \subseteq m$ ist, und von m, wenn $x \subseteq n$ gilt. Der $\mathfrak{J}$-Operator macht daraus eine Teilmenge von n bzw. m. Allen Teilmengen von m ordnet α mit einer Stelle also eindeutig eine Teilmenge von n und allen Teilmengen von n eine Teilmenge von m zu. Ferner erhält α die Teilmengenrelation; denn es gilt für alle x und alle x', die beide Teilmengen von m sind, $x' \subseteq x \to \alpha(x') \subseteq \alpha(x)$, wie man aus der AE in (1) ersieht. Entsprechendes gilt für n statt m. Daher werden die Prime von x genau auf die Prime von $\alpha(x)$ abgebildet (das bedeutet $x \sim \alpha(x)$), und diese gehen bei nochmaliger Abbildung genau in die Prime von $\alpha(\alpha(x))$ über. Da aber α auf den Primen involutorisch ist (s. Beweis zu Satz 22), sind diese Prime wieder genau die von x. Also gilt $\alpha(\alpha(x)) = x$ für alle Teilmengen x von m bzw. n. Folglich ist α mit einer Stelle eine Abbildung der Teilmengen von m auf die von n. Außerdem war $x \sim \alpha(x)$. Da eine α-Funktion nach Satz 22 existiert, ist der Satz damit bewiesen.

19) Satz 24. *Sind φ und ψ zwei Abbildungen: von R auf S die eine und von S auf T die andere, so ist jede Funktion χ, die mit einer Stelle für alle x mit $x \in R$ jeweils den Funktionswert*

$$\chi(x) = \psi(\varphi(x))$$

liefert, eine Abbildung von R auf T.

Beweis. Die Funktion χ ordnet allen Elementen von R ein-eindeutig je ein Element aus T zu — als ein-eindeutige Funktion eines Funktionswertes einer ein-eindeutigen Funktion. Weiter kommen bei ψ alle Elemente aus T als Funktionswerte von Argumenten aus S vor, und damit kommen bei χ

alle Elemente von T als Funktionswerte von Argumenten aus R vor. Also ist χ eine Abbildung von R auf T.

20) Satz 25. *Zu zwei Mengen m und n gibt es stets eine Menge, die zu m und n fremd und zu m äquivalent ist.*

Beweis. Sei $/_{\mathfrak{U}(m\cup n)}$ eine $/$-Funktion von $\mathfrak{U}(m\cup n)$ und einer Indexmenge dieses Systems. Dann ist

$$l = /_{\mathfrak{U}(m\cup n)}(0)$$

weder in m noch in n enthalten. $\mathfrak{U}(m\cup n)$ enthält nämlich 0 und alle Prime von m und n. Infolgedessen kann 0 wegen der Ein-eindeutigkeit der Funktion und der Erhaltung der Prime bei der Funktion (d. h. der Zuordnung der Prime zu sich selbst) nicht auf eines der Prime von m oder n abgebildet werden.

Sei k eine Indexmenge von

$$K = \mathfrak{U}(m\cup n\cup l)$$

und $/_K$ eine $/$-Funktion von K und k. Dann ist

$$^n\widetilde{m} = \mathfrak{J}/_K(m\times l)$$

zu m und n fremd und zu m äquivalent.

Weil K die Prime von m und von n enthält und kein Element von $m\times l$ ein Prim von m oder von n ist, müssen die Funktionswerte der Funktion $/_K$ zu den Argumenten aus $m\times l$ — wegen der Ein-eindeutigkeit der Funktion $/_K$ und der Erhaltung der Prime bei der Anwendung der Funktion $/_K$ — alle von den Primen von m und n verschieden sein. Zwei Mengen, die kein Prim gemeinsam haben, sind aber fremd. Daher ist $^n\widetilde{m}$ zu m und n fremd.

Ferner existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle x mit $x\,\pi\, m$ den Funktionswert $/_K(x\cup l)$ (das ist ein Element von $/_K(m\times l)$ und damit ein Prim von $^n\widetilde{m}$) liefert. Diese Funktion ist ein-eindeutig auf $m_{\{Pr(x)\}}$, und nach der Definitionsgleichung von $^n\widetilde{m}$ gibt es zu allen Primen von $^n\widetilde{m}$ ein Prim von m, dessen Funktionswert es ist. Folglich ist die Funktion eine Abbildung der Prime von m auf die von $^n\widetilde{m}$. Wie oben festgestellt wurde, sind m und $^n\widetilde{m}$ fremd, also ist

$$m \sim {}^n\widetilde{m}.$$

21) *Definition 28a.* Zwei Mengen heißen äquivalent, wenn eine Menge existiert, die zu beiden Mengen fremd und äquivalent im Sinne von Definition 28 ist.

Satz 26. *Zwei Mengen m und n sind dann und nur dann äquivalent, wenn eine Abbildung der Prime von m auf die Prime von n existiert.*

Beweis. Notwendigkeit: Sei h eine Menge, die zu m und n fremd ist und für die $m \sim h \sim n$ gilt. α_1 sei eine α-Funktion von m und h und α_2 eine α-Funktion von h und n. Dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Prime x von m jeweils den Funktionswert $\alpha_2(\alpha_1(x))$ liefert. Nach Satz 24 ist diese Funktion eine Abbildung der Prime von m auf die von n. Da die beiden α-Funktionen existieren, existiert diese Funktion, wenn m und n äquivalent sind.

Genugsamkeit: Sei λ eine Abbildung der Prime von m auf die von n. Es existiert nach Satz 25 eine Menge, die zu m und n fremd und zu m äquivalent ist. Sei h eine solche Menge. Dann existiert eine α-Funktion von h und m. Sei α eine solche Funktion. Schließlich existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Prime x von h den Funktionswert $\lambda(\alpha(x))$ liefert und die nach Satz 24 eine Abbildung der Prime von h auf die von n ist. Also ist nach Satz 22 $h \sim n$ und damit $m \sim n$.

22) *Definition 30.* Eine Abbildung des Systems S auf das System T : φ heißt eine inklusions-isomorphe Abbildung oder ein Inklusions-Isomorphismus von S auf T, wenn für alle x mit $x \in S$ und alle y mit $y \in S$ aus $x \subseteq y$ folgt $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ und aus $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ folgt $x \subseteq y$.

Nicht jede Abbildung ist ein Inklusions-Isomorphismus; denn z. B. eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Teilmengen x von m den Funktionswert $m - x$ liefert, ist eine Abbildung von $\mathfrak{U}m$ auf $\mathfrak{U}m$. Wäre sie ein Inklusions-Isomorphismus, so müßte aus $0 \subseteq m$ folgen $m \subseteq 0$.

Satz 27. *Ist φ ein Inklusions-Isomorphismus von R auf S und ψ ein Inklusions-Isomorphismus von S auf T, so ist jede Funktion χ, die mit einer Stelle für die Elemente x von R den Funktionswert*

$$\psi(\varphi(x))$$

liefert, ein Inklusions-Isomorphismus von R auf T.

Beweis. Nach Satz 24 ist jede der besagten Funktionen eine Abbildung von R auf T. Außerdem gilt für alle $x \in S$, $y \in S$: $x \subseteq y \equiv \varphi(x) \subseteq \varphi(y) \equiv$ $\equiv \psi(\varphi(x)) \subseteq \psi(\varphi(y))$ und damit $x \subseteq y \equiv \psi(\varphi(x)) \subseteq \psi(\varphi(y))$ für alle x und y mit $x \in S$ und $y \in S$.

Satz 28. *Wenn zwei Mengen m und n äquivalent sind, existiert ein Inklusions-Isomorphismus von dem Potenzsystem $\mathfrak{U}m$ auf das Potenzsystem $\mathfrak{U}n$.*

Beweis. Wie aus dem Beweis zu Satz 23 hervorgeht, gilt der Satz, wenn m und n fremd sind. Anderenfalls existiert nach Definition 28a eine Menge, die zu m und n äquivalent und fremd ist. Sei h eine solche Menge. Es existieren dann ein Inklusions-Isomorphismus von $\mathfrak{U}m$ auf $\mathfrak{U}h$ und einer von $\mathfrak{U}h$ auf $\mathfrak{U}n$. Seien φ und ψ zwei solche. Schließlich existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für die Teilmengen x von m den Funktionswert $\psi(\varphi(x))$ liefert. Diese Funktion ist nach Satz 27 ein Inklusions-Isomorphismus von $\mathfrak{U}m$ auf $\mathfrak{U}n$.

Zusatz. Ist φ ein Inklusions-Isomorphismus von $\mathfrak{U}m$ auf $\mathfrak{U}n$, dann gilt für alle Teilmengen t von m : $t \sim \varphi(t)$, weil die inklusions-isomorphe Abbildung auch alle Prime von t auf alle Prime von $\varphi(t)$ abbildet.

23) Satz 29. *Die Äquivalenzrelation ist transitiv, reflexiv und symmetrisch.*

Beweis. Die Transitivität folgt aus den Sätzen 24 und 26. Die Reflexivität ist durch die Existenz der identischen Funktion gesichert. Die Symmetrie ist aus der Definition (Def. 28a) ersichtlich.

24) Satz 30. *Zu jedem System S gibt es ein System S' paarweise fremder Mengen und eine Abbildung φ von S auf S', so daß für alle Elemente y aus S gilt $y \sim \varphi(y)$.*

Beweis. Sei r eine Indexmenge von S und s eine Menge, die zu $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und r fremd und zu r äquivalent ist. Dann existiert eine /-Funktion von S und r, die eine Abbildung von S auf die Prime von r ist, und es existiert nach Satz 22 eine Abbildung von $r_{\{Pr(\mathbf{x})\}}$ auf $s_{\{Pr(\mathbf{x})\}}$. Schließlich existiert wegen Satz 24 eine Abbildung von S auf die Prime von s. Sei ψ eine solche Abbildung, und für $y \notin S$ sei $\psi(y) = 0$. Zur Abkürzung setze ich

$$R = \mathfrak{J}\mathfrak{S}S \times s.$$

Man nehme eine Menge y aus S und bilde

$$Y = y_{\{Pr(\mathbf{x})\}}.$$

Zu allen Primen aus Y wird nun das Prim $\psi(y)$ hinzugefügt, so daß Paare entstehen. Das System dieser Paare ist:

$$Y' = R_{\left\{\begin{smallmatrix} E_{w \in Y}\, w \subseteq \mathbf{x} \\ \psi(y) \subseteq \mathbf{x} \end{smallmatrix}\right\}}.$$

Sei $/_Q$ eine /-Funktion von $Q = \mathfrak{U}(\mathfrak{J}\mathfrak{S}S \cup s)$ und einer Indexmenge von Q. Dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle y mit $y \in S$ den Funktionswert

$$\mathfrak{J}/_Q(Y')$$

liefert. Sei φ eine solche Funktion, dann gilt — weil S aus $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ ausgesondert werden kann und φ auf $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ definiert ist — für

$$S' = \varphi(S)$$

und φ folgendes:

1. Wenn $y_1 \neq y_2$ ist, so ist $\psi(y_1) \neq \psi(y_2)$. Daher haben die entsprechenden Y_1' und Y_2' keine Elemente gemeinsam, und es ist $\varphi(y_1) \cap \varphi(y_2) = 0$. Daraus folgt, die Mengen aus S' sind paarweise fremd.

2. $\varphi(y)$ ist wegen 1. eine ein-eindeutige Funktion, die nach den Definitionen von φ und S' allen Elementen aus S ein Element aus S' zuordnet und bei der alle Elemente aus S' Funktionswerte für je ein Argument y mit $y \in S$ sind. Also ist φ eine Abbildung von S auf S'.

3. Es existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen für alle xy mit $x \pi y$ und $y \in S$ den Funktionswert

$$/_Q(x \cup \psi(y))$$

liefert. Das ist ein Prim von $\varphi(y)$. Wenn χ eine solche Funktion ist, so ist sie für alle y mit $y \in S$ bezüglich der ersten Stelle ein-eindeutig. Außerdem gibt es für alle diese y zu allen Primen von $\varphi(y)$ je ein Prim von y, dem als erstem Argument bei dem zweiten Argument y die Funktion χ als Funktionswert das Prim von $\varphi(y)$ zuordnet. Also existiert eine Funktion, die mit zwei Stellen für alle y mit $y \in S$ als zweite Argumente jeweils bezüglich der ersten Stelle eine Abbildung der Prime von y auf die von $\varphi(y)$ ist. Daraus folgt, es ist für alle Elemente y aus S

$$y \sim \varphi(y).$$

Hiermit läßt sich nun das Auswahlaxiom XII folgendermaßen verallgemeinern.

Satz 31. ***Zu jedem System S, das nicht leer ist und das nicht die leere Menge enthält, existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Elemente avs S ein Prim dieses Elementes als Funktionswert liefert.***

Beweis. Wenn a eine nach dem Auswahlaxiom existierende Auswahlmenge des Systems S' ist, dessen Mengen paarweise fremd sind und zu dem eine Abbildung φ von S auf S' existiert, so daß für alle y mit $y \in S$ $y \sim \varphi(y)$ ist, und wenn χ die Funktion aus dem Beweis zu Satz 30 ist, dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle y mit $y \in S$ den Funktionswert

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{S} S)_{\{\varphi(y) \cap a = \chi(\mathfrak{x}, y)\}}$$

liefert, weil χ für alle Elemente y aus S bezüglich der ersten Stelle auf $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ definiert ist.

Für gegebenes y mit $y \in S$ ist $\varphi(y) \cap a$ ein bestimmtes Prim z von $\varphi(y)$. Weil χ für y bezüglich der ersten Stelle eine Abbildung der Prime von y auf die von $\varphi(y)$ ist, gibt es genau ein Prim x' von y, für das $z = \chi(x', y)$ ist. Dieses Prim ist der besagte Funktionswert. Da a und χ existieren, gilt der Satz.

25) **Satz 32.** ***Zwei Systeme S und T haben dann und nur dann äquivalente Indexmengen, wenn eine Abbildung von S auf T existiert.***

Beweis. Notwendigkeit: Sei s eine Indexmenge von S und t eine Indexmenge von T. Sei f_S eine f-Funktion von S und s, f_T eine f-Funktion von T und t und f_T^{-1} eine Umkehrfunktion von f_T. Außerdem sei α eine Abbildung der Prime von s auf die von t. Dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Elemente x aus S den Funktionswert

$$f_T^{-1}\big(\alpha(f_S(x))\big)$$

liefert. Diese Funktion ist nach Satz 24 eine Abbildung von S auf T. Da $f_S, f_T, f_T^{-1}, \alpha$ existieren, existiert also eine Abbildung von S auf T.

Genugsamkeit: Seien s, t, f_T, f_S wie in dem ersten Teil des Beweises. Sei f_S^{-1} eine Umkehrfunktion von f_S und φ eine Abbildung von S auf T. Dann existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Prime x von s den Funktionswert

$$f_T\big(\varphi(f_S^{-1}(x))\big)$$

liefert. Diese Funktion ist nach Satz 24 eine Abbildung der Prime von s auf die von t. Da $f_S, f_S^{-1}, f_T, \varphi$ existieren, existiert also eine Abbildung der Prime von s auf die von t, und es ist

$$s \sim t.$$

Satz 33. ***Hauptsatz der Addition und Multiplikation. Sei S ein System, dessen Elemente paarweise fremd sind, und T ein nicht leeres System, dessen Elemente auch paarweise fremd sind, und sei φ eine Abbildung von S auf T, so daß für alle y mit $y \in S$ $y \sim \varphi(y)$ gilt. Dann ist für jede Indexmenge s von $\mathfrak{P}S$ und jede t von $\mathfrak{P}T$ $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ und $s \sim t$.***

Beweis. 1. Zunächst seien $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ fremd. Dann sind auch alle Elemente aus S mit allen Elementen aus T fremd. Wähle ich für die beiden

Funktionen φ und ψ aus der Ergänzung zu Satz 22 eine Identität und die Funktion φ aus diesem Satz, so existiert nach der besagten Ergänzung eine Funktion, die mit zwei Stellen bei allen zweiten Argumentwerten $y \in S$ bezüglich der ersten Stelle eine Abbildung der Prime von y auf die von $\varphi(y)$ ist. Sei α eine solche Funktion. Sei

$$H = S_{\{w \subseteq x\}} \quad \text{und} \quad \varrho(w) = \mathfrak{J}\mathfrak{S}H.$$

Wegen der paarweisen Fremdheit der Elemente aus S ist H für $w \in \mathfrak{S}S$ das System, das aus dem genau einen Element aus S besteht, das w enthält, und $\varrho(w)$ ist diese Elementmenge aus H. Mit diesen Hilfsmitteln kann man nun folgende Abbildung von $\mathfrak{S}S$ auf $\mathfrak{S}T$ angeben. Es existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle w mit $w \in \mathfrak{S}S$ den Funktionswert

$$\mathfrak{J}\ \varphi(\varrho(w))_{\{x = \alpha(w, \varrho(w))\}}$$

liefert. Sei σ eine solche Funktion, dann ist σ eine Abbildung von $\mathfrak{S}S$ auf $\mathfrak{S}T$.

Für alle w mit $w \in \mathfrak{S}S$ ist $\sigma(w)$ ein Element aus $\mathfrak{S}T$. Die Funktion σ ist auf $\mathfrak{S}S$ ein-eindeutig; denn für alle w und w' mit $w \in \mathfrak{S}S$ und $w' \in \mathfrak{S}S$ gilt: $w \neq w' \rightarrow \sigma(w) \neq \sigma(w')$. Existierte nämlich ein w mit $w \in \mathfrak{S}S$ und ein w' mit $w' \in \mathfrak{S}S$ und wäre $w \neq w'$ und $\sigma(w) = \sigma(w')$, so müßte für diese w, w' $\varphi(\varrho(w)) = \varphi(\varrho(w'))$ und damit $\varrho(w) = \varrho(w')$ sein. Daher müßte dann weiter $\alpha(w, \varrho(w)) = \alpha(w', \varrho(w')) = \alpha(w', \varrho(w))$ sein, was nicht sein kann, weil α bei $\varrho(w)$ als zweitem Argument bezüglich der ersten Stelle ein-eindeutig ist. Ferner kommen alle Prime aus $\mathfrak{S}T$ unter den Funktionswerten von Argumenten aus $\mathfrak{S}S$ bei der Funktion σ vor, weil diese Prime in je einem $\varphi(y)$ mit $y \in S$ liegen müssen und $\alpha(w, y)$ alle Prime von $\varphi(y)$ als Funktionswerte zu Argumenten w mit $w\,\pi\,y$ hat. Also ist σ eine Abbildung von $\mathfrak{S}S$ auf $\mathfrak{S}T$ und damit $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ nach Satz 26.

2. Man verwende σ statt β in der Formel (2) aus dem Beweis zu Satz 22. Das dort erhaltene Abbildungssystem A verwende man dann in der Formel (1) desselben Beweises. Dann sieht man, daß eine α-Funktion von $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ existiert, deren Funktionswerte für Argumente aus $\mathfrak{S}S$ mit denen von σ zusammenfallen. Sei α eine solche Funktion. α ist eine inklusions-isomorphe Abbildung der Teilmengen von $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ auf die von $\mathfrak{J}\mathfrak{S}T$. Die Elemente aus $\mathfrak{P}S$ sind Teilmengen von $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$. $\alpha(w)$ ist also eine Abbildung von $\mathfrak{P}S$, und zwar auf $\mathfrak{P}T$; denn erstens ist $\alpha(v)$ eine Auswahlmenge von T, wenn v eine von S ist, weil $\alpha(w)$ jedes Prim von v auf ein Prim von $\alpha(v)$ abbildet und weil $\alpha(w)$ für diese Prime mit $\sigma(w)$ übereinstimmt und daher die Prime so abgebildet werden, daß in allen Elementen aus T genau ein Prim von $\alpha(v)$ liegt. Zweitens kommen auch alle Auswahlmengen von T unter den Funktionswerten der Funktion α von Argumenten, die Auswahlmengen von S sind, vor, weil α involutorisch ist und S und T sich daher in der Betrachtung vertauschen lassen. Also ist

$$s \sim t.$$

3. Seien $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ nicht fremd. Sei r eine Menge, die zu $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{S}T$ fremd und zu $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ äquivalent ist. Nach Satz 25 existiert eine

solche Menge. Sei α'' eine α-Funktion von $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und r. α'' ist dann ein Inklusions-Isomorphismus von $\mathfrak{U}\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ auf $\mathfrak{U}r$. Ist

$$S' = \alpha''(S),$$

so wird S mit $\alpha''(x)$ auf S' abgebildet und umgekehrt. Daher ist $\mathfrak{J}\mathfrak{S}S' = r$. Die Elemente aus S' sind fremd, und für alle y mit $y \in S'$ ist $y \sim \alpha''(y)$.

Nach Voraussetzung gilt für alle y mit $y \in S$ $y \sim \varphi(y)$. Also gilt auch $y \sim \varphi(\alpha''(y))$ für alle y mit $y \in S'$. Sei λ eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Elemente y von S' den Funktionswert $\varphi(\alpha''(y))$ liefert. λ ist dann eine Abbildung von S' auf T nach Satz 24, und es gilt für alle Elemente y aus S': $y \sim \lambda(y)$. Damit ist nach 1. und 2.:

$$\mathfrak{J}\mathfrak{S}S' \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}T$$

und

$$s' \sim t,$$

wenn s' Indexmenge von $\mathfrak{P}S'$ ist. Ferner ist, weil α'' ein Inklusions-Isomorphismus von $\mathfrak{U}\mathfrak{J}\mathfrak{S}S'$ auf $\mathfrak{U}\,\mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ ist, der S auf S' abbildet, wegen $r \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}S$ und nach 2.

$$\mathfrak{J}\mathfrak{S}S \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}S'$$

und

$$s \sim s'.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{J}\mathfrak{S}S \sim \mathfrak{J}\mathfrak{S}T$$

und

$$s \sim t.$$

26) *Definition 31.* Ist eine Menge m einer Teilmenge einer Menge n äquivalent, so schreibt man $m \tau n$. Ist m keiner Teilmenge von n äquivalent, so schreibt man $m \not\tau n$.

Definition 32. Ist $m \tau n$ und $n \not\tau m$, so sagt man, m ist von kleinerer Mächtigkeit als n und schreibt dafür $m < n$ oder $n > m$.

Satz 34. *Äquivalenzsatz von* BERNSTEIN. *Aus $m \tau n$ und $n \tau m$ folgt $m \sim n$.*

Beweis. Ich werde zunächst zeigen, daß die Behauptung

$$m \sim m'' \subseteq m' \subseteq m \rightarrow m \sim m'$$

dem Satz logisch äquivalent ist, und dann diese Behauptung beweisen.

Mit $n = m'$ folgt aus dem Satz die Behauptung. Wenn andererseits zwei Mengen m_0 und n_0 existieren, so daß

$$m \sim n_0 \subseteq n \wedge n \sim m_0 \subseteq m$$

ist, ist $m \sim n$, weil nach Satz 28 und der Behauptung $(m \sim n_0 \subseteq n \wedge n \sim m_0 \subseteq m) \rightarrow E x : (m \sim n_0 \sim x \subseteq m_0 \subseteq m \wedge n \sim m_0) \rightarrow (m \sim m_0 \wedge m_0 \sim n) \rightarrow m \sim n$ gilt.

Der Beweis von ZERMELO und FRAENKEL für die obige Behauptung lautet in die hier gebrauchte Terminologie übertragen folgendermaßen:

Sei $m' - m = d$, φ eine der nach Satz 28 existierenden inklusions-isomorphen Abbildungen der Teilmengen von m auf die von m'' und

$$T = m_{\left\{\begin{smallmatrix} d \subseteq \mathfrak{x} \\ \varphi(\mathfrak{x}) \subseteq \mathfrak{x} \end{smallmatrix}\right\}}$$

das System der Teilmengen x von m, die die Menge d und die ihnen von der Funktion φ zugeordneten Funktionswerte enthalten. Es ist $m \in T$. Also ist T nicht leer. Sei

$$a = \mathfrak{J}\mathfrak{D}\,T.$$

Dann gilt $a \in T$. Es ist nämlich $d \subseteq a$; denn weil d in allen Mengen aus T enthalten ist, muß d wegen $\underline{\mathrm{fin}}\,T = a$ (Satz 17) auch in a enthalten sein. Ferner ist $\varphi(a) \subseteq a$; denn a ist Teil aller Mengen x aus T, x enthält nach Voraussetzung $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ enthält $\varphi(a)$, weil φ die Inklusion erhält, also enthält x auch $\varphi(a)$. $\varphi(a)$ ist also in allen Mengen aus T und damit auch in a enthalten.

Weiter gilt $\varphi(a) \cup d = a$. Beweis: Wegen $\varphi(a) \subseteq a$ und $\varphi(a) \subseteq m'' \subseteq m - d$, d. h. $\varphi(a) \cap d = 0$, ist $\varphi(a) \subseteq a - d$. Andererseits sind alle Prime p von $a - d$ auch Prime von $\varphi(a)$, sonst würde ein Prim p existieren, so daß $a - p = a_1$ die Mengen d und $\varphi(a)$ und damit $\varphi(a_1)$ enthält. Also würde a_1 zu T gehören und gleich $\mathfrak{J}\mathfrak{D}\,T - p$ sein, was nicht sein kann. Daher ist $a - d \subseteq \varphi(a)$, folglich $a - d = \varphi(a)$, woraus wegen $d \subseteq a$ $a = \varphi(a) \cup d$ folgt.

Damit ist nun

$$m' = d \cup m'' = (d \cup \varphi(a)) \cup (m'' - \varphi(a))$$

wegen $\varphi(a) \subseteq m''$, also

$$m' = a \cup (m'' - \varphi(a)).$$

Weil a und $m'' - \varphi(a)$ fremd sind, existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Prime y von m' den Funktionswert

$$\begin{array}{ll} \varphi(y) & \text{für } y \subseteq a \\ y & \text{für } y \subseteq (m'' - \varphi(a)) \end{array}$$

liefert. Diese Funktion ist eine Abbildung der Prime von $a \cup (m'' - \varphi(a))$ auf die von $\varphi(a) \cup (m'' - \varphi(a))$. Also ist

$$a \cup (m'' - \varphi(a)) \sim \varphi(a) \cup (m'' - \varphi(a))$$

und damit

$$m' \sim m''$$

und wegen $m'' \sim m$

$$m' \sim m.$$

Es ergibt sich damit folgende Übersicht über das Verhalten zweier Mengen gegenüber der *Äquivalenz*:

1. $m \,\tau\, n \wedge n \,\tau\, m$ d. h. $m \sim n$ nach dem Äquivalenzsatz
2. $m \,\tau\, n \wedge n \,\not\tau\, m$ d. h. $m < n$ nach Definition 32
3. $m \,\not\tau\, n \wedge n \,\tau\, m$ d. h. $m > n$ nach Definition 32
4. $m \,\not\tau\, n \wedge n \,\not\tau\, m$.

Die Relationen $\sim$, $<$, $>$ schließen einander also aus. Daß jedoch stets eine der drei Relationen zwischen zwei Mengen gilt und der vierte Fall unmöglich ist, wird erst in der Theorie der wohlgeordneten Mengen nachgewiesen.

Ferner gilt

$$(a \,\tau\, b \wedge b < c) \rightarrow a < c$$

und entsprechend

$$(a < b \wedge b \tau c) \to a < c$$

wegen $(a \tau b \wedge b \tau c) \to a \tau c \to (a < c \vee a \sim c)$, und weil aus $c \sim a \wedge a \tau b \wedge c \not\tau b$ ein Widerspruch folgt.

27) **Satz 35. Satz von Cantor.** *Jede Potenzmenge einer Menge hat eine größere Mächtigkeit als die Menge selbst.*

Beweis. Dieser Beweis ist mit einigen Abänderungen aus (Lit. [6]) Nr. 25 übertragen.

Sei n eine Indexmenge von $\mathfrak{U}m$ und $f_{\mathfrak{U}m}$ eine f-Funktion von $\mathfrak{U}m$ und n. Dann ist $m \subseteq n$, weil alle Prime von m in $\mathfrak{U}m$ vorkommen und daher auch Prime der Indexmenge sein müssen. Also ist wegen $m \sim m$: $m \tau n$.

Wäre $n \tau m$, so gäbe es eine Teilmenge von m, zu der n äquivalent wäre. Sei m' eine solche Menge. Dann existiert eine Abbildung der Prime von n auf die von m'. Sei ψ eine solche Abbildung. Schließlich existiert eine Funktion, die mit einer Stelle für alle Teilmengen x von m den Funktionswert

$$\psi(f_{\mathfrak{U}m}(x))$$

liefert. Sei φ eine solche Funktion. φ ist dann eine Abbildung der Teilmengen von m auf die Prime von m' nach Satz 24. Für

(1) $$U = m_{\{\varphi(\mathfrak{x}) \subsetneq \mathfrak{x}\}}$$

und

(2) $$m'' = \mathfrak{Z}\,\varphi(U)$$

gilt dann wegen $m'' \subseteq m'$:

$$m'' \in U \to \varphi(m'') \subsetneq m'' \text{ nach (1) und } \varphi(m'') \subseteq m'' \text{ nach (2)}$$
$$\overline{m'' \in U} \to \varphi(m'') \subseteq m'' \text{ nach (1) und } \varphi(m'') \subsetneq m'' \text{ nach (2).}$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $n \not\tau m$ und damit $m < n$.

28) **Satz 36.** *Ungleichung von* Zermelo. *Ist S ein System, dessen Elemente paarweise fremd sind, und T ein System, dessen Elemente auch paarweise fremd sind, und χ eine Abbildung von S auf T, so daß für alle Elemente y aus S $y < \chi(y)$ gilt, dann ist für jede Indexmenge i von $\mathfrak{P}T$*

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{S}S < i.$$

Die Übertragung aus dem entsprechenden Beweis in (Lit. [6]) in einen Beweis hierfür erfordert keine neuen Methoden.

Kapitel 4. Bemerkungen zum Axiomensystem

Um zu beweisen, daß das Axiomensystem aus dieser Arbeit schwächer als das von Fraenkel ist, genügt es, das Axiom XI heranzuziehen, weil die restlichen 12 Axiome offensichtlich in der Fraenkelschen Mengenlehre wahre Sätze sind.

Die Systeme in dieser Arbeit lassen sich in der Fraenkelschen Theorie als Mengen von den Elementen der Systeme auffassen. Ein System

$$m_{\{\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\mathfrak{u}) \subseteq \psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\mathfrak{u})\}}$$

muß bei Fraenkel folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\mathfrak{U} m)_{\varphi(x, y, z, u) \in \mathfrak{U} \psi(x, y, z, u)} .$$

Die hier als „Prime" bezeichneten Mengen sind bei Fraenkel die Mengen von einem Element.

Die folgenden Betrachtungen werden im Fraenkelschen System durchgeführt. Sei

$$\varphi_1(S) = S_{x = \{\mathfrak{S} x\}}$$

und

$$\varphi_2(S) = S - \varphi_1(S) = S_{x \notin \varphi_1(S)},$$

d. h. $\varphi_1(S)$ die Menge der Elemente von S, die nur ein Element enthalten, und $\varphi_2(S)$ die Menge der Elemente von S, die kein oder mehr als ein Element enthalten. Ferner sei $\psi(S)$ die Teilmenge von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}(\varphi_1(S))$, die nicht Element von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}(\varphi_1(S))$ ist. Daß es eine solche Funktion gibt, ist in (Lit. [6]) Nr. 5 bewiesen. Dann hat die Funktion

$$\varrho(S, x) = (\mathfrak{S}(\{x\} \cap \varphi_1(S))) \cup (\{\{x, \psi(S)\}\} \cap (\varphi_2(S) \times \{\psi(S)\}))$$

folgende Beschaffenheit:

$$x \in \varphi_1(S) \rightarrow \varrho(S, x) = x$$

$$x \in \varphi_2(S) \rightarrow \varrho(S, x) = \{\{x, \psi(S)\}\}.$$

Die Funktion ist ein-eindeutig; denn für verschiedene x aus $\varphi_1(S)$ sind auch die Funktionswerte, die selbst x sind, verschieden. Für verschiedene x aus $\varphi_2(S)$ sind die Funktionswerte ebenfalls verschieden. Ist schließlich $x_1 \in \varphi_1(S)$, $x_2 \in \varphi_2(S)$, so gilt wegen $\psi(S) \notin \mathfrak{S}\mathfrak{S}\, \varphi_1(S)$, d. h. weil x_1 die Form $\{\{a, b, \ldots\}\}$ hat und $\psi(S)$ nicht unter den $a, b, \ldots$ vorkommt, $\varrho(S, x_1) \neq \varrho(S, x_2)$.

Außerdem sind alle Funktionswerte von $\varrho(S, x)$ für $x \in S$ Mengen von genau einem Element.

Die Funktion $\varrho(S, x)$ liefert also bei

$$S' = \mathfrak{S}\, \varphi_1(S) \cup (\varphi_2(S) \times \{\psi(S)\})$$

eine ein-eindeutige Abbildung der Menge S auf die Menge

$$S'' = (\mathfrak{U} S')_{x = \{\mathfrak{S} x\}} .$$

Gehen wir nun wieder zu der Terminologie dieser Arbeit über, so ist S' eine Indexmenge des Systems S, weil ϱ bei S bezüglich x eine $/$-Funktion von S und S' ist, denn $\varrho(S, x)$ ist bezüglich x eine Abbildung des Systems S auf S'', das System der Prime von S', und bildet die Prime von S auf sich ab.

Wenn S wie in Axiom XI von den Mengen z, u, v, w abhängt, so ist auch nach Fraenkel die Indexmenge S' eine Funktion von z, u, v, w. Axiom XI ist also ein richtiger Satz in der Fraenkelschen Theorie.

Andererseits ist die Richtigkeit der Aussagen der Fraenkelschen Axiome aus den Axiomen dieser Arbeit nicht zu ersehen, da der Begriff des Elementes einer Menge hier gar nicht auftritt. Daher ist z. B. die Vereinigungsmenge einer Menge nicht bildbar.

Es ist damit insbesondere gezeigt, daß das Axiom XI zum Repertoire des Fraenkelschen und der anderen stärkeren mengentheoretischen Kalküle gehört und daß die Forderung der Existenz einer Indexmenge nicht aus dem Rahmen der üblichen Mengenlehre herausfällt.

Literatur

[1] BERNAYS, P.: A system of axiomatik set theory. Teile I—VI. J. Symb. Log. **2**, 65—77 (1937); **6** 1—17 (1941); **7**, 65—89 (1942); **7**, 133—145 (1942); **8**, 89—106 (1943); **13**, 65—79 (1948). — [2] BIRKHOFF, GARETT: Lattice theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. XXV (1948). — [3] CANTOR, GEORG: Gesammelte Abhandlungen. Herausgegeben von ERNST ZERMELO. — [4] FORADORI, ERNST: Grundbegriffe einer allgemeinen Teiltheorie. (Zur Grundlegung einer allgemeinen Teiltheorie. I.) Mh. Math. u. Phys. **39**, 439—454 (1932). — [5] FORADORI, ERNST: Grundgedanken der Teiltheorie, 79 S. Leipzig 1937. — [6] FRAENKEL, A.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. Math. Z. **22**, 250—273 (1925). — [7] FRAENKEL, A.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II. Teil. Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. J. reine u. angew. Math. **155**, 129—158 (1926). — [8] FRAENKEL, A.: Axiomatische Theorie der Wohlordnung. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. III.) J. reine u. angew. Math. **167**, 1—11 (1932). — [9] HILBERT-ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **27**, VIII u. 120 S. Berlin 1928. — [10] HILBERT-BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, 1. Bd. Grundlehren der mathematischen Wissenschaft **40**. Berlin 1934. — [11] KÖTHE, G.: Theorie der Verbände. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. I 1, 13, 2. Aufl. 1939. — [12] MERZBACH, I.: Bemerkungen zur Axiomatik der Mengenlehre, 39 S. Diss. Marburg 1925. — [13] NEUMANN, J. v.: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. J. reine u. angew. Math. **154**, 219—240 (1925). Berichtigung J. reine u. angew. Math. **155**, 128 (1926). — [14] NEUMANN, J. v.: Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Z. **27**, 669—752 (1928). — [15] SCHOENFLIES, A.: Zur Axiomatik der Mengenlehre. Math. Ann. **83**, 173—200 (1921). — [16] SCHOENFLIES, A.: Bemerkung zur Axiomatik der Größen und Mengen. Math. Ann. **85**, 60—64 (1922). — [17] ZERMELO, E.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Ann. **65**, 261—281 (1908).

(Eingegangen am 23. Januar 1956)

Ewald, G.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 463—469 (1956)

Über den Begriff der Orthogonalität in der Kreisgeometrie

Von

Günther Ewald in Mainz

Einleitung

In einer früheren Arbeit des Verfassers [1][1]) wurde die Kreisgeometrie axiomatisch unter Verwendung der Grundbegriffe „Punkt“, „Kreis“, „liegt auf“, „ist orthogonal“ aufgebaut. Wie dort (S. 356) angekündigt, soll jetzt die Orthogonalität der Kreise mit Hilfe von Inzidenzeigenschaften definiert und ein dem alten äquivalentes neues Axiomensystem angegeben werden, in dem nur noch die Grundbegriffe „Punkt“, „Kreis“, „liegt auf“ vorkommen[2]). Die Axiome, die an die Stelle der früheren Orthogonalitätsaxiome treten, enthalten vorwiegend Aussagen über die Berührung von Kreisen, die als spezielle Inzidenzeigenschaft aufzufassen ist.

Das Hauptergebnis von [1] war folgendes: Erfüllt ein System axiomatischer Punkte und Kreise die Axiome 1 — 3[3]), also gewisse (elementare) Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiome sowie den Büschelsatz (in spezieller Form), dann lassen sich die axiomatischen Kreise als „ebene Schnitte“ eines Bereiches

$$(*) \qquad x\,A\,x'^T = 0$$

in einem dreidimensionalen projektiven Raum mit einem geeigneten Koordinatenschiefkörper K darstellen, wobei $A = (a_{ik})$, $a_{ik} \in K$ $(i, k = 0, \ldots, 3)$, $A' = A^T$ und T ein involutorischer Antiautomorphismus von K ist. (*) läßt sich in die gewöhnliche Kugelgleichung überführen, wenn K insbesondere der Körper der reellen Zahlen ist.

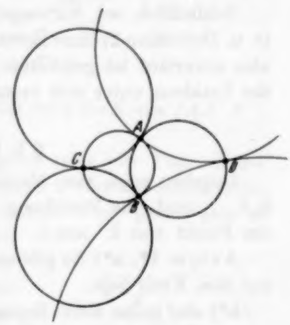

Fig. 1

Die elementaren Inzidenzaxiome und der Büschelsatz gelten aber auch für die ebenen Schnitte einer beliebigen konvexen Fläche. Folglich ist in den Orthogonalitätsaxiomen die Bedingung dafür zu suchen, daß der Bereich (*), wie angegeben, algebraisch ist[4]). Diese läßt sich jetzt weiter lokalisieren: Man überlegt sich leicht, daß alle Axiome, die die früheren Orthogonalitäts-axiome ersetzen, außer Axiom 3* (vgl. Fig. 1) ebenfalls für die ebenen Schnitte

[1]) Zahlen in eckigen Klammern bedeuten die Nummer im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

[2]) Die Axiome von [1] zitieren wir im Folgenden kurz als Axiome 1—3, die neuen als Axiome 1*— 5*.

[3]) Siehe [1], S. 357.

[4]) Vgl. [1], S. 356.

einer beliebigen konvexen Fläche erfüllt sind. Axiom 3* bedingt also den algebraischen Charakter von (*) und in gewissem Sinne auch den „metrischen" Charakter, der dem Begriff der Orthogonalität anhaftet.

Topologisch gesehen ergibt sich hieraus der folgende Satz: Die Schnittpunktseigenschaft von Axiom 3* ist notwendig und hinreichend dafür, daß das System der ebenen Schnitte einer konvexen Fläche dem System der Kreise auf der Kugel homöomorph ist.

Die gleiche Kennzeichnung leistet bekanntlich[5]) der Miquelsche Satz anstelle von Axiom 3*. In diesem Zusammenhang ist erwähnenswert, daß ein „entarteter" Fall (s. u. Satz 1) der zur $(8_4, 8_4)$-Konfiguration von Kreisen spezialisierten Miquelschen Kreisfigur fast unmittelbar eine Folge von Axiom 3* ist. Indessen bleibt weiterhin offen, ob der allgemeine Miquelsche Satz (oder auch nur die $(8_4, 8_4)$-Konfiguration) aus den Axiomen 1*—5* (bzw. 1—3) beweisbar ist.

Ein spezieller Teil des Büschelsatzes wurde in [1][6]) allein aus den Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen bewiesen. Umgekehrt erscheint jetzt ein „entarteter" Fall dieses Teils des Büschelsatzes als Axiom (5* b*).

Schließlich sei hervorgehoben, daß die Definition der Orthogonalität (s. u. Definition 2) ohne Bevorzugung bestimmter Punkte oder Kreise geschieht, also invariant ist gegenüber jeder Abbildung, die die Kreise bei Erhaltung der Inzidenz unter sich vertauscht.

§ 1. Das neue Axiomensystem

Gegeben seien zwei Mengen von Dingen, *Punkte* $P, A, B, \ldots$ und *Kreise* $k, l, \ldots$ und eine Beziehung „*P liegt auf k*" (bzw. „*k* geht durch *P*", „*P* ist ein Punkt von *k*" usw.).

Axiom 1*: a*) *Es gibt einen Punkt und einen Kreis, so daß der Punkt nicht auf dem Kreis liegt.*

b*) *Auf jedem Kreis liegen mindestens drei verschiedene Punkte.*

c*) *Drei verschiedene Punkte liegen auf einem und nur einem Kreis.*

Definition 1: Zwei Kreise schneiden, berühren oder meiden sich, je nachdem sie einen, genau einen oder keinen Punkt gemeinsam haben. Einen gemeinsamen Punkt zweier Kreise nennen wir Schnittpunkt, im Falle der Berührung auch Berührpunkt.

Axiom 2*: a*) *Durch einen Punkt auf einem Kreis und einen nicht auf diesem Kreis liegenden Punkt gibt es genau einen zweiten Kreis, der den ersten berührt.*

b*) *Sind zwei sich schneidende (evtl. berührende) Kreise und ein beliebiger Punkt auf einem dieser Kreise gegeben, der nicht zugleich auf dem andern liegt, dann gibt es durch diesen Punkt einen dritten Kreis, der die beiden ersten berührt.*

c*) *Sind zwei sich berührende Kreise und ein vom Berührpunkt verschiedener Punkt auf einem dieser Kreise gegeben, dann gibt es durch diesen Punkt nur einen gemeinsamen Berührkreis der beiden Kreise.*

---

[5]) Siehe B. Hesselbach [2], S. 265. Vgl. auch B. L. van der Waerden u. L. J Smid, [3], S. 754.

[6]) Siehe [1], S. 358 und 362.

Axiom 3*: *Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte derart, daß es zwei Kreise durch C gibt, die sich untereinander und den Kreis (ABD)*[7]) *in A bzw. B berühren. Dann berühren sich ebenfalls die Kreise durch D, die den Kreis (ABC) in A bzw. B berühren (Fig. 1).*

Axiom 4*: *Ein Kreis k werde in einem Punkt A von zwei Kreisen berührt, die zugleich einen zweiten Kreis k' in den Punkten A', A'' berühren; ebenso in einem Punkt B von zwei Kreisen, die zugleich k' in den Punkten B', B'' berühren.*

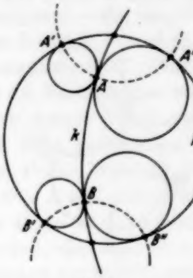

Fig. 2

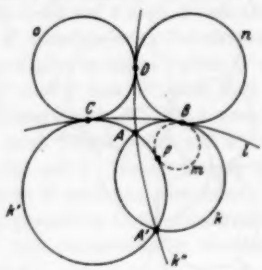

Fig. 3

A' sei von A'', B' sei von B'' verschieden[8]). *Meiden sich dann die Kreise $(AA'A'')$ und $(BB'B'')$, so schneiden sich k und k' (Fig. 2).*

Axiom 5*: a*) (Spezieller Büschelsatz): *Gegeben seien vier Paare lauter verschiedener Punkte, so daß in fünf Fällen je zwei dieser Paare auf einem Kreis liegen. Zu dreien dieser Kreise, die nicht durch dasselbe Paar gehen, gebe es niemals drei weitere Kreise, die sich so zu je zweien untereinander berühren, daß in jedem Berührpunkt ein anderer der drei ersten Kreise ebenfalls Berührkreis ist. Dann liegen auch im sechsten Fall die Paare auf einem Kreis.*

b*) („Entarteter" Fall des Büschelsatzes): *Seien A, A', B, C, D fünf verschiedene Punkte, und es gebe zwei Kreise, von denen einer den Kreis $(AA'C)$ in C und der andere den Kreis $(AA'D)$ in D berührt und die beide $(AA'B)$ in B berühren. Dann existiert auch ein Kreis, der $(AA'C)$ in C und $(AA'D)$ in D berührt (Fig. 3).*

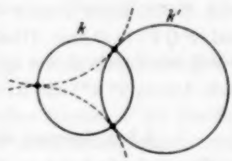

Fig. 4

Definition 2: (Orthogonalität). Ein Kreis k heißt zu einem Kreis k' *orthogonal*, wenn er durch die Berührpunkte dreier sich in verschiedenen Punkten zu je zweien berührender Kreise, zu denen k' gehört, hindurchgeht (Fig. 4).

Satz 1: *P, Q seien verschiedene Punkte auf einem Kreis k. Ferner seien s_P, s_Q zwei Kreise, die sich untereinander in S und den Kreis k in P bzw. Q berühren; ebenso t_P und t_Q zwei Kreise, die sich untereinander in $T \neq S$ und k in P bzw.*

[7]) (XYZ) bezeichnet den Kreis durch X, Y und Z.

[8]) Dann folgt aus Axiom 2* a*) auch $A', A'' \neq A$ und $B', B'' \neq B$.

Q berühren. Dann liegen P, Q, S und T auf einem Kreis und es gibt einen Kreis durch S, T, der s_P und t_Q (sowie s_Q und t_P) berührt (Fig. 5)[9].

Beweis: Angenommen, S liegt nicht auf (PQT), dann schneidet s_P jedenfalls diesen Kreis in einem von P verschiedenen Punkt S' (Fig. 6), denn sonst würde s_P sowohl k wie (PQS) in P berühren, so daß wegen Axiom 2*a*) auch k und (PQS) nur einen Punkt $P = Q$ gemeinsam hätten. Ist ferner U ein Punkt $\neq P$, Q auf k [Axiom 1* b*)], dann sieht man nach Axiom 3*, indem man dort P statt A, Q statt B, T statt C und U statt D setzt, daß sich die

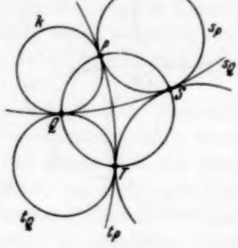

Fig. 5

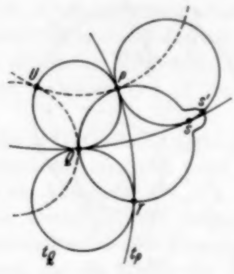

Fig. 6

Kreise durch U, die (PQT) in P bzw Q berühren, auch untereinander berühren (Fig. 6). — Wendet man nun wieder Axiom 3* an, indem man P statt A, Q statt B, U statt C und S' statt D setzt, dann folgt, daß sich s_Q und s_P in S' berühren entgegen der Annahme $S \neq S'$. Durch P, Q, T, S geht also ein Kreis.

Genau wie die beiden obigen Kreise durch den Punkt U auf k finden wir jetzt durch einen Punkt V auf t_Q zwei Kreise, die sich untereinander in V und (PQT) in Q bzw. T berühren. Daraus schließt man, wieder nach Axiom 3*: Der Kreis durch S, der t_Q in T berührt [Axiom 2* a*)], berührt auch s_Q und nach Axiom 2* a*) die Kreise s_P und t_P.

§ 2. Folgerung der Axiome 1 – 3 aus den Axiomen 1* – 5*

Die Axiome 1 a) — d) stimmen genau mit den Axiomen 1*a*) — c*), 2*a*) überein.

Axiom 2: a) „*Ist k zu k' orthogonal*[10]), *dann ist auch k' zu k orthogonal.*"

Seien A, B, C die Berührpunkte der drei Berührkreise, zu denen k' gemäß Definition 2 gehört, so daß also $k = (ABC)$ ist und k' etwa durch A, B hindurchgeht. Nimmt man einen Punkt $D \neq A, B$ auf k' an [Axiom 1*b*)], dann gibt es nach Axiom 2*a*) einen Kreis l durch A und D, der k berührt, und nach Axiom 3* einen gemeinsamen Berührkreis von k und l durch B, D. Also ist auch k' zu k orthogonal.

[9]) Die Konfiguration von Satz 1 ergibt sich als „entarteter" Fall aus der $(8_4, 8_4)$-Konfiguration von Kreisen, die sowohl eine Spezialisierung des Miquelschen Satzes wie des Büschelsatzes darstellt, wenn man in dieser die Punkte geeignet paarweise zusammenfallen läßt.

[10]) „Orthogonal" ist in diesem Paragraphen im Sinne von Definition 2 zu verstehen.

b) „*Ist k zu k' orthogonal, dann schneiden sich k und k'.*" Dieses Axiom ist nach Definition der Orthogonalität erfüllt. Die Schnittpunkte von k und k' sind verschieden.

e) „*Liegt P auf k und ist Q ein beliebiger von P verschiedener Punkt, dann gibt es durch P, Q genau einen zu k orthogonalen Kreis.*" Liegt in der Tat Q nicht auf k, dann gibt es durch P *und* Q *genau einen Kreis* l, *der* k *berührt* [Axiom 2*a*)] und durch Q genau einen weiteren Kreis, der l und k berührt [Axiom 2*b*) c*)], letzteren in einem Punkt $R \neq P, Q$. $k' = (PQR)$ ist dann zu k orthogonal. — Sei umgekehrt, falls Q nicht auf k liegt, k'' ein Orthogonalkreis von k durch P und Q. Den von P verschiedenen Schnittpunkt von k und k'' nennen wir R'. Nach Definition 2 gibt es einen Punkt Q' auf k'', so daß sich die Berührkreise von k durch Q' und P bzw. R' auch in Q' berühren. Der [nach Axiom 2*b*) existierende] Kreis durch R', der k und l berührt, hat dann (falls nicht schon $Q' = Q$ ist) nach Satz 1 einen auf $k'' = (PR'Q')$ liegenden Punkt, d. h. Q als Berührpunkt mit l. Wegen Axiom 2*c*) folgt hieraus $R' = R$ und mithin $k'' = k'$. Also ist k' eindeutig bestimmt.

Liegt Q auf k, dann findet man den gesuchten Orthogonalkreis mit Hilfe von Kreisen, die k in P bzw. Q und sich untereinander berühren. Seine Eindeutigkeit ergibt sich wieder aus Satz 1.

Satz 2: *Ist k' zu k in P orthogonal, dann auch zu jedem Kreis, der k in P berührt.*

Beweis: Man setze in Satz 1 $k' = (PQS)$. Ist dann t_P ein beliebiger Kreis, der k in P, und t_Q der Kreis, der k in Q und t_P in $T \neq P$ berührt, so ist wegen $(PQS) = (PQT)$ k' auch zu t_P orthogonal.

Satz 3: *Zwei Kreise, die zu einem Kreis k in einem Punkt P orthogonal sind, berühren sich.*

Beweis: Andernfalls gäbe es durch ihren zweiten Schnittpunkt zwei verschiedene zu k in P orthogonale Kreise entgegen e).

c) „*Ist ein Kreis zu zwei sich berührenden Kreisen orthogonal, dann geht er durch deren Berührpunkt*".

k und l seien die angenommenen, sich berührenden Kreise, P ihr Berührpunkt. k' sei ein zu k und l orthogonaler Kreis; wir nehmen an, er geht nicht durch P. Es seien K bzw. L Schnittpunkte von k' mit k bzw. l [sie existieren nach b)]. Die zu k bzw. l orthogonalen Kreise durch P und K bzw. L [sie existieren nach e)] berühren beide k' (Satz 3), ferner sind sie beide sowohl zu k wie zu l orthogonal (Satz 2). Sie berühren sich also auch untereinander in P (Satz 3). Dann ist aber der Kreis (PKL) ein von k verschiedener, (nach Definition 2) zu k' in K orthogonaler Kreis durch P, im Widerspruch zu e).

d) „*Sind zwei verschiedene Kreise gleichzeitig zu zwei sich meidenden Kreisen orthogonal, dann schneiden sie sich.*"

Seien l und m die gegebenen sich meidenden Kreise, k und k' gemeinsame Orthogonalkreise von l und m. k' schneide l in A' und A'' sowie m in B' und B'' [Existenz nach b)]. Ferner sei A ein Schnittpunkt von k und l sowie B ein Schnittpunkt von k und m. Dann findet man mit Hilfe von Satz 2 und 3 durch A zwei Kreise, die k' in A' bzw. A'' und k beide in A berühren (als

Orthogonalkreise von l), gleichfalls zwei Kreise durch B, die k' in B' bzw. B'' und k beide in B berühren. Dann schneiden sich k und k' aber nach Axiom 4* (vgl. Fig. 2).

f) „*Sind A, A', B drei beliebige verschiedene Punkte, dann gibt es durch B genau einen Kreis, der zu allen Kreisen durch A, A' orthogonal ist.*"

Sei $k = (AA'B)$ und k' ein von k verschiedener Kreis durch A, A'. Nach Axiom 2* b*) gibt es einen Kreis l, der k in B und k' in einem Punkt C berührt; und ebenso einen Kreis m, der l in B und k' in einem Punkt $P \neq C$ berührt (Fig. 3). Dann ist aber (BCP) nach Definition 2 zu k', l, m und wegen Satz 2 auch zu k orthogonal. Wegen e) ist (BCP) der einzige Kreis dieser Art.

Ist nun k'' ein beliebiger weiterer Kreis durch A, A', dann lege man durch B einen [nach Axiom 2* b*) existierenden] Kreis n, der k in B und k'' in einem Punkt D berührt. Nach Axiom 5* b*) gibt es einen gemeinsamen Berührkreis o von k' und k'' durch C und D. Wegen Satz 2 ist aber (BCP) zu n und o orthogonal, geht also wegen c) durch D. Nach Satz 2 folgt hieraus wieder, daß (BCP) auch zu k'' orthogonal ist. — Damit ist f) nachgewiesen.

Axiom 3: (Spezieller Büschelsatz). „*Liegen von vier Paaren lauter verschiedener Punkte in fünf Fällen je zwei Paare auf einem Kreis, sind diese Kreise alle verschieden und gibt es zu dreien der fünf Kreise, die nicht durch dasselbe Paar gehen, niemals einen gemeinsamen Orthogonalkreis, dann liegen auch im sechsten Fall die Paare auf einem Kreis.*"

Dieses Axiom ist nur eine Umformulierung von Axiom 5* a*).

§ 3. Folgerung der Axiome 1* – 5* aus den Axiomen 1 – 3

Da die Axiome 1a) — d) mit den Axiomen 1* a*) — c*), 2* a*) äquivalent sind, brauchen wir wieder nur die Richtigkeit der übrigen Axiome nachzuweisen.

Axiom 2*: b*) (s. o.)

Seien k, l die gegebenen Kreise, R der angenommene Punkt auf einem dieser Kreise, etwa k. Da R mit keinem der Schnittpunkte von k und l zusammenfällt, gibt es nach Axiom 2f) bzw. bei Berührung nach Axiom 2e) und [1], S. 359, Satz (3) einen gemeinsamen Orthogonalkreis [11]) k' von k und l durch R. Er schneide l in einem Punkt S [Axiom 2b)]. Nach [1], § 1, (*) berührt dann der Orthogonalkreis m von k' durch R und S [Axiom 2e)] k und l.

c*) (s. o.)

Die Existenz eines solchen Berührkreises folgt aus b*). Wir behalten die eben angegebenen Bezeichnungen bei. Ist P der Berührpunkt von l und k, dann geht k' wegen Axiom 2c) durch P; es ist also $k' = (PRS)$. Gäbe es nun einen zweiten Kreis k'', der k in R und l in $S' \neq S$ berührte, dann wäre wieder (PRS') zu k, l, m orthogonal und $(PRS') \neq (PRS)$. Es gäbe also durch P zwei verschiedene, zu m in R orthogonale Kreise, entgegen Axiom 2e).

Axiom 3*: (s. o.)

Wie beim Nachweis von Axiom 2* b*) c*) schließt man, daß (ABC) zu (ABD) und den beiden gegebenen Kreisen, die (ABD) berühren, orthogonal ist. Nach Axiom 2a) ist dann auch (ABD) zu (ABC) orthogonal und wegen

[11]) „Orthogonal" ist in diesem Paragraphen im Sinne von [1] zu verstehen.

[1], S. 359, Satz (4) zu dem Kreis durch D, der (ABC) in A berührt. Der Orthogonalkreis von (ABD) durch B und D ist, wieder nach [1], § 1, (*), der gesuchte Kreis.

Axiom 4*: (s. o.)

k und k' sind offenbar zu den sich meidenden Kreisen $(AA'A'')$ und $(BB'B'')$ orthogonal, schneiden sich also nach Axiom 2d).

Axiom 5*: a*) (s. o.)

a*) ist wieder das umformulierte Axiom 3.

b*) (s. o.)

Nach Axiom 2f) gibt es durch B (genau) einen gemeinsamen Orthogonalkreis t von $(AA'B)$ und $(AA'C)$. t ist nach [1], S. 359, Satz (4) auch zu den beiden angegebenen Kreisen, die $(AA'B)$ in B berühren, sowie zu $(AA'D)$ orthogonal. Wegen Axiom 2c) geht also t durch C und D. Der Orthogonalkreis von t durch C und D [Axiom 2e)] ist dann nach [1], § 1, (*) der gesuchte Kreis.

Literatur

[1] Ewald, G.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. Math. Ann. **131**, 354—371 (1956). — [2] Hesselbach, B.: Über zwei Vierecksätze in der Kreisgeometrie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 265—271 (1933). — [3] Van der Waerden, B. L., u. Smid, L. J.: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. **110**, 753—776 (1935).

(Eingegangen am 25. Februar 1956)

Kanold, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 470 (1956)

Druckfehlerberichtigung

zu der Arbeit von Hans-Joachim Kanold, Braunschweig: Über einen Satz von L. E. Dickson
Math. Ann. 131, 167—179 (1956)

1) Seite 170, Zeile 15 von unten:
In (33) lies $\cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}}$ statt $\cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}{}^{\varkappa}}$.

2) Seite 171, Zeile 8 von oben:
In (40) lies $\varepsilon'_{\varrho\varkappa} > 0$ statt $\varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0$.

3) Seite 172, Zeile 10 von unten:
In (54) lies im Nenner $p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}}$ statt $p^{\alpha\varkappa}$.

4) Seite 172, letzte Zeile:
In (56) lies im Zähler $p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}}$ statt $p_{\varkappa}{}^{\varkappa}$.

5) Seite 173, Zeile 3 von unten:
In (65) lies im Nenner n_{ϱ}^{*} statt n^{*}.

6) Seite 173, letzte Zeile: Lies n_{ϱ}^{*} statt n^{*}.

7) Seite 174, Zeile 12 von unten:
In (70) lies im Nenner $p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}}$ statt $p^{\alpha\varkappa}$.

8) Seite 174, Zeile 10 von unten:
In (71) lies $\varepsilon'_{\varrho\varkappa}$ statt $\varepsilon_{\varrho\varkappa}$.

9) Seite 175, Zeile 14 von oben:
In (78) lies n_{ϱ}^{*} statt n_{ϱ}.

10) Seite 175, Zeile 2 von unten:
In (82) lies $\cdots + \frac{1}{p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}}}$ statt $\cdots + \frac{1}{p^{\alpha\varkappa}}$.

11) Seite 177, Zeile 2 von oben:
In (92) lies im Nenner n_{ϱ}^{*} statt n_{ϱ}.

12) Seite 177, Zeile 3 von unten:
In (101) lies im Zähler $\cdots + p_1^{x+1}$ statt $\cdots + p_1{}^{+1}$.

13) Seite 178, Zeile 11 von unten:
In (104) lies $q_{\varrho} = 2^{\beta_{\varrho}+1} - 1$ statt $q_{\varrho} = 2^{\beta_{\varrho}} \quad - 1$.